ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 2 (1982)

JAN KONIOR
Katowice

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Poszukiwanie dowodu a jego redagowanie w nauczaniu szkolnym matematyki

1. ZŁOŻONOŚĆ PROCESU DOWODZENIA I NIEKTÓRE JEGO FAZY

Dowodzenie twierdzenia jest procesem obejmującym zróżnicowane czynności. W rozumieniu uwzględniającym typowe sytuacje szkolne proces dowodzenia rozpoczyna się od zapoznania się z problemem matematycznym oraz uświadomienia sobie treści twierdzenia, którego należy dowieść. Oprócz działań myślowych, prób poszukiwania i odkrywania, obejmuje on dalej także konkretne operacje, takie jak np. sporządzanie pomocniczych konstrukcji, szkiców, rysunków itd. Wszystkie zresztą czynności - i te zinternalizowane, i te zewnętrzne - jako składniki ukierunkowanego działania są ściśle powiązane i wzajemnie uwarunkowane. W przyjętym tu znaczeniu proces dowodzenia kończy się wypracowaniem i przedstawieniem na piśmie ostatecznej wersji znalezionego dowodu, tj. zredagowaniem tekstu zbudowanego z myślą o zwięzłym przekazie matematycznym według określonych wymagań formalnych, a często także zwyczajowych norm i wzorców.

W działalności umysłu, która prowadzi do wykrycia myśli przewodniej dowodu i wstępnych konstrukcji, można wyróżnić rozmaite stadia, komponenty oraz charakterystyczne punkty zwrotne. Na temat stadiów heurystycznego procesu odkrywania i prawidło-

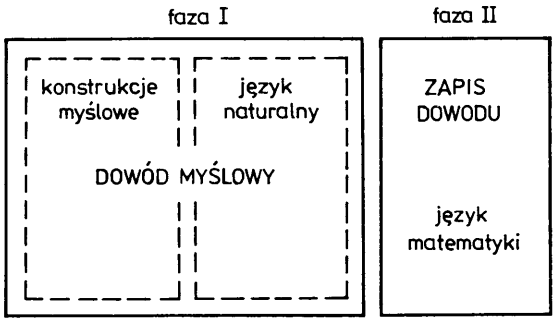
wości jego przebiegu - zwłaszcza w przypadku specyficznego terenu matematyki - niewiele jeszcze wiadomo. Część matematyków skłonnych do refleksji nad procesem twórczym (chodzi w tym przypadku o autentyczny proces twórczy rozumiany dosłownie jako najbardziej oryginalna i elitarna aktywność) podkreśla np. istnienie i rolę elementów intuicyjnych w swojej pracy badawczej oraz konfrontuje pomysł z uświadomionym i systematycznym rozumowaniem. Niektórzy, jak np. J.Hadamard i H.Poincaré, przypisują określone znaczenie podświadomej pracy umysłu nad problemem, wyróżniają w nim kilka warstw, od płytkich do coraz głębszych - mniej uświadomionych; tam też lokują źródła niespodziewanych i zagadkowych "olśnień" i nowych pomysłów (Hadamard, 1964). Inni podkreślają obecność i rolę odpowiedników matematycznych symboli w procesie myślowym i analizują w związku z tym stosunek myślenia do mowy (języka) w trakcie rozwiązywania problemu matematycznego. Także końcowe stadia twórczego procesu dowodzenia, związane z prezentacją czy też redagowaniem dowodu, wymagają złożonych działań. "Kiedyś" - wspomina E.Marczewski o Wacławie Sierpińskim - "wyjątkowo, skarżył mi się na odległość, jaka dzieli myśl przewodnią dowodu czy konstrukcji od ich ostatecznego formalnego kształtu, ale jestem przekonany, że odczuwał to utrapienie w znacznie mniejszym stopniu niż inni matematycy" (Marczewski, 1972).

Przytoczone opinie na temat różnych stadiów procesu rozwiązywania problemów matematycznych odnoszą się, co prawda, do oryginalnej i zaawansowanej twórczości, lecz nie można tu zupełnie pominąć głoszonego dość często poglądu, zgodnie z którym przynajmniej niektóre stadia w procesie badawczym uczonego i działalności poszukiwawczej ucznia rozwiązującego szkolny problem mają zbliżoną naturę, mimo znacznej różnicy tak w zaawansowaniu umysłów jak i w poziomie rozwiązywanych zadań.

Poznanie - nawet tylko wstępne i fragmentaryczne - niektórych stron rzeczywistego przebiegu procesu dowodzenia ma dla nauczania istotne znaczenie. Już choćby świadomość podkreślanego w dydaktyce matematyki, w psychologii oraz w wypowiedziach twórczych matematyków zróżnicowania tego procesu i pojawiania się w nim specyficznych momentów pozwoli zapewne nauczycielowi

lepiej śledzić jego przebieg.

W celu ustalenia uwagi na jednym z bardziej - jak się wydaje - istotnych momentów procesu dowodzenia w typowych sytuacjach szkolnych posłużymy się schematem (rys. 1). Powstał on z myślą o sytuacji, w której uczeń, bądź to dyskretnie sterowany przez nauczyciela, bądź też w zasadzie samodzielnie, poszukuje dowodu matematycznego twierdzenia w procesie nauczania-uczenia się.



Rys. 1

Schemat ten ilustruje niektóre wybrane i umownie nazwane etapy oraz komponenty procesu dowodzenia. Odpowiadają im na rysunku prostokątne obszary zaznaczone linią ciągłą lub przerywaną. Pierwszy z lewej (największy) obszar prostokątny symbolizuje etap poszukiwań, na którym nie tylko istnieją już cząstkowe pomysły, ale zostały one w takim stopniu rozwinięte, że są możliwe próby ich powiązania w jeden łańcuch będący wstępnym zarysem konstrukcji dowodowej lub jej większych fragmentów. Składników i części procesu poszukiwania, które na ogół poprzedzają ten etap (np. organizacja danych, organizacja użytecznej wiedzy, wstępne stadia analizy bądź syntezy spostrzeżeniowej w przypadku operowania rysunkiem itp.) nie będziemy tu uwzględniać, śledząc hipotetyczny przebieg procesu dowodzenia dopiero od chwili pojawienia się pełniejszych konstrukcji myślowych, pozwalających się już wyraźnie modelować zgodnie z logicznymi schematami wnioskowania. Nazwijmy ów etap pierwszych rysujących się, ale już pełniejszych, fragmentów myślowego dowodu umownie fazą I. Jest to zatem faza postępującej kontroli i stopniowego

opanowywania sytuacji po okresie pozornego bezładu, wyrażającego się w supremacji metody prób i błędów. W tym okresie widać już, które z dotychczasowych rezultatów nie będą prawdopodobnie dalej potrzebne, a które należałoby zachować. Formułowanie pierwszych wyników odbywa się jednak bez pretensji do nadawania im jakiejkolwiek wypracowanej postaci zewnętrznej, a tym bardziej pisemnej.

Schemat na rys. 1 podkreśla w tej fazie dwa ściśle powiązane z sobą aspekty: myślowy i językowy. Język, o który tu chodzi, to język naturalny. Umiejętność posługiwania się nim miał uczeń od wczesnego dzieciństwa i doskonali ją w procesach permanentnej edukacji. Wieloletnie używanie języka potocznego, który odznacza się chwiejnością i nieostrością wyrażeń, wyposaża jego użytkownika w tzw. poczucie językowe z powodzeniem zastępujące na co dzień system reguł gramatycznych i znaczeniowych. Chwiejność semantyki i składni jest w pewnym sensie zaletą języka naturalnego. Dzięki niej może on - w przeciwieństwie do języków sztucznych - spełniać nie tylko funkcję komunikowania faktów, ale też np. funkcję ekspresyjną, sugestyjną itp. Niezależnie od już i tak ogromnej elastyczności, bywa on dodatkowo w życiu codziennym (a także nader często w procesie dowodzenia na lekcji dopuszczającym formy dialogu) wzbogacany - jako język mówiony - mimiką, gestami, intonacją, co ma służyć m.in. usuwaniu wieloznaczności wypowiedzi. Jeśli zjawia się niejasność w użyciu języka potocznego, to przeważnie bywa usuwana przez kontekst w takim stopniu, który może praktycznie zadowolić.

Inaczej jest w przypadku języków nauki, a szczególnie oficjalnego języka matematyki i semantyki; kształtuje się on pod wpływem logiki, dostosowany jest do niezawodnego rozumowania i jednoznacznego wyrażania myśli; języki sztuczne służą bowiem przede wszystkim komunikowaniu faktów naukowych.

Język naturalny jest środkiem, za pomocą którego uczeń manifestuje wstępne konstrukcje myślowe. Wyniki ujęte najpierw w potocznym sformułowaniu jako rezultaty spontanicznych działań językowych i aktów myślowych wymagają nadal dopracowania, lecz niektóre z nich są już na ogół dostatecznie "dojrzałe" i zorganizowane, aby je można było zakomunikować innym i poddać -

w kolejnym etapie - ostatecznej "obróbce", tym razem formalnej. Częściowym wynikom towarzyszą zarysowane już idee dotyczące powiązań owych fragmentów w jedną całość (usprawiedliwia to użycie w opisie schematu umownej nazwy "dowód myślowy", która odnosi się do tej całości i oznacza łączny rezultat osiągnięty w fazie I). Faza I może się zatem zamykać w toku lekcji spontanicznym "opowiadaniem" tego, co już uczeń osiągnął w procesie poszukiwania i do czego doszedł. Warto tu zauważyć, że próba relacji słownej z pierwszych pomysłów nasuwających się spontanicznie jest w wielu przypadkach warunkiem sine qua non dalszego postępu.

Przyjęte tu założenie, iż pierwsza swobodna manifestacja rozwiązań częściowych dokonuje się w języku potocznym, jest chyba naturalnym uwzględnieniem uwarunkowań psychologiczno-genetycznych działających wówczas, gdy przeprowadzamy matematyczny dowód z początkującym uczniem. Żądanie od razu do końca sprecyzowanej w języku matematycznym formuły i gorliwe przerywanie myśli ucznia jest pogwałceniem działalności umysłu funkcjonującego spontanicznie. Być może, myśl dojrzałego matematyka funkcjonuje często z udziałem symboli, a jako rezultaty pojawiają się w jej działaniu struktury właściwe dla specyficznego języka matematyki; tych rezultatów nie trzeba już specjalnie "tłumaczyć" na język, w którym powinny być zapisane. Nie ma jednak podstaw, by podobne założenie przyjąć w przypadku kogoś początkującego w dowodzeniu.

Wyeksponowane dwa aspekty: konstrukcji myślowych i języka zostały na schemacie zobrazowane jako jedna całość (w ramach fazy I) przede wszystkim z uwagi na wzajemne ścisłe związki między językiem a myśleniem (Rubinsztejn, 1964). Werbalizacja jest elementem utrwalającym rezultaty czynności myślowych oraz ukierunkowuje myśl. Słowa oraz struktury syntaktyczne stają się w toku poszukiwań operatywnym narzędziem analizy, syntezy, porównywania, abstrahowania i uogólniania. Służą więc podstawowym aktom myślowym i w tym sensie tworzą z nimi całość. Drugim powodem wyeksponowania związku obu komponentów (językowego i konstrukcji myślowych) jest to, że nie zamierzamy analizować bliżej fazy I procesu dowodzenia "od wewnątrz".

Wykryta idea i wstępna propozycja dowodu czyli łączny rezultat wszystkich czynności, które złożyły się na proces dowodzenia aż do momentu zamknięcia fazy I, stanowi punkt wyjścia do kolejnego etapu. Jest nim etap ostatecznego przedstawiania i redagowania zapisu dowodu w języku matematyki (na schemacie etap ten reprezentowany jest symbolicznie przez prostokątny obszar oznaczony jako faza II).

Język matematyki szkolnej używany w zapisie powstaje, najogólniej rzecz biorąc, przez modyfikację języka naturalnego. Polega ona najczęściej na wzbogacaniu słownictwa o takie symbole oraz wyrażenia, które dotąd w języku nie występowały, bądź też na zmianie znaczenia istniejących wyrażeń. Uściślanie szkolnego języka matematyki ma charakter permanentny i w poszczególnych, wyizolowanych fragmentach materiału programowego może sięgać stosunkowo daleko. Gdy idzie o dowodzenie twierdzeń, to wzbogaca się język elementami niewerbalnymi stosując grafy dowodów, drzewa, "filmowy" zapis rozumowania i wykorzystuje tradycyjny rysunek geometryczny w funkcji części składowej szkolnego języka matematycznego. Dodajmy jeszcze, że język używany do redagowania dowodów to język pisany; jako taki obarczony jest cechami mogącymi w określonych sytuacjach kontrastować z elastycznością naturalnych języków mówionych.

Sposób przedstawienia na schemacie niektórych komponentów, etapów oraz czynności w procesie dowodzenia podyktowany został charakterem rozważań i ma z założenia ułatwić skupienie uwagi na zagadnieniach dydaktycznych. Te aspekty i komponenty, które tu rozdzielono, w istocie są często ściśle zespolone. Dokonane rozgraniczenie bądź wyizolowanie nie oznacza przeciwstawiania sobie poszczególnych komponentów, służy jedynie obrazowemu i wstępnemu podkreśleniu złożoności procesu dowodzenia. Schemat nasz ma więc tylko charakter umowny i zakłada wiele uproszczeń. Tak np. rys. 1 może sugerować, że do ostatecznego zapisu przechodzi się dopiero wówczas, gdy idea całego rozwiązania została już wykryta, a przebieg dowodu widoczny jest od początku do końca. Zdarza się oczywiście, że wcześniej odkryty zostanie cały tok rozumowania (bez prób sukcesywnego zapisu), zaś do redakcji zapisu przystępujemy w drugiej kolejności, by się już tylko

tym problemem do końca zajmować. Często jednak redakcja i heurystyczny proces myślowego odkrywania oraz budowania dowodu przeplatają się, gdyż prowadzi się równolegle rozumowanie i zapis częściowych rezultatów. Zatem w tej sytuacji przejście od fazy I do fazy II realizuje się wielokrotnie, a zwrot "dowód myślowy", którym posłużyliśmy się komentując schemat na rys. 1, oznacza aktualnie wypracowany fragment całej konstrukcji, do której dowodzący zmierza.

Dalsze rozważania dotyczyć będą stadium przejścia od fazy I do fazy II, a więc od myślowo ujętego (potocznie sformułowanego), ale już w zasadzie poprawnego i prawie gotowego fragmentu bądź też całości dowodu, do jego ostatecznego zapisu w konsekwentnym języku. Przejście do redagowania dowodu bądź jego fragmentu ujętego w spontanicznej działalności jest postawieniem ucznia wobec nowego problemu, na tyle dlań odrębnego, że wolno je uznać za niezależne zadanie dydaktyczne w organizacji procesu lekcyjnego. Schemat (rys. 1) i dotychczasowy komentarz podkreślają już częściowo ten moment przejścia w całym procesie dowodzenia. Specyfika sytuacji dydaktycznej związanej z tym momentem kształtuje się z jednej strony pod wpływem prawidłowości złożonego procesu dowodzenia charakterystycznych dla fazy I, a z drugiej pod wpływem z góry narzuconych wymagań, którym należy sprostać redagując dowód w końcowej fazie II.

Skuteczność oddziaływań dydaktycznych w ramach nauki poprawnego uzasadniania oraz logicznego argumentowania zależy m.in. od tego, czy w organizacji procesu dostrzeżono i potraktowano z należytą uwagą moment przejścia od fazy I do II. Świadomość tych etapów i znajomość specyfiki każdego z nich może np. pomóc we właściwej ocenie trudności i trafnej lokalizacji zródeł błędów uczniowskich w procesie dowodzenia. Dana trudność pojawia się bowiem często w momencie nie zdradzającym jej faktycznego pochodzenia. Zewnętrzne symptomy trudności są nieraz podobne, choć same te trudności mogą mieć inną naturę. Również bardzo zbliżone do siebie oraz podobne błędy biorą często swój początek w zupełnie odrębnych czasowo i strukturalnie fazach procesu dowodzenia. Wyodrębnienie obu faz na drodze analizy dydaktycznej oraz rozpatrzenie specyfiki każdej z nich może więc dać pewną

orientację przy podejmowaniu decyzji dotyczących kierunków postępowania dydaktycznego.

Analizując tok procesu dowodzenia obejmujący fazy I i II będziemy w dalszej części artykułu zmierzać do ukazania zasadności twierdzenia dotyczącego odrębnej (z punktu widzenia dydaktyki) natury obu tych faz. Pokrewne argumenty ukazujące specyfikę każdej z nich zostaną pogrupowane i przedstawione w kolejnych punktach. Dalsze rozważania nie zawierają natomiast prób oraz propozycji rozwiązań praktycznych i szerszej ich analizy dydaktycznej, ani też argumentacji dotyczących potrzeby i walorów redagowania przez uczniów znalezionych już dowodów; są to odrębne zagadnienia. Warto jedynie wspomnieć o różnicy między zapisem dopuszczalnym na tablicy, gdy jest jeszcze obszerny komentarz słowny (uczniowie przenoszą ten zapis - już oczywiście bez komentarza i całego kontekstu - do zeszytów, gdzie staje się on często niekompletny i w związku z tym nieraz nawet nieużyteczny) a zapisem typu podręcznikowego, który jest zgodny z ostatecznym zamierzeniem autora, i w tym sensie jest także pełny i kompletny. Mówiąc tu o zapisie dowodu mamy zawsze na uwadze typ zbliżony do podręcznikowego.

2. SPECYFIKA PRZEJŚCIA OD FAZY POSZUKIWAŃ DO STADIUM REDAGOWANIA DOWODU

2.1. Heurystyczny proces odkrywania a paradygmat przedstawiania wyników

Rozpoczniemy od stwierdzenia, że w ramach każdej dyscypliny istnieje określona metodologia poszukiwania, badania i odkrywania, a także paradygmat przedstawiania wyników badań. Ma to swój walor nie tylko w odniesieniu do poważnej działalności naukowej, ale również - przy uwzględnieniu odpowiedniej skali - odnosi się do pracy ucznia, jeśli stworzono mu warunki sprzyjające prawdziwej aktywności i samodzielnym twórczym poszukiwaniom.

Wbrew pozorom można mówić o pewnych normach postępowania, które znajdują zastosowanie w fazie poszukiwania dowodu. Charakteryzują one postawy użyteczne w stadium poprzedzającym jego

ostateczną redakcję w języku matematyki. Inna rzecz, czy bywają one do końca uświadomione i czy nauczanie w drodze racjonalnych zabiegów przyczynia się do ich świadomego wydobycia i sformułowania na dalszy użytek uczniów. G.Polya objął je wspólną nazwą reguł nowoczesnej heurystyki, mimo że są oczywiście pozbawione niezawodności algorytmów oraz ścisłości przysługującej regułom matematycznym.

Logiczne i matematyczne reguły przedstawiania wyników (konstruowania zapisu dowodu) w przeciwieństwie do reguł heurystycznych odkrywania oraz wstępnego formułowania zostały skodyfikowane. Więcej, z częścią owych zasad uczeń zapoznaje się wprost, zarówno od strony ich opisowej charakterystyki, jak i praktycznie, wzorując się w redakcji na tekstach podręczników i postępowaniu nauczyciela.

Ale nawet bez wnikania w to, czy reguły obu rodzajów zostały wyraźnie sformułowane czy też nie, różnica między sposobem działania na etapie odkrywania i badania a postępowaniem w stadium przedstawiania wyników jest dostatecznie widoczna. Fakt ten stanowi jeden z argumentów pozwalających wyodrębnić fazy I i II, obligując do zwrócenia właściwej uwagi na przejście od jednej do drugiej w procesie dydaktycznym. Prostym przykładem ilustrującym różne metody szkolne jest stosowana w odpowiedniej formie redukcja jako metoda odkrywania i dedukcja rozumiana jako metoda prezentowania wyników. Przy tym w odkrywaniu i myślowym konstruowaniu dowodu uczeń nie tylko może zaczynać od końcowej tezy poszukując dla niej racji. Nie zawsze bowiem regresywne postępowanie wiedzie myśl najkrótszą drogą do założeń tak, że w następnej fazie II wystarczy ten kierunek odwrócić, by uzyskać schemat, na gruncie którego zbuduje się zapis dowodu. W fazie I robi się często skoki, atakuje jakiś fragment lub częściowy problem z różnych stron, nie mając jeszcze pełnej świadomości jego znaczenia w całej konstrukcji; zakłada się dodatkowe warunki, odłożywszy na później szczegółowe zbadanie ich związków z warunkami wyjściowymi itp. Przeplatają się różne typy rozumowania, niektóre partie ujęte są ściślej, inne na wpół intuicyjnie. Zresztą - jak się wydaje - styl pracy różnych osób cechuje właściwy tylko dla nich sposób wyboru dróg i kierunków. Zespół rysujących

się możliwości atakowania problemu może być zatem w indywidualnych przypadkach wyposażony w różne relacje preferencji. Natomiast ogólne zasady redagowania dowodu w zwięzłej formie pisanej są w zasadzie ustalone i dość jednolite. Dyktują one do pewnego stopnia jednolity styl pracy. Pewne ujęcia, rodzaje wyrażeń i sekwencje dotychczasowej konstrukcji myślowej mają tu wyraźny priorytet, a często wręcz wykluczają inne. Odmienność tych dwóch faz sprawia, że układ warunków i argumentów wykorzystanych w konstrukcji zarysowanej na koniec fazy I musi ulec często przewartościowaniu, a cała konstrukcja gruntownemu przegrupowaniu w końcowej fazie II.

2.2. Obserwacja własnych konstrukcji myślowych

Przejście od fazy I do fazy II wymaga pewnego rodzaju samoobserwacji własnych konstrukcji myślowych. Zapis dowodu jest bowiem aktem zdawania sprawy z działalności własnego umysłu. Ta samoobserwacja jest jednak czynnością innego rodzaju niż introspekcja w psychologicznym ujęciu. Nie chodzi wszak o to, by występując w roli eksperymentatora śledzić okoliczności odkrywania, powstawania pomysłów rozwiązań i badać mechanizm funkcjonowania ośrodków własnych przeżyć psychicznych. Idzie natomiast o zdolność do obserwacji toku własnej działalności uzasadniającej, czyli formalnej strony myślenia. Śledzić więc należy - pomijając psychiczne uwarunkowania aktów myślowych - pojawianie się struktur i schematów logicznych. Nawykowe i bezrefleksyjne stosowanie reguł wnioskowania, nabyte i utrwalone w codziennej praktyce językowej, z pewnością nie ułatwia tego zadania. Ponadto wielu rozumowaniom przeprowadzanym na poziomie szkolnym towarzyszy poczucie oczywistości. Zbytnia poglądowość i oczywistość demobilizują ucznia w kontroli przebiegu argumentacji; jeszcze mniej może on dbać wówczas o wewnętrzny wgląd w swoją działalność. W takich sytuacjach powodzenie w konstrukcji zapisu dowodu jest tym bardziej uzależnione od umiejętności czy też zdolności do wnikliwej samoobserwacji toku myśli. Być może, przyswojenie takiej umiejętności wymaga ćwiczenia i następuje w drodze treningu polegającego na wymianie doświadczeń i porównywaniu relacji innych z własnym przeżyciem myślowym oraz instruktażem nauczyciel

Pewną rolę odgrywają tu zapewne mechanizmy pamięci pozwalające rejestrować logiczne następstwo operacji myślowych i zachować je aż do momentu, gdy wypadnie całą konstrukcję poddać weryfikacji i utrwalić w odpowiedniej formule zapisu.

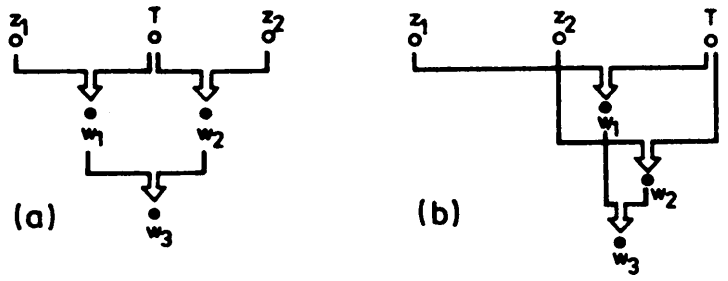
Samoobserwacja, której znaczenie dla właściwego przebiegu fazy II chcemy podkreślić, łączy się w gruncie rzeczy z retrospekcją. Polega bowiem również i na tym, że dowodzący przechodząc do zapisu odtwarza tok myślenia zarejestrowany w pamięci.

2.3. Następstwo formuł a wynikanie

Różnica między następstwem a wynikaniem ma szerszy aspekt dydaktyczny; dalej poruszymy tylko niektóre kwestie związane z analizowanym tematem. Następstwo poszczególnych elementów w myślowym formowaniu się dowodu i swobodnym modelowaniu słownych wypowiedzi jest przede wszystkim następstwem w czasie. Wydaje się, że uczniowi w tym stadium (faza I) łatwiej dostrzegać następstwo większych, kontrastujących ze sobą sekwencji postępowania dowodowego, zapewne mających jakieś szczególne znamiona, nie zawsze dalej istotne. Natomiast bardziej elementarne ogniwa dowodu i poszczególne fakty pojawiają się w wartkim nurcie myśli jak gdyby jednocześnie.

Z chwilą, gdy uczeń przeszedł do fazy II i zapisuje dowód, następstwo zyskuje bardzo poglądową realizację. W tej fazie automatycznie narzuca się przede wszystkim zwykła kolejność, w jakiej poszczególne elementy kompozycyjne zapisano na płaszczyźnie kartki lub tablicy. Elementarne ogniwa zjawiające się w myślowym działaniu powinny tu być rozdzielone, co może przedstawiać nową trudność. Potwierdzeniem jest następujący przykład z lekcji (treść związaną z przykładem możemy tu pominąć, przytaczając dla uproszczenia jedynie wierny schemat logiczny dowodu w zapisie strzałkowym - rys. 2a).

W górnej partii schematu na rys. 2a figurują dwa elementarne ogniwa (prowadzące kolejno do wniosków w_1 i w_2), które w fazie I uczeń, ze względu na podobieństwo założeń z_1 i z_2 oraz możliwość wykorzystania tego samego twierdzenia T, wykonał niejako jednocześnie. Uwagę skupił przy tym - jak się wydaje



Rys. 2

- na pierwszym ogniwie. W jego utrwaleniu mogła mu pomóc naturalna relacja słowna, w której zdawał sprawę z przebiegu pierwszej operacji, nazywając obiekty i wypowiadając głośno założenie z_1, twierdzenie pomocnicze T oraz wniosek w_1. Przelotny gest wskazywał, że uczeń jest do pewnego stopnia świadom również drugiego analogicznego ogniwa. Tymczasem samodzielne próby zbudowania zapisu kończyły się stale niepowodzeniem. Postawa ucznia wskazywała, że główną przyczyną kolejnych porażek była tu nieumiejętność wyizolowania drugiego ogniwa oraz nieporadność w graficznym usytuowaniu go na schemacie budowanym jako zapis dowodu.

Odzwierciedlenie elementarnych ogniw dowodu w strzałkowym zapisie może być takie, jak wskazują rysunki 2a i 2b, lub jeszcze inne. Choć oba grafy są poprawne (ze względu na tok rozumowania przeprowadzonego na lekcji), pierwszy wydaje się bardziej przejrzysty. Dodatkowo oddaje równorzędność oraz wzajemną niezależność pierwszych dwóch ogniw dowodu. Ta kompozycja, gdy pochodzi od ucznia, zapewne świadczy o dobrym przeglądzie sytuacji i umiejętności adekwatnego wyrażania w zapisie zarówno logicznej struktury procesu dowodzenia, jak i innych jeszcze cech strukturalnych rozważanej konstrukcji czy też problemu. Przykład ten wskazuje również, że przejście do zapisu może nasuwać pewne nowe dla ucznia problemy w zakresie przestrzennego rozplanowania graficznych środków wyrazu myśli. Jaskrawość występowania tych problemów uzależniona jest od przygotowania ucznia, formy zapisu dowodu, którą w rozwiązywaniu dydaktycznym wybrano, i innych jeszcze okoliczności.

Analizując sposoby graficznego odzwierciedlania elementarnych ogniw dowodu można mówić także o następstwie mniejszych jednostek kompozycyjnych: wyrażeń (założenia, twierdzenia pomocnicze, wnioski pośrednie, teza). Odpowiadające im znaki graficzne lub najczęściej same te wyrażenia rozmieszczone są w płaszczyźnie kartki na różnych poziomach. Jeśli np. punkt reprezentujący wniosek w_2 leży poniżej punktu oznaczającego w_1, to w potocznym odczuciu w_2 następuje po w_1; jeśli oba leżą na tym samym poziomie, wnioski traktuje się równorzędnie. W tym znaczeniu diagramy tego samego dowodu przedstawione na rysunku 2 prezentują różne następstwa wyrażeń.

Wniosek w_2 następuje po w_1 (rys. 2b), ale z niego nie wynika. Stosunek wynikania oznaczony za pomocą strzałki prowadzić może zatem do innego uszeregowania niż zwykłe uszeregowanie wyrażeń w obrębie schematu tożsame z ich graficznym i przestrzennym następstwem na płaszczyźnie kartki scharakteryzowanym powyżej. Przechodząc do redakcji dowodu należy się liczyć z możliwością pomieszania przez uczniów porządku logicznego ze zwykłym następstwem pojedynczych wyrażeń na płaszczyźnie kartki. Bywa tak nawet wówczas, gdy związek logiczny został pierwotnie dostrzeżony i wstępnie ujęty myślowo. Pewne rodzaje notacji, np. skrótowa wersja dowodu w postaci ciągu wyrażeń wypisanych jedno pod drugim bez żadnego komentarza, mogą - przy braku należytej kontroli - stanowić okoliczność sprzyjającą kształtowaniu się fałszywego obrazu dedukcji.

2.4. Wyizolowanie struktury logicznej

Proces dowodzenia odznacza się bogactwem form rozumowania i działań. Występuje tu m.in. indukcja empiryczna, uogólnianie i specyfikacja, analogia; poszczególnym krokom towarzyszy często poczucie oczywistości. Niejednokrotnie zdania wypowiadane w fazie I mają swój statut głęboko pierwotnie związany z różnymi typami rozumowań - nie tylko z wnioskowaniem dedukcyjnym. Ma ono wprawdzie programowo zastąpić inne typy w miarę dopracowywania konstrukcji, ale nie jest tak od początku, kiedy to np. intuicja, a nawet nieraz potoczne znaczenie wyrażeń języka naturalnego mogą kierować wyborem dróg.

Przechodząc do redagowania dowodu uczeń musi w tej zróżnicowanej kompozycji myślowej wyizolować jeden istotny dalej aspekt; na całość należy spojrzeć z jednego tylko punktu widzenia. Zachować trzeba mianowicie jej formalno-logiczne i strukturalne własności oraz na nich przede wszystkim oprzeć zasadę konstruowania zapisu. Redagując dowód należy przede wszystkim dać wyraz tym aspektom, które podkreślają jego logiczną i dedukcyjną strukturę. Jest to kolejny argument wskazujący na specyfikę przejścia od fazy I do II.

Zapis wymaga niejako "oddzielenia" elementów logicznych od innych (np. od treści poglądowych zawartych w zdaniach będących komponentami dowodu). Chodzi tu o dostrzeżenie obu tych stron (struktura logiczna i treści wypełniające schemat) w materiale prawie już gotowym do zredagowania. Uczeń, który wyraża w zapisie izolowane zdania (tzw. tezy pośrednie, pojawiające się tam głównie za sprawą ich interpretacji "treściowej"), a nie redaguje wypowiedzi inferencyjnych, nie poczynił tego typu spostrzeżeń (por. analizę przedstawioną w pracy B.Noweckiego, 1970). Obie wspomniane strony są ściśle powiązane, a naturalny tok procesu myślowego mniej różnicuje pod tym względem materiał, do którego dowodzący w fazie I dochodzi, aniżeli jest to konieczne w trakcie redagowania wyników.

2.5. Selekcja i klasyfikacja

Wyniki, do których uczeń doszedł i materiał, jaki w fazie I zgromadził, trzeba na ogół poddać selekcji i klasyfikacji. Dzieje się tak nawet wówczas, gdy to, co się dotąd uzyskało, jest od początku do końca poprawne. Często bowiem poszczególne fragmenty wstępnego rozwiązania - choć nawet nie budzą merytorycznych zastrzeżeń - należy ze względu na zweryfikowaną koncepcję całości znacznie zredukować lub nawet pominąć. Konieczność wyboru może być podyktowana różnymi względami, m.in. założeniem co do rodzaju zapisu i stopnia formalizacji dowodu (nie zawsze względy, którymi kieruje się tu nauczyciel, bywają wyjaśniane uczniom). Spotkać można oczywiście wiele dowodów, przy których tok postępowania nosi pewne cechy mechanicznego rachunku czy też algorytmu

i wymaga mniejszej aktywności w omawianym zakresie. Wówczas materiał zgromadzony w fazie I bywa w całości wykorzystany przy redagowaniu. Co więcej, może być spożytkowany wprost, bez specjalnej reorganizacji, gdyż zarówno on sam, jak i jego "otoczka" (to, co się z nim intuicyjnie kojarzy, treść, stosunki w modelu, ilość możliwych ujęć itp.) są stosunkowo ubogie. Takimi bywają nieraz dowody z arytmetyki i algebry szkolnej. Jeśli uzasadnienie tezy wymaga mechanicznego zastosowania paru reguł rachunkowych, tak jak choćby w przypadku wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, wtedy problem selekcji prawie całkiem nie istnieje.

Jest obok selekcji i inny problem, mający niejako przeciwny punkt wyjścia. Redagowanie dowodu wymaga nieraz rozwinięcia takich fragmentów, które w fazie I mogły być z różnych względów niemal pominięte. Aby otrzymać rezultat o cechach domkniętej całości i pełnej równowadze, trzeba zapis w określonych fragmentach uzupełnić.

Przejście do fazy II łączy się również z klasyfikacją. Najprostszym jej przykładem jest grupowanie według następującego schematu: założenia, wykorzystane definicje, twierdzenia i aksjomaty, wnioski pośrednie, teza. Przydatność, a może nieraz nawet konieczność takiego podziału, łatwo zauważyć: wystarczy spojrzeć na dobrze skomponowany zapis dowodu w postaci diagramu, grafu lub drzewa. Nie mógłby on z pominięciem takiej klasyfikacji powstać. Oprócz wymienionej, są jeszcze inne płaszczyzny i kryteria selekcji; niektóre zostaną zasygnalizowane w następnym punkcie.

2.6. Wprowadzanie symboliki

Komponowanie zapisu znalezionego przez siebie dowodu wymaga dość często ustalenia i wprowadzenia odpowiedniej symboliki. Czynność ta nierzadko znika z pola widzenia w kontekście podstawowych operacji dowodowych, a w szkole bywa traktowana jako zabieg towarzyszący o charakterze czysto "technicznym". W gruncie rzeczy jednak problem, wobec którego staje uczeń, jest bardziej złożony niż mogłoby to wynikać z powierzchownej obserwacji. Łatwo tu bowiem o utożsamienie głębiej sięgającego procesu wyboru i wpro-

wadzania symboliki z jego stroną zewnętrzną - aktem użycia symbolu w zapisie. Doświadczony matematyk redagując dowód wprowadza symbole raczej automatycznie; wobec opanowania i nawet zmechanizowania pewnych czynności "warsztatowych", kwestia wprowadzania symboliki na etapie zapisu wówczas prawie całkiem nie istnieje. Sytuacja początkujących w dowodzeniu nie pozwala na takie uproszczenia. Również w tym, na pozór peryferyjnym, rejonie może tkwić niejedno źródło trudności uczniów. Pojawią się one z reguły przy innej okazji lub w takiej formie zewnętrznej, że ich źródeł będzie już trudno dostrzec.

Spróbujmy zanalizować nieco bliżej niektóre kwestie dotyczące nazw i symboli, wychodząc od przypadku, w którym poszukiwaniom dowodu towarzyszy rysunek. Odpowiedniki obiektów matematycznych mają na rysunku wiele własności nieistotnych ze względu na główny cel badania. Przysługujące im drugorzędne cechy (takie jak np. wielkość, usytuowanie itp.) wykorzystuje się jednak przy tworzeniu tymczasowych, zastępczych nazw badanych przedmiotów. Nazywanie i odróżnianie obiektów w czasie obserwacji rysunku może się odbywać różnymi sposobami. Czasem akt wskazania na odpowiedni element graficzny zastępuje już nazwę obiektu. Tak np. uczeń poszukujący dowodu w fazie I nie używając specjalnych oznaczeń symbolicznych może operować takimi oto skrótami: "ta prosta", "to otoczenie leży wewnątrz tego trójkąta", "ten punkt", "to, co otrzymam", "dłuższy odcinek", "okrąg po prawej stronie" etc. Co więcej, jest to bardzo wygodne w szybkim toku myśli skojarzonej z rysunkiem. Urobione w ten sposób nazwy zastępcze i wyrażenia okazjonalne będą musiały ustąpić później miejsca specjalnym symbolom nazwowym, aczkolwiek do pewnego momentu mogą łącznie z rysunkiem funkcjonować z dużą skutecznością. Tak więc rysunek, jako model spełniający wiele funkcji w procesie rozwiązywania zadań, spełnia także i tę specyficzną rolę.

Nie tylko zresztą konkretny rysunek występuje w tej specyficznej roli. Podobne funkcje mogą spełniać wyobrażenia. Swoiste modele budowane w wyobraźni często nawiązują tylko do niektórych stosunków modelu rzeczywistego lub są wytwórczymi kombinacjami utrwalonych niegdyś spostrzeżeń. Towarzysząc myśli w procesie dowodzenia, obrazy służą upoglądowieniu i pozwalają na

osiągnięcie końcowej syntezy poszczególnych etapów. Sprzyjają one przede wszystkim chwilowej stabilizacji myśli. Obecność takich obrazów w danym stadium poszukiwania dowodu pozwala operatywnie, bez konsekwentnego wprowadzania symboliki i odwoływania się do pełnych nazw, przeprowadzić myślowe badanie. Symbole zostaną wprowadzone później, na etapie redagowania wyników.

Naszkicujmy dla przykładu wstępną wersję dowodu twierdzenia głoszącego, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, próbując odtworzyć przypuszczalny obraz towarzyszący rozumowaniom (por. także analizę przeprowadzoną przez J.Hadamarda, 1964,str.76). Analogia do opisanej wcześniej specyficznej roli rysunku geometrycznego jest tutaj dostatecznie widoczna.

Aby przeprowadzić dowód, zakłada się, że liczb takich jest skończona ilość, oraz że wypisano je wszystkie. (Tu dowodzący - w zależności już chyba od indywidualnego stylu pracy umysłu - może wyobrazić sobie np. rodzaj wstęgi bądź półoś liczbową; na jej początkowym odcinku rozmieszczone są w pewnych odstępach przedmioty - punkty odpowiadające kolejnym liczbom pierwszym aż do największej. W dostatecznie dużej odległości usytuowany jest punkt - obiekt, który symbolizuje ich iloczyn, a jeszcze krok dalej - punkt odpowiadający liczbie o jeden większej od tego iloczynu). Iloczyn tych liczb zwiększony o jeden ma dzielnik pierwszy. Nie może nim być żadna z wypisanych liczb pierwszych. (W pomyślanym modelu wyobrażeniowym należy dla niego zarezerwować miejsce gdzieś między punktem oznaczającym ostatnią w szeregu wypisanych liczb pierwszych a końcowym punktem, który reprezentuje ich iloczyn zwiększony o jeden; może to być także owa suma iloczynu i jedności). Otrzymujemy - wbrew założeniu - nową liczbę pierwszą.

A oto jeszcze jeden przykład wykraczający zdecydowanie tym razem poza materiał szkolny. Przytoczymy go jednak, gdyż uzupełnia obserwacje poczynione w związku z poprzednimi przykładami, a jednocześnie świadczy o tym, że sygnalizowane tu problemy są aktualne niezależnie od poziomu nauczania-uczenia się. Osnowę przykładu stanowią fragmenty bezpośredniej relacji osoby (studiującej matematykę), która dokonuje pierwszych prób rozwiązania zadania. Opis poszukiwań doprowadzony zostanie jedynie do

momentu pojawienia się elementów obrazowych. Ocena przedstawionych prób, dalsze poszukiwania, zmiany i uściślanie propozycji oraz ostateczny kształt rozwiązania nie będą nas tutaj interesować. Zadanie jest następujące:

> Niech $A \in K_n^n$ i spełnia warunek $a_i^j = 0$ dla $j \geq i$. Udowodnić, że A^n jest macierzą zerową (K_n^n jest zbiorem macierzy stopnia n o elementach z ciała K, a_i^j oznacza element j-tego wiersza oraz i-tej kolumny).

Po szczegółowym przedstawieniu macierzy A dowodzący wiąże macierze ze zbioru K_n^n z transformacjami liniowymi n-wymiarowej przestrzeni wektorowej U nad ciałem K w siebie. Problem dotyczący macierzy zostaje więc niejako zastąpiony zadaniem o homomorfizmach przestrzeni wektorowych. Zabieg ten na (bardziej zaawansowanym) poziomie osoby, która problem rozwiązuje, może być potraktowany jako przykład innego spojrzenia na obiekty w zadaniu, niedosłownego odczytania danych, a więc wstępnego przetwarzania informacji[1]. U podstaw tego zabiegu leży myślenie, które nieraz w charakterystyce typowych dla działalności matematycznej sposobów postępowania bywa nazywane "myśleniem przez izomorfizm".

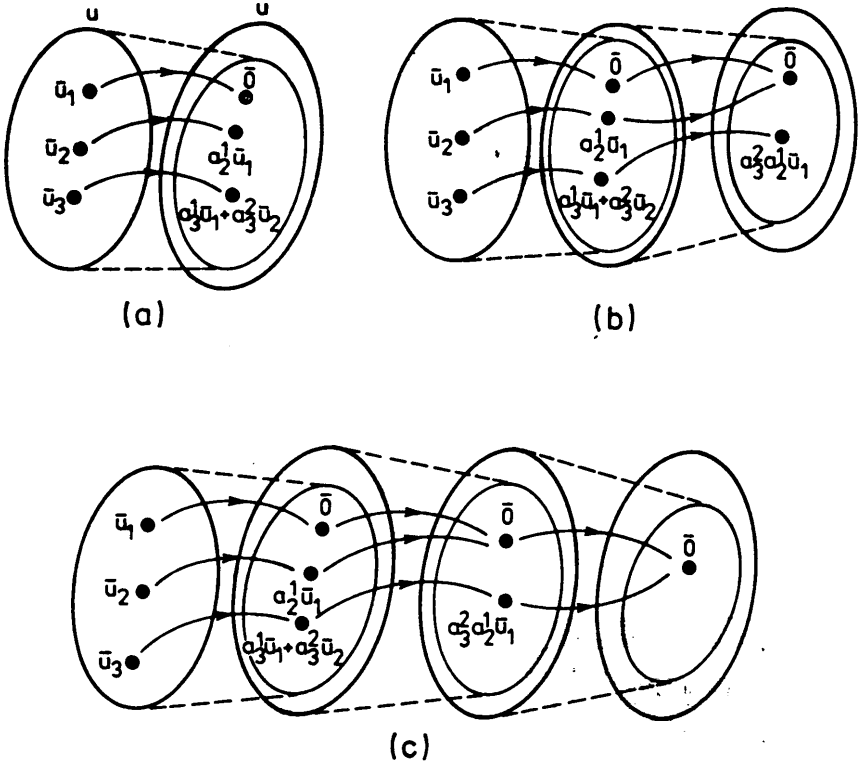
Załóżmy, idąc za myślą dowodzącego, że $T : U \to U$ jest transformacją określoną przez macierz $A \in K_n^n$ przy ustalonej w U bazie $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$. Wówczas:

---

[1] Najogólniej biorąc, przetwarzanie informacji jest czynnością przygotowawczą, pomocniczą, często prawie już zautomatyzowaną, kontrastującą z widocznymi dobrze i pierwszoplanowymi działaniami w procesie dowodzenia, jak np. korzystanie z pomocniczego twierdzenia (Konior, 1975, str. 134-140 i 145). Tego rodzaju czynności są charakterystyczne dla fazy I poszukiwań i występują w najprostszych postaciach na różnych poziomach szkolnych. Niejednokrotnie wykonanie tych właśnie czynności sprawia mniej zaawansowanym uczniom więcej kłopotów niż przygotowane już główne kroki dowodu.

$$
\begin{aligned}
T(\bar{u}_1) &= 0\cdot\bar{u}_1 + 0\cdot\bar{u}_2 + \ldots + 0\cdot\bar{u}_n ,\\
T(\bar{u}_2) &= a_2^1\bar{u}_1 + 0\cdot\bar{u}_2 + \ldots + 0\cdot\bar{u}_n ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
T(\bar{u}_n) &= a_n^1\bar{u}_1 + a_n^2\bar{u}_2 + \ldots + 0\cdot\bar{u}_n ,
\end{aligned}
\qquad
A = \begin{vmatrix} 0 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ 0 & 0 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}
$$

W tym stadium poszukiwań został zbudowany obrazowy model towarzyszący działaniom myślowym. Na początku było nim po prostu wyobrażenie schematu Venna; schemat ten reprezentował przestrzeń U, przy czym dla przejrzystości obrazu U powtarzał się dwukrotnie (ilustruje to rys. 3a; dowodzący niczego jednak nie pisał ani nie rysował, a prezentowane tu rysunki odtworzył w czasie późniejszym, oznaczenia elementów oraz strzałki przedstawione na rysunkach są jedynie wyrazem oraz ilustracją rozumowań przeprowadzonych bez notacji).



Rys. 3

W drugim kroku pierwotny model wyobrażeniowy został rozbudowany i uzyskał postać przypominającą rys. 3b (etap badania iloczynu $TT = T^2$); rys. 3c jest natomiast odpowiednikiem obrazu myślowego w następnym etapie (analiza iloczynu $TTT = T^3$). Powstający sukcesywnie model pozwolił obserwować jak funkcjonuje złożenie transformacji; za każdym razem kolejny wektor bazowy przechodzi w wektor zerowy $\bar{0}$. W pierwszym kroku $\bar{u}_1$ przechodzi w $\bar{0}$, za drugim razem $T^2(\bar{u}_2) = \bar{0}$ (oczywiście jest również $T^2(\bar{u}_1) = T(\bar{0}) = \bar{0}$), za trzecim $T^3(\bar{u}_3) = \bar{0}$ itd. Po n krokach uzyska się związek $T^n(\bar{u}_i) = \bar{0}$ i odpowiednia macierz będzie macierzą zerową.

Obrazy, których specyficzna rola w fazie I została zilustrowana na przykładach, mogą oczywiście nadal istnieć podczas redagowania dowodu. Jednak pełny obraz stojący do dyspozycji również w fazie II nie znajduje graficznego odzwierciedlenia w zapisie. Język, do którego przechodzimy, stawia już inne wymagania i wyklucza dotąd praktykowane sposoby działań. Element poglądowy (modele wyobrażeniowe, obrazowe nazwy zastępcze), dotąd funkcjonujący z taką skutecznością, należy w fazie II wyeliminować, wprowadzając w to miejsce symbole bądź zespoły symboli o określonej strukturze syntaktycznej.

Przechodząc do fazy II uczeń w szkole staje przed dodatkowym problemem, nierzadko dlań złożonym. Przede wszystkim pewne novum może stanowić już choćby to, iż w ogóle trzeba wprowadzić jakieś symbole. Jeśli świadomość tego zadania stanie się dostatecznie pełna, zjawia się następne. Symbole należy dobrać nieprzypadkowo i poklasyfikować nieraz według kilku kryteriów jednocześnie. Muszą one bowiem pełnić różne funkcje, zarówno jako indywidualne znaki graficzne jak i w trafnie dobranych podzespołach. Tak np. obiekty, o których mowa w założeniu, warto niekiedy (jako dane) oznaczyć inaczej niż pozostałe wielkości (szukane). Niezależnie od tego trzeba uświadomić sobie jeszcze raz znaczenie każdego wyrażenia o charakterze nazwowym i w jakiś sposób zaznaczyć jego przynależność do tej lub innej grupy wyrażeń (punkty np. oznacza się w geometrii dużymi literami łacińskimi, proste - małymi literami, płaszczyzny - małymi literami alfabetu greckiego; niekiedy dla ułatwienia bywają w użyciu

jeszcze dodatkowo wyrazy interpretujące symbole, np. "punkt A", "prosta a", "płaszczyzna α"). Zachodzi też nieraz konieczność nadania odpowiedniego kształtu zmiennym związanym kwantyfikatorami szczegółowymi, o ile się kwantyfikatorów nie użyło explicite. Ogół tych problemów należy przy tym rozwiązać jednolicie dla całego zapisu tak, aby podporządkować funkcjonowanie symboliki głównej idei dowodu wcześniej zarysowanej, aby ją również przez symbolikę dodatkowo podkreślić.

Nie tylko te względy decydują o całości poczynań; korelacja musi sięgać dalej, poza ramy budowanego zapisu. Symbole zharmonizować trzeba także z językiem twierdzeń pomocniczych, które w toku redagowania dowodu wykorzystujemy w pełnym brzmieniu i bez uproszczeń. Przyjęte bowiem dawniej brzmienie i utrwalone w użyciu sformułowanie twierdzenia pomocniczego dyktują na ogół określone wymagania pod adresem ustalanej aktualnie symboliki.

2.7. Ocena własnych propozycji

Specyfika fazy II polega również i na tym, że uczeń z jednej strony przedstawia własny wynik (gdy redaguje swoją myśl), a z drugiej powinien się stać od razu krytycznym odbiorcą (gdy kontroluje adekwatność zapisu do myśli). W fazie I przeważa inny typ postępowania: wytwarzanie pomysłów, luźne sformułowania na "własny użytek", sprawdzanie, do czego pośrednie wyniki mogłyby się przydać. Krytyczna postawa wobec rezultatów jest oczywiście potrzebna od początku, lecz w stadium myślowego poszukiwania ocenie podlega raczej merytoryczna poprawność wyników niż względnie swobodny sposób ich sformułowania. Przedmiotem oceny w czasie zapisu musi być jedno i drugie, a przede wszystkim to, czy zapis adekwatnie wyraża zweryfikowany merytorycznie wynik myślowy.

Na etapie zapisu dowodu realizuje się w czasie lekcji psychologiczny proces "uwewnętrzniania" dialogu między uczniem-autorem a nauczycielem i pozostałymi uczniami. Zewnętrzny dialog w toku doskonalenia kolejnych wersji poszczególnych fragmentów zapisu interioryzuje się, autor stopniowo zaczyna oceniać krytycznie własne propozycje; "świadomość ucznia ulega jakby rozdwojeniu, sam uczeń zmienia kilkakrotnie stanowisko w toku pracy: z opisującego przekształca się w odczytującego, sam siebie kont-

roluje i krytykuje" (Krygowska, 1977, str. 100). Ten proces pojawiający się w końcowej fazie dowodzenia winien być przedmiotem stałej uwagi nauczyciela w czasie lekcji. Charakterystykę mechanizmu tego procesu oraz analizę zagadnień języka matematyki w nauczaniu obejmującą także problematykę zapisu dowodu przeprowadza Z.Krygowska w cytowanej pozycji (Krygowska, 1977).

W konfrontacji tego, co zostało zapisane, z tym, co chciało się wyrazić, dochodzi pewien ważny element, nieobecny jeszcze w stadium poszukiwania. Jest nim (mowa tu o nietradycyjnych sposobach notacji) konwencja danego zapisu, którą należy odróżnić od powszechnie w matematyce przyjętych umów dotyczących oznaczania i symboli. Wybierając określoną formę zapisu przestrzegać trzeba konwencji generalnej, odnoszącej się do całości, jak też i zasad "lokalnych", określających sposoby przedstawiania pomniejszych szczegółów. Te ostatnie zasady mogą być stosowane niezależnie od tego, jakie są ogólne konwencje i założenia budowy danego zapisu. Dzięki właściwie dobranym konwencjom można w zapisie dowodu łatwiej wyrazić analogie, symetrie, korzystanie z założeń pomocniczych, relację wynikania, podrzędność przypadków itp. (por. pozycję Turnau, 1970, poświęconą dydaktycznej analizie walorów dwuwymiarowych wykresów dowodów).

3. UZUPEŁNIENIA I UWAGI KOŃCOWE

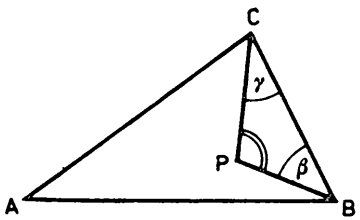
Podejmując próbę ukazania specyfiki przejścia od dowodu myślowego do jego ostatecznego zapisu rozważyliśmy tylko nieliczne aspekty skomplikowanego procesu. Jego rzeczywisty obraz i przebieg są o wiele bardziej złożone. Jeśli prowadzi się jednocześnie poszukiwanie dowodu i zapis (ostateczne redagowanie) częściowych rezultatów, to nie można np. pominąć roli sprzężenia zwrotnego między fazą I a II, dokładniej: między kolejnymi wersjami poszczególnych fragmentów ostatecznego zapisu w języku matematyki z jednej strony a konstrukcją myślową i kierunkiem poszukiwań z drugiej.

Ale prócz pełnej ostatecznej redakcji "na czysto" w różnych stadiach dowodzenia występuje również zapis ad hoc (w na-

szych rozważaniach zupełnie pominięty). Doraźny, fragmentaryczny zapis prowadzony na prawach brulionu, a więc bez pretensji do wysublimowanej ścisłości i jakby "nieoficjalnie", jest ważnym elementem towarzyszącym poszukiwaniom w fazie I i często wprost decyduje o kierunku przebiegu dowodzenia. Odręczna notatka może spełniać różne funkcje w toku poszukiwań. W swej podstawowej roli służy ustaleniu uwagi na wybranym przedmiocie rozważań, stabilizuje myśl; utrwala również osiągnięte już częściowo wyniki. Inną funkcję spełnia doraźny zapis, gdy występuje jako rachunek. Zdarza się bowiem, że pewne fragmenty rozumowań wymagają formalnego "przeliczenia" i sprawdzenia szczegółów; w zapisie dowodu można będzie już wtedy opuścić łatwiejsze lecz uciążliwe przejścia, wskazując jedynie główne przesłanki. Luźne notatki sporządzone w dość odległych momentach procesu poszukiwania ułatwiają także powiązanie fragmentarycznych wątków rozumowania. Rzut oka na zanotowany wcześniej wzór, na porzucony związek, daje w kontekście nagromadzonych od tego czasu przemyśleń nowy impuls, często decydujący. Bez odręcznej notatki zrobionej wcześniej i będącej niejako śladem umożliwiającym powrót, odszukanie rozpoczętych wątków i właściwych dróg byłoby o wiele bardziej żmudne.

Akt sporządzania odręcznej notatki może stanowić również okoliczność prowadzącą wprost do właściwej idei rozwiązania problemu. Ilustruje to następująca obserwacja (w pierwszej części dalszej relacji przytoczono dla kontrastu przypadek, w którym odkrycie idei dowodu nastąpiło bez interwencji pomocniczego zapisu). Dwóch uczniów równoległych klas rozwiązuje zadanie:

Udowodnij, że jeśli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC, to $|\sphericalangle BPC| > |\sphericalangle A|$ (symbole $|\sphericalangle BPC|$ i $|\sphericalangle A|$ oznaczają miary odpowiednich kątów wewnętrznych w trójkątach PBC i ABC - rys. 4).



Rys. 4

Pierwszy uczeń sporządza rysunek i przypomina twierdzenie o sumie kątów trójkąta. Następnie rozważając ΔABC i ΔPBC podaje odpowiednio wnioski:

(a) suma miar $|\sphericalangle A|$, $|\sphericalangle B|$, $|\sphericalangle C|$ wynosi 180°,

(b) suma miar $|\sphericalangle P|$, β, γ wynosi 180°.

Żadnych notatek pomocniczych jednak nie sporządza. Dalej kilkakrotnie powraca jeszcze do innych myśli oraz poprzednich prób podając różne sformułowania wcześniejszych wypowiedzi. Zdanie (a) uzyskuje następujące czynnościowe sformułowanie, wyraźnie akcentujące dodawanie do $|\sphericalangle A|$ miar $|\sphericalangle B|$, $|\sphericalangle C|$:

(a') jeśli do $|\sphericalangle A|$ dodamy $|\sphericalangle B|$ i $|\sphericalangle C|$, to otrzymamy 180°.

Analogiczne rozłożenie akcentów nastąpiło w (b):

(b') jeśli do $|\sphericalangle P|$ dodamy β i γ, to otrzymamy 180°.

Bezpośrednia konfrontacja (a') z (b') (uczeń przy powtarzaniu dostrzega wspólną strukturę obu wypowiedzi, a następnie wykorzystuje nierówności odpowiednich kątów) prowadzi już bez trudu do końcowego wniosku.

Drugi uczeń rozpoczyna niemal identycznie. Również i on rezygnuje początkowo z odręcznego zapisu, lecz w sformułowaniach słownych nie natrafia na (a') i (b'), pozostając przy wersjach (a), (b). Wraca do nich po serii innych prób i tym razem notuje (jakby bez przekonania, gdyż to, co pisze, powtarzał już parokrotnie nie osiągając postępu):

$$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B| + |\sphericalangle C| = 180^{\circ},$$

$$|\sphericalangle P| + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

Zapis sporządzony ad hoc skupia teraz jego uwagę dotąd angażowaną w obserwacji rysunku. Uczeń porzuca dotychczasowe rozważania pojęciowe i czynności charakterystyczne dla sytuacji geometrycznej reprezentowanej w modelu rysunkowym. Przechodzi do analizy napisów pomijając nawet chwilowo ich pełną interpretację semantyczną. W szczególności konstatuje identyczność prawych stron

obu wzorów i ten moment jest decydującym momentem poszukiwań. Pozwala mu bowiem dostrzec wyraźną perspektywę bliskiego zakończenia dowodu (możliwość porównania lewych stron oraz wykorzystanie przesłanek: $|\sphericalangle B| > \beta$, $|\sphericalangle C| > \gamma$).

Formalny przebieg argumentacji z logicznego punktu widzenia jest w obu przypadkach taki sam, natomiast okoliczności odkrycia dowodu przez uczniów są zgoła inne. Pierwszy znalazł decydującą wskazówkę w specjalnej interpretacji słownej twierdzenia; zabrakło jej drugiemu. Ten ostatni zdecydował się natomiast zanotować fakt wcześniej znany. Dopiero właśnie ów doraźny zapis pozwolił dostrzec ideę rozwiązania.

Przykład nasz ilustuje więc różne sposoby i drogi prowadzące do znalezienia tego samego dowodu, ukazując w drugiej części rolę odręcznego zapisu w tym odkryciu.

Z organizacją nauki poprawnej argumentacji ma nauczyciel do czynienia stale. Zasadą wiodącą powinno być w niej unikanie formalizmu, krępujących rygorów i nieuzasadnionych na danym poziomie wzorców ścisłości. Oddzielnego zainteresowania wymaga tu problem redagowania wypowiedzi adekwatnych do przeprowadzonych wnioskowań, a w szczególności zagadnienie konstruowania zapisu szkolnego dowodu. Pogląd, zgodnie z którym zredagowanie odkrytego dowodu jest już tylko zwykłą formalnością nie jest uzasadniony. Często dopiero w fazie II pojawiają się nowe oraz wyostrzają stare trudności ucznia, a wraz z nimi dochodzą problemy dotąd nie istniejące. Zapis dowodu jest odrębnym zagadnieniem dydaktycznym i w procesie lekcyjnym wymaga odpowiedniej uwagi.

Publikacje wykorzystane

HADAMARD, J.: Psychologia odkryć matematycznych, PWN, Warszawa, 1964.

KONIOR, J.: Organizacja nauczania matematyki oparta na lokalnych dedukcjach, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1975.

Krygowska, Z.: Zarys dydaktyki matematyki, Część 2, WSiP, Warszawa, 1977.

MARCZEWSKI, E.: O pracach Wacława Sierpińskiego, Wiadomości Matematyczne 14,(1972),str. 65-72.

NOWECKI, B.: Rozumienie przez uczniów pojęć twierdzenia, dowodu, wywiedlności i zastosowania twierdzeń, Studia Logica 26, (1970),str. 131-139.

RUBINSZTEJN, S.L.: Zasady i drogi rozwoju psychologii, PWN, Warszawa 1964.

TURNAU, S.: Dwuwymiarowe wykresy dowodów i ich znaczenie dydaktyczne, Studia Logica 26 (1970),str. 123-129.

SEEKING FOR A PROOF AND ITS SUBSEQUENT REDACTIONAL PROCESSING IN SCHOOL TEACHING OF MATHEMATICS

Summary

Two steps of the proof process are considered: seeking for a proof and its redactional processing. Aiming at clarifying differences between the two, we concentrate upon the following problems: the heuristic method of teaching, the mathematical language and the psychological aspects in mathematical thinking.