ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 2 (1982)

MACIEJ KLAKLA
Kraków

Z badań nad rozpoznawaniem uzdolnień matematycznych

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Przedstawiona tu praca stanowi fragment badań nad problemami rozpoznawania uzdolnień matematycznych. Zagadnienia te są bardzo złożone i trudne, między innymi także wobec ogromnej rozmaitości poglądów psychologów na naturę i strukturę uzdolnień w ogóle, braku wyczerpujących informacji o tym, co sądzą sami matematycy o specyfice uzdolnień matematycznych, a także niedostatku zweryfikowanych opinii dydaktyków matematyki dotyczących tych zagadnień. Z tych powodów pracę niniejszą traktuję tylko jako rekonesans w dziedzinę problematyki diagnostycznych badań uzdolnień matematycznych.

Cele pracy formułuję w rozdziale pierwszym, gdzie również zawarłem założenia i opis przyjętej metody badań. Rozdział drugi zawiera sprawozdanie z badań nad uzdolnieniami do twórczego odbierania, przetwarzania i stosowania informacji matematycznej. W trzecim omawiam badania dotyczące tzw. "dyscypliny myślenia". Przeprowadzone badania indywidualne przedstawiam w rozdziale czwartym. Ostatni rozdział zawiera wnioski oraz propozycje dalszych badań.

1. CELE, METODA I ORGANIZACJA BADAŃ

1.1 Uzdolnienia matematyczne a rozwiązywanie problemów

Zagadnienie rozpoznawania uzdolnień matematycznych może wydawać się problemem nieco marginalnym w porównaniu z wieloma innymi stojącymi dziś przed dydaktyką matematyki problemami, które nasuwa ogólna tendencja do upowszechniania kształcenia na poziomie średnim, w tym także matematycznego. W nowoczesnym rozwiniętym społeczeństwie matematyka jawnie wkracza jednak do prawie wszystkich dziedzin życia, co implikuje potrzebę dobrej i licznej kadry matematyków. Zapewnić to może tylko takie nauczanie, które rozwinie i podtrzyma matematyczne zainteresowania i uzdolnienia młodzieży, w szczególności zabiegi dydaktyczne specjalnie dobierane do pracy z uczniami uzdolnionymi. Aby jednak móc takie metody wypracowywać i badać ich przydatność praktyczną, niezbędna jest możliwość wczesnego selekcjonowania uczniów matematycznie uzdolnionych, z którymi praca rokowałaby największe szanse pełnego sukcesu. Stąd właśnie bierze się problematyka omawianych tu badań.

Słuchając wypowiedzi nauczycieli-praktyków charakteryzujących swoich uczniów, spotykamy się często z określeniami: "zdolny", "pilny, ale niezbyt zdolny", "niezdolny". Mimo że sądy te nie są oparte na wyraźnie sformułowanych kryteriach, wyróżniają jednak - w opinii tychże nauczycieli - pewne kategorie cech umysłowych ich uczniów, obserwowane w procesie nauczania i często są podstawą prognoz związanych z preorientacją zawodową lub dotyczących powodzenia w dalszych studiach. Oczywiście, niesłuszne byłoby mniemanie, że owo niesprecyzowanie kryteriów, którymi kierują się nauczyciele określając ucznia jako np. "pilnego, ale niezbyt zdolnego", oznacza w ogóle ich brak. Nauczyciel wyrabia sobie bowiem taki sąd na podstawie obserwacji reakcji ucznia w różnorodnych szkolnych sytuacjach, często nawet bez uświadamiania sobie wszystkich istotnych elementów wpływających na taką, a nie inną opinię o uczniu. Sąd ten zależy również od wnikliwości czynionych przez nauczyciela obserwacji, od czasu ich trwania, od tego, czy sytuacje, w których nauczyciel ma możność obserwować ucznia, są dostatecznie zróżnicowane, itp.

Opinia taka zależy więc wyraźnie od nauczyciela, który ją wydaje, i co za tym idzie, może nie być trafna. Może również zmieniać się w czasie, czy to w wyniku lepszego poznania ucznia, czy w rezultacie jego umysłowego rozwoju.

Nie bez wpływu na tę opinię jest także styl pracy w szkole; nauczyciel pracuje tu na ogół "równym frontem" z całą klasą, nie mogąc poświęcać pojedynczym uczniom zbyt wiele czasu. Również pewna standardowość sytuacji, w których zazwyczaj obserwuje on uczniów, np. przy rozwiązywaniu typowych zadań, nie sprzyja dostrzeganiu różnic między "zdolnymi"a jedynie "pilnymi" uczniami. Być może, że ci "zdolni" szybciej, sprawniej lub bardziej pomysłowo rozwiązują nawet typowe zadania, ale wobec wspomnianych wyżej ograniczeń nauczyciel weryfikuje najczęściej wynik, pomijając - z braku czasu - drogę, na której uczeń do tego wyniku doszedł, co utrudnia uczniom "zdolnym" wyróżnienie się w tej sytuacji. Poza tym,pilny uczeń, nawet jeżeli nie ma specjalnych uzdolnień, może - drogą treningu - nauczyć się bardzo sprawnego rozwiązywania typowych zadań. Rezultaty osiągane wówczas przez niego w tej dziedzinie mogą nawet być lepsze niż rezultaty ucznia zdolnego, ale mniej pilnego. Utrudnić to może więc nauczycielowi dobrą orientację w potencjalnych możliwościach jego wychowanków. Taka orientacja jest bardzo ważna w procesie nauczania, uczniowie matematycznie uzdolnieni bowiem wymagają odrębnych zabiegów dydaktycznych w celu rozwinięcia ich predyspozycji w tym kierunku. Praktyka szkolna zna różne formy pracy z uczniami zdolnymi; jedne z nich są stosowane z większym, inne z mniejszym powodzeniem. Natomiast preorientacja jest oparta przede wszystkim na intuicji i doświadczeniu nauczyciela. Na ogół nauczyciele nie popełniają w tym zakresie zasadniczych pomyłek, ale to rozeznanie nie następuje dostatecznie wcześnie.

Nasuwa się wobec tego pytanie, czy nie można by oprzeć - chociażby częściowo - preorientacji w kierunku matematyki na kryteriach wyraźniej sprecyzowanych, pozwalających na weryfikację tych uzdolnień za pomocą odpowiednio konstruowanych sprawdzianów. Zresztą wyróżnienie takich kryteriów mogłoby pomóc nauczycielowi w bardziej świadomym obserwowaniu i badaniu uzdolnień uczniów.

Dobór kryteriów uzdolnień zależy istotnie od tego, w jakim sensie rozumiemy uzdolnienia matematyczne. W przypadku traktowania ich jako zdolności do sprawnego i skutecznego uczenia się matematyki, za takie kryteria można by - chociaż z pewnymi zastrzeżeniami - uznać postępy osiągane z tego przedmiotu przez uczniów w szkole. Zdolność do rozumienia i posługiwania się prostymi definicjami i twierdzeniami, zdolność do prowadzenia niezbyt skomplikowanych rozumowań matematycznych nie mogą jednak - według powszechnych opinii - być wystarczającymi kryteriami uzdolnień do działalności twórczej w dziedzinie matematyki, działalności dającej nowe obiektywnie ważne rezultaty .

Niektórzy badacze upatrują takie kryterium w umiejętności rozwiązywania zadań, wychodząc z założenia, że praca umysłowa przy rozwiązywaniu autentycznych problemów matematycznych i praca ucznia w toku rozwiązywania zadania różnią się tylko poziomem, ale jakość aktywności jest taka sama. Z tego założenia wychodzi np. Polya (1975), czy Krutecki (1968), który opiera swoje badania (choć dotyczące uzdolnień w pierwszym sensie) na analizie procesu rozwiązywania zadań.

Taka analiza wymaga jednak uściślenia tego, co się rozumie przez "zadanie", gdyż w praktyce szkolnej nazywane tak są zarówno proste ćwiczenia wymagające jedynie bezpośredniego zastosowania definicji czy twierdzenia, jak i skomplikowane problemy, w których trzeba się wykazać umiejętnością operowania wieloma pojęciami i widzenia różnorodnych między nimi związków.

Odwołując się tu do typologii zadań wprowadzonej przez A. Z. Krygowską (1977, cz.III), gdzie odróżnia się ćwiczenia, zadania, zwykłe zastosowania teorii oraz problemy, można stwierdzić, że dwie pierwsze kategorie zadań nie bardzo nadają się do oparcia kryteriów uzdolnień o charakterze twórczym na analizie procesu ich rozwiązywania. Zarówno bowiem ćwiczenia, wymagające zastosowania tylko pewnego prostego schematu postępowania, jak i zadania, do rozwiązania których trzeba powiązać kilka takich schematów, ale w znany i na ogół standardowy sposób - nie mogą ujawnić nic więcej ponad te elementy, które przy ich rozwiązywaniu występują. Mogłyby więc sprawdzać, czy uczeń potrafi się nauczyć definicji, czy rozumie ją i potrafi w prostych

przypadkach się nią posłużyć, czy rozumie i zna twierdzenie lub schemat rozwiązywania pewnych zadań, ale nie nadają się do weryfikacji występowania uzdolnień matematycznych o charakterze twórczym.

Zadania trzeciej kategorii - problemy - wymagają do ich rozwiązania czegoś więcej niż tylko wiadomości czy standardowych umiejętności. Tutaj potrzebny jest raczej pomysł, nietypowe zastosowanie znanych metod, dostrzeżenie istotnych lecz niejawnych związków, zbudowanie nowego modelu, przestrukturowanie zadania itp. Przy rozwiązywaniu problemów na pewno mogą się więc ujawniać uzdolnienia do różnorodnych rodzajów aktywności matematycznej, przy czym często różne problemy są okazją do podejmowania zupełnie nieraz różnych aktywności, charakterystycznych tylko dla danej sytuacji. Obserwując rozwiązywanie przez ucznia trudnego i interesującego problemu, nie jest też łatwo wydzielić te różne rodzaje aktywności matematycznej, często - właśnie w tej sytuacji - bardzo silnie ze sobą powiązane.

Z tych powodów wydawałoby się najwłaściwsze oprzeć poszukiwanie kryteriów uzdolnień matematycznych o charakterze twórczym na analizie aktywności matematycznej czynnych twórców matematyki i dla wyróżnionych czynników tej aktywności konstruować odpowiednie problemy, mające na celu weryfikację występowania tych czynników w aktywności matematycznej uzdolnionej młodzieży. Jednakże pełna i głęboka analiza aktywności matematycznej - to odrębny, niesłychanie bogaty i trudny problem (Freudenthal,1973; Math.École, 1974; Thom, 1974) , wymagający współpracy wielu matematyków twórczych i przekraczający zarówno zakres niniejszej pracy, jak i możliwości autora. Dlatego też - z całą świadomością wprowadzanych ograniczeń - podejmuję tu próbę badania uzdolnień jedynie do pewnych nielicznych, wybranych arbitralnie rodzajów aktywności matematycznej.

Wykorzystując w pracy wiele z rezultatów badań prowadzonych przez Kruteckiego i jego współpracowników, podejmuję skromną próbę uzupełnienia tych badań innymi - za pomocą sprawdzianów innego typu. W badaniach Kruteckiego stosuje się w zasadzie zadania takich typów, z którymi badani uczniowie spotykali się w szkole i których sformułowania nie różniły się istotnie od

rozwiązywanych przez nich zadań na lekcjach matematyki, może tylko z wyjątkiem kilku typowych testów psychologicznych, weryfikujących niekoniecznie zresztą z matematyką związane cechy umysłu, jak np. spostrzegawczość, trwałość pamięci, itp. Wprawdzie w proponowanych tu sprawdzianach również nie wykraczam poza materiał szkolny, ale sytuacji, których dotyczą stawiane uczniom problemy, nie spotykali oni w nauczaniu szkolnym, a rozwiązania nie mogą być bezpośrednio oparte na znanych im schematach czy wzorcach. Dokładniej wyjaśnię to przy omawianiu poszczególnych sprawdzianów.

W przedstawionych w tej pracy badaniach postawiłem sobie za cel:

(a) wybranie kilku spośród charakterystycznych czynników matematycznej twórczej aktywności, które można by ujawnić w formie dostępnej dla obserwacji i oceny;

(b) próbę weryfikacji występowania tychże czynników w matematycznej aktywności uczniów uznanych według opinii szkolnej za zdolnych;

(c) sformułowanie - na podstawie wyróżnionych czynników - pewnych kryteriów uzdolnień matematycznych uczniów;

(d) wypracowanie metod badania, opisu i analizy reakcji uczniów na sprawdziany weryfikujące ujawnianie się uzdolnień matematycznych.

Przyjmę tu, podobnie jak Krutecki (1968), założenie, że uczniowie dłużej przez nauczyciela obserwowani i uznawani za "bardzo zdolnych", są tacy w rzeczywistości, być może z pewnymi niewielkimi wyjątkami.

Wyróżnione w pracy czynniki aktywności matematycznej mają - w moim zamierzeniu - odpowiadać następującym dwóm warunkom:

1^{o} istotnie występują w twórczej pracy matematycznej,

2^{o} możliwe jest takie ich sprecyzowanie, że można dla nich konstruować proste środki sprawdzania, w jakim stopniu występują one w aktywności matematycznej uczniów.

Potrzebne jest jeszcze jedno istotne wyjaśnienie, bez którego cała koncepcja mogłaby być źle zrozumiana. Otóż określone w wyniku moich badań kryteria mają jedynie pozytywny charakter,

tzn.spełnienie któregoś z nich w danej sytuacji problemowej może być podstawą do mocno umotywowanej hipotezy o uzdolnieniach do tego typu aktywności matematycznej. Natomiast na niepowodzenie mogą mieć wpływ różne czynniki, tkwiące bądź w samym uczniu,w otoczeniu, czy wreszcie w proponowanym problemie. Tak więc nie spełnienie jakiegoś z kryteriów przy rozwiązywaniu jednego sprawdzianu w pewnej sytuacji nie może stanowić żadnej podstawy do opinii negatywnej. Nie mamy bowiem wcale pewności, czy w innych okolicznościach próba zakończyłaby się niepowodzeniem.

1.2. Metoda i organizacja badań

Opisane w niniejszej pracy badania przeprowadziłem w latach szkolnych 1974/75, 1975/76 i 1976/77 wśród uczniów XII Liceum Ogólnokształcącego im.Bolesława Bieruta w Krakowie. Wybrana do badań szkoła charakteryzowała się wysokim poziomem nauczania matematyki, o czym świadczyła zarówno duża ilość absolwentów tej szkoły podejmujących studia związane z matematyką, jak i duży procent uczniów biorących z powodzeniem udział w Olimpiadzie Matematycznej. Sprzyjający właściwej pracy dydaktycznej z młodzieżą klimat, zapewnienie warunków do pracy z uczniami uzdolnionymi i zrozumienie wobec potrzeb w tej dziedzinie (dyrektor szkoły był matematykiem), gwarantowały wszystkim uczniom pełne warunki matematycznego rozwoju,predysponując tę szkołę do przeprowadzenia wśród jej uczniów opisywanych tu badań. Polegały one na obserwacji i analizie reakcji uczniów na pewne sprawdziany, weryfikujące występowanie uzdolnień do określonych czynników aktywności matematycznej. Konstrukcję i opis poszczególnych sprawdzianów omawiam oddzielnie w kolejnych rozdziałach poświęconych sprawozdaniom z badań nad wybranymi rodzajami aktywności. Tam też formułuję kryteria uzdolnień do tych rodzajów aktywności matematycznej. W świetle wyników przeprowadzonych badań kryteria te ulegają pewnym modyfikacjom i uściśleniom.

Jednym z elementów wypracowyanej metody badań były tzw. badania próbne, przeprowadzone z kilkoma tylko uczniami. Ich opis znajduje się w pracy Klakli (1978).

Istotną rolę odgrywa dobór uczniów, którzy zostali poddani badaniom. Tutaj były to trzy grupy uczniów. Pierwsza liczyła 43

uczniów uznanych przez swoich nauczycieli matematyki za szczególnie uzdolnionych matematycznie, wybranych spośród uzyskujących dobre lub bardzo dobre oceny z matematyki. W pracy są oni zakodowani symbolami $A_1,\dots,A_{43}$.

Grupa druga, to również 43 uczniów, którzy w opinii tych samych nauczycieli są "pilni, ale niezbyt zdolni" i jedynie wytężoną pracą wyrównując brak uzdolnień osiągali również dobre lub bardzo dobre oceny. W pracy są oni oznaczeni symbolami $B_1,\dots,B_{43}$.

Wybranie do badań w obu grupach jedynie tych uczniów, którzy osiągali dobre lub bardzo dobre oceny z matematyki, pozwoliło zabezpieczyć się przed sytuacją, w której uczeń nie odpowiedziałby na pytania postawione w trakcie badań po prostu z braku podstawowych wiadomości, których posiadanie - jak sądzę - można już zakładać u ucznia legitymującego się dobrą lub bardzo dobrą oceną.

Należy zaznaczyć, że nie wszyscy uczniowie obu grup brali udział we wszystkich badaniach, co spowodowane zostało trudnościami organizacyjnymi, np. nieobecnością uczniów w trakcie przeprowadzania poszczególnych badań, ograniczoną możliwością odbywania się ich w jednym czasie ze względu na organizację procesu nauczania w szkole (nauka na dwie zmiany), zmianą szkoły przez uczniów lub jej ukończeniem, itp. Z tego względu, a także w celu zwiększenia przejrzystości sprawozdań z poszczególnych badań, w każdym rozdziale oddzielnie podaję grupę uczniów,która brała w nich udział.

Powtórzyłem również dodatkowo niektóre badania z grupą piętnastu uczniów tegoż liceum, uznanych przez swych nauczycieli matematyki za szczególnie niezdolnych. W szkole uzyskiwali oni dostateczne lub niedostateczne oceny z matematyki. W pracy oznaczeni są symbolami $C_1,\dots,C_{15}$. Byli to uczniowie tylko z klas I i II, gdyż - zdaniem nauczycieli - w klasach starszych tego liceum uczniów szczególnie niezdolnych już się nie spotyka ze względu na odsiew w klasach I i II. Efekty badań tych uczniów są prezentowane równolegle z opisem odpowiednich wyników badań uczniów z grup A i B.

Uczniowie odpowiadali na pytania w poszczególnych sprawdzianach w różnych klasach, gdyż niektóre z przedstawionych problemów miały sens jedynie dla uczniów z kl. I i II, a inne dopiero w starszych klasach. Z tego względu statystyki dotyczące uczniów biorących udział w badaniach podaję oddzielnie przy omawianiu wyników poszczególnych sprawdzianów.

Przed badaniami uczniowie zostali poinformowani, że ich odpowiedzi zostaną wykorzystane do celów niniejszego opracowania i wyrazili zgodę na współpracę z autorem. Równocześnie wiedzieli, że zadania rozwiązywane przez nich w trakcie badań nie będą miały wpływu na ocenę szkolną.

Przy typowaniu uczniów z poszczególnych klas do grup A, B czy C kierowałem się opiniami nauczycieli matematyki uczących w tych klasach, w tym także moją własną opinią, gdyż wówczas pracowałem również jako nauczyciel matematyki w tym liceum.

Ze względu na to,że wybrałem do badań uczniów jednej tylko szkoły, gdzie z uwagi na ściśle wzajemne kontakty nauczycieli matematyki oraz pracę zespołu przedmiotowego zarówno poziom nauczania, jak i wymagania stawiane uczniom, były w dużym stopniu jednolite, przeprowadzone badania nie mogą być podstawą do formułowania ogólnych wniosków. Pomogły one natomiast sprecyzować proponowane kryteria uzdolnień w sposób uzasadniający celowość podjęcia nad nimi szerokich badań empirycznych.

2. ZDOLNOŚĆ DO TWÓRCZEGO ODBIERANIA, PRZETWARZANIA I WYKORZYSTYWANIA INFORMACJI MATEMATYCZNEJ

2.1. Sformułowanie kryterium i opis sprawdzianów

Istotną rolę w twórczej pracy matematycznej (jak w każdej pracy twórczej) odgrywa odbieranie, przetwarzanie i wykorzystywanie informacji. Twórcze odbieranie informacji polega na wyborze spośród wielu równocześnie odbieranych informacji takiego ich zespołu, który nasuwa możliwość ich przetworzenia w nową informację, stanowiącą element wiedzy nowej jakości. Z kolei niestandardowe wykorzystanie posiadanych informacji, np. w innych sytuacjach niż ta, której informacje bezpośrednio dotyczyły, czy w odniesieniu do

innych niż zwykle obiektów, jest również charakterystyczne dla każdej twórczości, w szczególności matematycznej.

Ten czynnik aktywności matematycznej można wziąć za jedno z kryteriów rozpoznawania uzdolnień matematycznych uczniów. Będzie to więc kryterium:

Zdolność do twórczego odbierania, przetwarzania i wykorzystywania informacji w toku rozwiązywania problemów.

W celu zweryfikowania istnienia tych uzdolnień u uczniów uznanych przez opinię szkolną za zdolnych, zastosowałem dwa sprawdziany, różniące się zarówno stopniem trudności, jak i sytuacjami, bardzo zresztą prostymi.

Sprawdzian I składa się z dwóch, pozornie nie związanych ze sobą części. Pierwsza z nich zbudowana jest w sposób następujący:

Sformułowane jest zadanie obliczania liczby x_n wszystkich cięciw łączących n różnych punktów okręgu oraz podane są dwa różne rozwiązania tego zadania. Pierwsze prowadzi do wzoru

$$x_n = \frac{n(n-1)}{2} ,$$

a drugie do wzoru

$$x_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) .$$

Podana jest informacja, że obydwa rozwiązania są poprawne oraz sformułowane pytanie: "Jakie wnioski nasuwają Ci otrzymane wyniki?"

Druga część sprawdzianu zawiera polecenie:"Oblicz sumę 103 początkowych kolejnych liczb nauralnych"

Za pomocą tego sprawdzianu chciałem stwierdzić:

1° Czy uczeń dostrzega związek

$$(1) \qquad \frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) ,$$

2° Czy uczeń -jeśli go dostrzega - wykorzystuje ten związek do rozwiązania drugiej części zadania.

Sprawdzian przeznaczony był dla uczniów klasy I oraz tych uczniów klasy II, którzy jeszcze nie uczyli się na lekcjach matematyki o ciągach, gdyż jedynie w tym wypadku miały sens postawione wyżej pytania.

Również sprawdzian II składał się z dwóch części. Pierwsza z nich zbudowana jest w sposób następujący:

Sformułowany jest problem:"Wśród n losów loterii znajduje się 1 los na główną wygraną oraz k losów $(1 \leq k < n)$ uprawniających do bezpłatnego wyciągnięcia następnego losu. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania głównej wygranej przy zakupie jednego losu i maksymalnym wykorzystaniu uprawnień?"

Podane są dwa różne rozwiązania; w pierwszym z nich szukane prawdopodobieństwo wyraża się wzorem

$$P(A) = \frac{1}{n} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n-j-1} \prod_{i=0}^{j} \frac{k-i}{n-i},$$

natomiast w drugim rozwiązaniu otrzymujemy wzór

$$P(A) = \frac{1}{n-k}.$$

Następnie informuje się badanych, że obydwa rozwiązania są poprawne i formułuje pytanie:"Jakie wnioski nasuwają Ci otrzymane wyniki?"

Część druga sprawdzianu składa się również - tak jak w poprzednim sprawdzianie - tylko z jednego polecenia:

"Przedstaw ułamek $\frac{1}{2}$ w postaci sumy 10 różnych ułamków właściwych".

Sprawdzian ten przeznaczony był dla uczniów z klasy IV oraz dla uczniów klas trzecich matematyczno - fizycznych, którzy już przeszli kurs rachunku prawdopodobieństwa.

Również tutaj chciałem uzyskać następujące informacje:

1^{o} Czy uczeń dostrzega związek:

$$(2) \qquad \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n-j-1} \prod_{i=0}^{j} \frac{k-i}{n-i} \quad \text{dla} \quad 1 < k < n,$$

2^{o} Czy - jeśli go dostrzega - wykorzystuje go do

rozwiązania zadania z drugiej części sprawdzianu lub przynajmniej uświadamia sobie tę możliwość.

Pytanie postawione w tekście pierwszej części każdego sprawdzianu sugerowało badanym analizę podanej informacji i jej przetworzenie. Znajdowali się więc oni w sytuacji już bardzo uproszczonej w stosunku do sytuacji, gdy analogiczne pytanie pojawia się w twórczej aktywności w sposób naturalny i spontaniczny. Taka sugestia była jednak konieczna ze względu na cel przeprowadzanych badań; chodziło o to, by weryfikowane uzdolnienia, jeżeli występowały u uczniów, ujawniły się w trakcie badań, do czego była potrzebna pewna forma prowokacji.

Spróbujmy dokonać analizy pracy myślowej ucznia, który w sprawdzianie I daje poprawne odpowiedzi. Musi on sobie najpierw uświadomić, że skoro obydwa rozwiązania są poprawne, to zarówno ułamek $\frac{n(n-1)}{2}$, jak i suma $1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)$, wyrażają tę samą liczbę cięciw łączących n punktów na okręgu; a więc

$$\frac{n(n-1)}{2}=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1).$$

Jest to etap, w którym uczeń odbierając dwie różne informacje, świadomie uzyskuje nową.

Następnym etapem jest uprzytomnienie sobie, że związek (1) jest prawdziwy niezależnie od interpretacji, przy której został wykryty, tzn. że n wcale nie musi oznaczać liczby punktów na okręgu, a jedyne ograniczenie wynika z faktu, że musi to być pewna liczba naturalna większa od 1. Dokonuje się tu więc pewne przetworzenie informacji, przy czym owa zmiana dotyczy zakresu stosowalności związku (1) otrzymanego w poprzednim etapie.

Przechodząc do drugiej części sprawdzianu uczeń znajduje się w zupełnie nowej sytuacji. Nie ma już do czynienia z problematyką geometryczną, ale z zadaniem arytmetycznym, i to nie tyle trudnym, co pracochłonnym (dodawanie kolejnych 103 początkowych liczb naturalnych). Uświadomienie sobie w tym momencie możliwości wykorzystania uzyskanej w poprzednim etapie nowej informacji pozwala na sprawne rozwiązanie zadania.

Podobnie - ze względu na analogiczną konstrukcję - wyglądałaby analiza pracy myślowej ucznia w sprawdzianie II.

2.2. Wyniki uzyskane w sprawdzianach I i II

W sprawdzianie I uczestniczyli uczniowie z klas I i II, w tym: 27 uczniów z grupy A, 25 z grupy B i 15 z grupy C (zob.rozdział 1.2). Natomiast w sprawdzianie II uczestniczyli uczniowie klas III i IV, w tym: 21 uczniów z grupy A oraz 20 uczniów z grupy B. Łącznie w obu sprawdzianach uzyskałem 108 odpowiedzi. W sprawdzianie II nie było uczniów z grupy C, ponieważ - jak to już wyjaśniałem poprzednio - rekrutowali się oni wyłącznie z klas I i II, nie mieli więc wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, które były niezbędne do zrozumienia zagadnienia.

Dla opisu odpowiedzi uczniów w sprawdzianach I i II wprowadziłem następujące kategorie:

K 1. Badany nie dostrzega związków (1),(2).

K 2. Badany dostrzega związki (1),(2), ale ich nie wykorzystuje.

K 3. Badany dostrzega związki (1),(2) i wykorzystuje je w drugiej części sprawdzianów.

Wyniki uzyskane przez uczniów w sprawdzianach I i II ilustrują liczbowo tabele 2.1 i 2.2.

Tabela 2.1

Sprawdzian I

Kategoria odpowiedzi	A		B		C	
		%		%		%
K1. Nie dostrzega związku (1)	4	14,8	14	56,0	14	93,33
K2. Dostrzega związek (1),ale go nie wykorzystuje	4	14,8	2	8,0	1	6,67
K3. Dostrzega związek (1) i wykorzystuje go	19	70,4	9	36	-	-
Razem	27	100	25	100	15	100

Uczniowie z grupy A, których odpowiedzi zaliczyłem do kategorii K1, odpowiadając na pytanie "Jakie wnioski nasuwają Ci otrzymane wyniki?" oceniają obydwa przedstawione w sprawdzianie rozwiązania, przy czym sposób I uwazają za prostszy.Np. uczeń A_6 pisze "I sposób obliczenia ilości cięciw jest łatwiejszy i prostszy niż sposób II", a uczeń A_7: "Mimo że oba wyniki są poprawne, I sposób wydaje mi się dużo prostszy, bardziej przemawiający".

Wszyscy oni poprawnie obliczają sumę 103 początkowych liczb naturalnych bez korzystania ze związku (1), stosując jednak pewne uproszczenia metody rachunku. Uczniowie z grupy B, których odpowiedzi zaliczyłem również do tej kategorii, także oceniają obydwa rozwiązania, preferując sposób I lub w ogóle nie formułują żadnych uwag. Wśród tych, którzy obliczają sumę 103 początkowych kolejnych liczb naturalnych, 5 odpowiedzi jest błędnych, tym jedna dość zaskakująca: Uczennica B_{20} pisze:"1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + +7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 103". Pomijając nawet błąd w rachunku, widać, że zupełnie inaczej zrozumiała polecenie zawarte w sprawdzianie. Natomiast odpowiedzi uczniów z grupy C różnią się tutaj istotnie od odpowiedzi uczniów z grup A i B. Kilku uczniów daje takie odpowiedzi, które świadczą o zupełnym nierozumieniu ani treści sprawdzianu, ani pytań w nim zawartych.

Jest charakterystyczne, że jedyny uczeń C_3 grupy C, który dostrzegł związek (1), nie tylko nie potrafił go wykorzystać, ale jeszcze napisał "nie wiem jak to wykonać" - w odpowiedzi na zadanie 2. Uczniowie z grup A i B, których odpowiedzi zaliczyłem także do kategorii K2, wprawdzie też nie korzystają przy obliczeniach ze związku (1), ale zadanie rozwiązują, i to na ogół poprawnie (znowu czasem stosując różne uproszczenia rachunku) .

Zarówno uczniowie z grupy A jak i z grupy B, których odpowiedzi zaliczyłem do kategorii K3, wyraźnie napisali, że ze względu na poprawność obu rozwiązań zachodzi związek (1) i zauważyli, że może on posłużyć do rozwiązania zadania w drugiej części sprawdzianu. W kilku wypadkach popełniono błędy w rachunkach.

Tabela 2.2
Sprawdzian II

Kategoria odpowiedzi	A		B	
		%		%
K1. Nie dostrzega związku (2)	3	14,2	18	90
K2. Dostrzega związek (2) ale go nie wykorzystuje	9	42,9	2	10
K3. Dostrzega związek (2) i wykorzystuje go	9	42,9	-	-
Razem	21	100	20	100

Uczniowie, których odpowiedzi zaliczyłem do kategorii K1, a więc ci, którzy nie dostrzegli związku (2), wypowiadają się oceniając obydwa rozwiązania, przy czym drugie zyskuje większą aprobatę jako krótsze. Niektórzy kwestionują poprawność jednego ze sposobów. Wszyscy podają rozwiązanie drugiej części sprawdzianu stosując różne sposoby: wykorzystując własności ciągu geometrycznego, ułamki dziesiętne, bądź stosując metodę prób i błędów.

Odpowiedzi uczniów zaliczone do kategorii K2 zawierają wniosek, że prawdziwy musi być wzór (2),a poza tym są podobne do tych ,które zaliczyłem do kategorii K1. Natomiast wśród uczniów, których odpowiedzi zaliczyłem do kategorii K3, należałoby wyróżnić tych, którzy związek (2) dostrzegli i wykorzystali go w drugiej części sprawdzianu, obliczając konkretnie każdy z ułamków rozkładu, i tych, którzy zadowolili się tylko podstawieniem odpowiednich wartości do związku (2), uważając już rozkład ułamka 1/2 za dany.

W sprawdzianie I nie dostrzega związku (1) tylko niewielu uczniów z grupy A, ponad połowa uczniów z grupy B i prawie wszyscy z grupy C. Stosunkowo duży procent tych uczniów z grup A i B, którzy dostrzegli związek (1), wykorzystuje go następnie w drugiej części sprawdzianu (82,61% w A i 81,82% w B), co może świadczyć o tym, że zasadniczą trudność w tym sprawdzianie

sprawia uczniom obu grup dostrzeżenie związku (1) .

W sprawdzianie II, gdzie sytuacja jest niewątpliwie bardziej skomplikowana, nieliczni tylko uczniowie z grupy B(10%) dostrzegają związek (2) , natomiast znaczna większość uczniów z grupy A (85,8%) ten związek dostrzega. Tylko połowa z tych ostatnich wykorzystuje ten związek w drugiej części sprawdzianu. Natomiast żaden z uczniów grupy B, którzy związek (2) dostrzegli, nie wykorzystuje go przy rozwiązywaniu drugiej części zadania.

Porównując wyniki sprawdzianów I i II w grupie A widzimy, że w obu sprawdzianach stosunkowo niewielki procent uczniów nie dostrzega związków (1) i (2), natomiast w grupie B, w sytuacji trudniejszej (sprawdzian II), ten procent znacznie wzrasta (90%). W przypadku sprawdzianu II kategoria K3 bardziej różnicuje grupę uczniów zdolnych niż w sprawdzianie I.(Można by szukać powodów w tym ,że uczeń mógł nie dostrzec we wzorze sumacyjnym ze sprawdzianu II sumy ułamków).

Jak zastrzegłem się w rozdziale 1, indywidualnie nie można oceniać ujemnie uzdolnień ucznia do rozważanego tu typu aktywności matematycznej tylko na podstawie ujemnego wyniku sprawdzianu. Jednak wniosek taki może być sformułowany dla całych grup, co wzmacnia hipotezę, że uzdolnienie do twórczego odbierania, przetwarzania i wykorzystywania informacji matematycznej jest cechą wyróżniającą grupę uczniów uznanych w opinii szkolnej za zdolnych.

3. UZDOLNIENIA DO ZDYSCYPLINOWANEGO MYŚLENIA

3.1. "Dyscyplina myślenia" jako jeden z czynników aktywności matematycznej

Jednym z wyraźnych czynników aktywności matematycznej jest tzw. "dyscyplina myślenia", rozumiana - między innymi, jako umiejętność przezwyciężania konfliktu między wymaganiami formalnego myślenia a innymi jego nurtami, np. intuicją, lub też silnie utrwalonymi nawykami czy sugestią nazwy mającej w języku potocznym znaczenie poglądowo bliskie znaczeniu ustalonemu przez jej definicję matematyczną, ale nie tożsame. Wymaga to (a może nie tylko

u ucznia) czasami pokonania u ucznia bariery psychologicznej związanej z tendencją do zastępowania w toku rozumowania formalnej struktury pojęcia jego poglądowym ujęciem.

W szkole obserwujemy takie konflikty bardzo często w nauce geometrii i wszędzie tam, gdzie wizualizacja matematycznych treści, konkretyzowana w rysunku odgrywa istotną rolę. Uczeń na pytanie, czy łamana zwyczajna może być figurą wypukłą, odpowiada negatywnie, ponieważ myśli o łamanych, które zwykle rysuje, i "gubi" skrajny przypadek, gdy łamana redukuje się do jednego odcinka (także konflikt z nazwą "łamana" w sensie języka codziennego). Spotykając w tekście zadania termin "wielokąt" nie odwołuje się do jego definicji, ale wyobraża sobie jakiś konkretny wielokąt, zazwyczaj wypukły. Prowadzone w dość dużej populacji uczniów badania Zofii Zamorskiej (praca w druku) ujawniły fakty szczególnie jaskrawo ilustrujące tego rodzaju konflikty. Uczniowie, którzy sami zdefiniowali punkt brzegowy figury (w każdym kole , którego środkiem jest ten punkt, znajdują się punkty należące do tej figury i punkty do niej nie należące) wskazywali uporczywie jako brzeg "koła sita" (koło, z którego usunięto kilka punktów wewnętrznych) okrąg, bez odwoływania się do własnej definicji, kierując się tylko poglądowym, codziennym znaczeniem terminu "brzeg".Tylko nieliczni ujawniają w tym przypadku "dyscyplinę myślenia", skrupulatnie badając sytuację z punktu widzenia przyjętej konwencji.

Rysunek narzuca uczniowi często jakieś globalne ujęcie, które jakby go uwalnia od obowiązku analizy lokalnej i formalnej. Uczniowie twierdzą z całym przekonaniem, że funkcja tangens nie jest ciągła w swej dziedzinie, przeciwstawiając tę funkcję funkcji sinus jako ciągłej, bo z jednej strony mają przed oczyma obraz złożony z izolowanych krzywych, z drugiej obraz linii "bez przerw". Spontaniczna potrzeba przeanalizowania sytuacji z odwołaniem się do definicji, bez prowokacji ze strony nauczyciela zdarza się bardzo rzadko. I w tych właśnie rzadkich przypadkach uczeń ujawnia to, co nazywam "dyscypliną myślenia".

Oczywiście, myślenie obrazami, poglądowymi reprezentacjami, globalnymi ujęciami odgrywa ogromną rolę heurystyczną w twórczym myśleniu na każdym poziomie. Jednakże specyfika matematyki

wymaga, by te nurty myśli były weryfikowane konsekwentnie, w szczególności, by terminy i symbole, którymi się operuje, były używane zgodnie z przyjętymi konwencjami. Rozumienie roli definicji jest nieodzownym warunkiem rozumienia formalnego charakteru matematyki, przy czym nie chodzi tu o formalizm sensu stricto, ale o te elementy formalne, bez których nie ma matematyki na najniższym nawet poziomie. Odczucie potrzeby weryfikowania zgodności poglądowych interpretacji matematycznych obiektów z ich definicjami i umiejętność korzystania z definicji w toku rozumowania jest na pewno szczególnym elementem "dyscypliny myślenia".

Sytuacja, w której uczeń stoi przed problemem samodzielnego pokonania tego rodzaju różnych konfliktów w toku rozwiązywania matematycznych zadań, różni się istotnie od sytuacji, w której zachodzi potrzeba skontrolowania poprawności przeprowadzonego przez kogoś innego rozumowania, przedstawionego pisemnie. Dołącza się tu trudność wywołana sugestią tekstu czytanego. Nauczycielowi trudno jest obserwować w złożonej sytuacji nauczania matematyki w zespole klasowym, czy i jak uczniowie w toku lektury taki konflikt pokonują. Bardzo częstym i typowym przykładem jest tutaj moment czytania tekstu dowodu matematycznego przez ucznia. Doświadczenie wskazuje (Nowecki, 1974), że uczniowie w wielu przypadkach nie kontrolują poprawności poszczególnych przesłanek czy wnioskowania, ale mechanicznie odczytują tekst, przyjmując do wiadomości kolejne fakty. To, że czytany tekst zawiera często nowe wiadomości, których się trzeba nauczyć, bardzo mocno sugeruje przekonanie o jego poprawności, przesłaniając konieczność kontroli odczytywanych rozumowań.

Oczywiście, dużą rolę odgrywa tu umiejętność czytania tekstu matematycznego, pewna związana z tym technika pracy z tekstem, której z powodzeniem - jak wskazują dotychczasowe doświadczenia (Krygowska,1977, cz.II) - można uczyć. Jednakże niektórzy uczniowie nawet wtedy, gdy są specjalnie nastawieni na kontrolę poprawności rozumowania, nie potrafią się uwolnić od wpływu tej sugestii; natomiast inni są zdolni do tego, aby się jej skutecznie oprzeć.

Obserwacja postaw uczniów w klasie w trakcie pracy z tekstem dowodu pozwoliła mi wyróżnić dwa typy ukierunkowań krytycznego nastawienia uczniów wobec tekstu. Jedno z nich polega na zwracaniu szczególnej uwagi na poprawność logiczną rozumowań, drugie natomiast charakteryzuje się szczególnym wyczuleniem na poprawność rzeczową weryfikowanych tekstów.

Bardzo często czynnikiem wyzwalającym taką krytyczną postawę niektórych uczniów są absurdalne wnioski czy sprzeczności pojawiające się w wyniku rozumowania. Skłonność do wyjaśniania tych sprzeczności, aktywna reakcja wobec otrzymanych nieprawdopodobnych wniosków, są również charakterystyczne dla "dyscypliny myślenia".

Tak więc uzdolnienia do "zdyscyplinowanego myślenia" będę badał w następujących aspektach:

1° Zdolność do poprawnego wykorzystywania definicji w rozumowaniach w przypadku, gdy jest ona w konflikcie z jakimś innym czynnikiem, np. uprzednim doświadczeniem, nawykiem, sugestią, intuicją, itp.

2° Zdolność do kontrolowania poprawności przeprowadzonego rozumowania, zarówno od strony formalnej, jak i treściowej.

3° Zdolność do aktywnej, spontanicznej reakcji na pojawienie się sprzeczności w wyniku rozumowania.

Uzdolnienia te występują nie u wszystkich osób w jednakowym stopniu, czasami w ogóle się nie ujawniają lub występują tylko w pewnych przypadkach.

3.2. Konstrukcja i opis sprawdzianów

Wykorzystane w badaniach sprawdziany dotyczyły trzech wyróżnionych powyżej aspektów dyscypliny myślenia. W szczególności sprawdziany III i IV miały weryfikować uzdolnienia do przeprowadzania rozumowań z wykorzystywaniem definicji w przypadku, gdy pozostaje ona w konflikcie z innymi czynnikami, z uwzględnieniem różnych co do stopnia trudności sytuacji. Sprawdziany V, VI i VII przeznaczone były do weryfikacji uzdolnień do kontrolowania poprawności czyjegoś rozumowania, zarówno od strony formalnej, jak i treściowej. Badały także reakcję na

absurdalność wniosków wypływających z rozumowania. Natomiast sprawdzian VIII miał dać odpowiedź na pytanie, czy uczeń kontrolując poszczególne ogniwa rozumowania zdaje sobie także sprawę z jego myśli przewodniej i czy w związku z tym potrafi ocenić prawomocność wniosków.

Przechodzę teraz do zaprezentowania i opisu poszczególnych sprawdzianów w celu wyjaśnienia, na czym powinno polegać każdorazowo ujawnienie się uzdolnień do "zdyscyplinowanego myślenia".

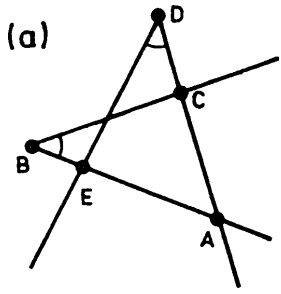
S P R A W D Z I A N III

Przypomnijmy:

Definicja. Kątem nazywamy zbiór trzech figur: dwóch różnych półprostych o wspólnym początku i jednej z figur wyciętych przez sumę tych półprostych z płaszczyzny.

W każdym z poniższych sytuacji znajdź iloczyn podanych kątów:

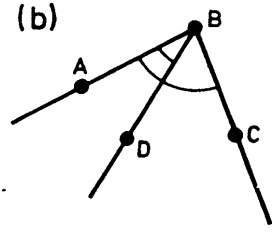
(a)



∢ ABC ∩ ∢ ADE = ...

Uzasadnienie: .....

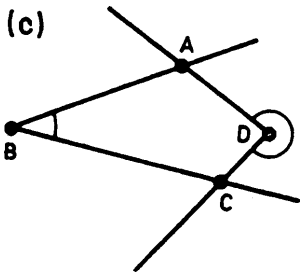
(b)



∢ ABC ∩ ∢ ABD = ...

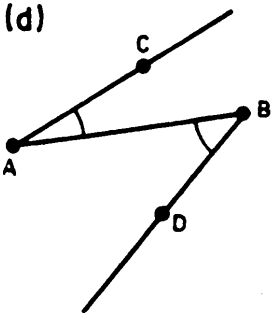
Uzasadnienie: .....

(c)



∢ABC ∩ ∢ADC = ...
Uzasadnienie: .....

(d)



∢CAB ∩ ∢ABD = ...
Uzasadnienie: .....

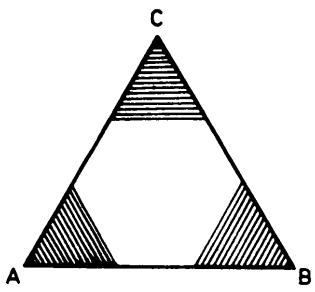
Poprawna odpowiedź w przypadku (b) powinna brzmieć $\{BA^{\rightarrow}\}$, natomiast w pozostałych przypadkach $\emptyset$ (zbiór pusty). W rozumowaniu, które powinien przeprowadzić uczeń, interweniują wyraźnie dwie definicje: definicja kąta, poznana w liceum i przypomniana w tekście sprawdzianu, oraz definicja iloczynu zbioru, nie przypomniana uprzednio. Pośrednio potrzebna jest również znajomość kilku innych: figury geometrycznej, półprostej, figury wyciętej z płaszczyzny.

Przypomniana definicja kąta, którą ma się posłużyć uczeń, jest w konflikcie z tym, czego uczeń się nauczył w szkole podstawowej, gdzie interpretowano kąt jako część płaszczyzny, a więc zbiór punktów. Od tej interpretacji uczeń musi się uwolnić, aby uzyskać poprawną odpowiedź, którą potraktujemy jako ujawnienie się u niego uzdolnień do "zdyscyplinowanego myślenia".

S P R A W D Z I A N IV

Dana jest figura f (rys.1) zdefiniowana następująco:

$$f = \Delta ABC - [J_A^{1/3}(\Delta ABC) \cup J_B^{1/3}(\Delta ABC) \cup J_C^{1/3}(\Delta ABC)],$$



gdzie ΔABC jest trójkątem równobocznym, a symbol $J_X^{1/3}$ oznacza jednokładność o środku X i skali 1/3.

Czy figura f ma środek symetrii? Odpowiedź uzasadnij .....

Rys.1

Aby uzyskać poprawną odpowiedź (figura nie ma środka symetrii), trzeba sobie uświadomić, jak wygląda figura f, i rozstrzygnąć,czy ma środek symetrii. Do tego potrzebne jest rozumienie wykorzystanych tu podstawowych i na ogół dobrze uczniom znanych określeń: trójkąta, jednokładności, sumy i różnicy zbiorów oraz środka symetrii figury; żadnego z nich nie przypomniano w tekście sprawdzianu. Problem ilustrowany jest rysunkiem, który sugeruje raczej globalne ujęcie (odcinam trzy trójkąty otrzymując sześciokąt foremny), prowadzące do błędnej odpowiedzi (sześciokąt foremny ma środek symetrii), gdy tymczasem lokalna analiza sytuacji doprowadza do właściwego rezultatu. Ścisłe zastosowanie definicji różnicy zbiorów uwidacznia bowiem, że f jest figurą otrzymaną z sześciokąta foremnego przez odrzucenie trzech jego boków w taki sposób, że nie ma ona środka symetrii. Rozwiązując to zagadnienie uczeń musi więc pokonać konflikt między globalnym ujęciem sytuacji sugerowanym dodatkowo przez rysunek a lokalną analizą wykorzystującą ściśle definicję różnicy zbiorów. Przezwyciężenie tego konfliktu ujawnia znów

pewien aspekt uzdolnień do "zdyscyplinowanego myślenia".

S P R A W D Z I A N V

Przeczytaj uważnie poniższy tekst:

Przyjmijmy oznaczenia:

Ω - zbiór zdarzeń elementarnych,

$A \subset \Omega$,

$B \subset \Omega$,

$P(X)$ - prawdopodobieństwo określone na podzbiorach zbioru Ω.

Jeżeli $P(B) \neq 0$, to prawdopodobieństwo $P(A/B)$ zdarzenia A, jeżeli zaszło zdarzenie B, określamy następująco:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Pytamy, przy jakich warunkach na A i B prawdopodobieństwo $P(A/B)$ nie zależy od B, tzn.

$$P(A/B) = P(A).$$

Ktoś rozumuje następująco:

Niech $B = \Omega$, wtedy $P(B) = 1$ oraz

$$p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{1} = P(A) \quad (\text{bo } A \cap \Omega = A).$$

WNIOSEK. $P(A/B) = P(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B = \Omega$.

Czy powyższe rozumowanie uważasz za poprawne. Odpowiedź uzasadnij.

Błąd przedstawionego tu rozumowania polega na wyciągnięciu wniosku w postaci równoważności, gdy tymczasem przeprowadzone rozumowanie dowodzi jedynie implikacji:

$$B = \Omega \Rightarrow P(A/B) = P(A).$$

Weryfikując to rozumowanie uczeń musi umieć oddzielić rozumowanie w postaci poprawnych inferencji od ostatecznego, nieuzasadnionego wniosku w postaci równoważności. Strona logiczna problemu jest tu bardzo wyraźna.

Poprawna odpowiedź ucznia będzie więc traktowana jako ujawnienie się znów pewnego aspektu uzdolnień związanych z "dyscypliną myślenia".

S P R A W D Z I A N VI

Niech x oznacza wagę słonia, a y wagę komara. Oznaczmy $x+y$ przez $2v$, czyli $x+y=2v$.
Wtedy

$$x = 2v - y, \qquad x - 2v = -y.$$

Pomnóżmy równania stronami:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy.$$

Dodajmy do obu stron v^2:

$$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2.$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$(x - v)^2 = (y - v)^2.$$

Stąd: $x - v = y - v$, czyli
$x = y$.
A więc waga słonia jest równa wadze komara.
Jakie problemy nasuwają Ci się po przeczytaniu tego rozumowania ?

Nie podaje się informacji, że w rozumowaniu jest błąd.

Również sformułowanie pytania nie sugeruje istnienia błędu w rozumowaniu. Natomiast absurdalność wniosku powinna u pewnych uczniów wywołać aktywną reakcję i krytyczną postawę wobec zaprezentowanego rozumowania. Byłby to zarazem przejaw uzdolnień związanych z "dyscypliną myślenia".

S P R A W D Z I A N VII

Przeczytaj uważnie poniższy tekst:

DEFINICJA. Rozwiązaniem równania nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających to równanie.

Szukamy rozwiązania równania $x^2 = 4$.

Ktoś rozumuje następująco:

Ponieważ $2^2 = 4$, więc liczba 2 spełnia równianie $x^2 = 4$.

Ponieważ $(-2)^2 = 4$, więc liczba (-2) spełnia równianie $x^2 = 4$.

WNIOSEK. Zgodnie z podaną definicją rozwiązaniem równania $x^2 = 4$ jest zbiór $\{2,-2\}$.

Czy powyższe rozumowanie uważasz za poprawne? Odpowiedź uzasadnij.

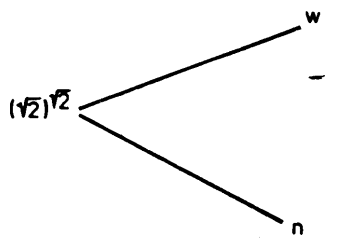
Rozumowanie zaprezentowane w sprawdzianie nie jest oczywiście poprawne, mimo że istotnie rozwiązaniem tego równania jest zbiór $\{-2,2\}$. Błąd polega znów na wyciągnięciu wniosku w postaci równoważności, choć z przeprowadzonego rozumowania wynika jedynie implikacja. Uczeń musi więc przełamać konflikt między prawdziwym wnioskiem (w zbiorze R rozwiązaniem równania $x^2 = 4$ jest istotnie zbiór $\{-2,2\}$) a niepoprawnym rozumowaniem, które do tego wniosku, pozornie tylko, prowadzi (z rozumowania wynika jedynie, że zbiór $\{-2,2\}$ zawiera się w rozwiązaniu równania). Konstrukcja logiczna zadania nie jest tu już tak wyraźna jak w przypadku sprawdzianu 6, natomiast interweniującą istotnie definicję rozwiązania równania przypomniano w tekście sprawdzianu.

S P R A W D Z I A N VIII

Przeczytaj uważnie poniższy tekst.

Chcąc zbadać czy potęga o wykładniku niewymiernym liczby niewymiernej może być liczbą wymierną, przeprowadzamy następujące rozumowanie: $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Wobec tego $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ może być albo liczbą wymierną w, albo liczbą niewymierną n (rys.2).

W drugim przypadku zauważamy, że : $n^{\sqrt{2}} = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, a więc otrzymujemy liczbę wymierną.



Rys. 2

(a) Czy z powyższego rozważania wynika, że $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną? .....

(b) Czy z powyższego rozumowania wynika, że $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną ? .....

Poprawne odpowiedzi na obydwa pytania są negatywne. Aby je uzyskać, uczeń musi wyraźnie uświadomić sobie myśl przewodnią rozumowania, oddzielić częściowe wnioski wynikające z przyjmowanych hipotez od zasadniczego toku rozumowania. Musi uzupełnić pewne niedopowiedzenia, aby jasno zobaczyć strukturę logiczną rozumowania, w którym wskazuje się jedynie na to, iż możliwe jest, że potęga niewymierna liczby niewymiernej jest liczbą wymierną. Przezwyciężenie tego "szumu logicznego" byłoby świadectwem ujawnienia się uzdolnień do "zdyscyplinowanego myślenia".

3.3 Wyniki sprawdzianów III i IV

Zamieszczone poniżej tabele (Tabela 3.1 i Tabela 3.2) podają wyniki uzyskane przez uczniów z grup A,B,C w sprawdzianach III i IV.

Tabela 3.1
Sprawdzian III

Kategoria odpowiedzi	Grupa A		Grupa B		Grupa C	
		%		%		%
K1. Odpowiedź poprawna	16	64	1	4,4	-	-
K2. Odpowiedź błędna	9	36	22	95,6	15	100
Razem	25	100	23	100	15	100

Tabela 3.2
Sprawdzian IV

Kategoria odpowiedzi	Grupa A		Grupa B		Grupa C	
		%		%		%
K1. Odpowiedź poprawna	10	50	-	0	-	0
K2. Odpowiedź błędna	10	50	22	100	12	100
Razem	20	100	22	100	12	100

Przeglądając tabele 3.1 i 3.2 widzimy, że połowa (sprawdzian IV) lub ponad połowa (sprawdzian III) uczniów z grupy A uzyskała odpowiedzi poprawne, natomiast w grupach B i C prawie wszystkie odpowiedzi są błędne. Wyniki te wyróżniają wyraźnie niektórych uczniów z grupy A. Porównując ilość poprawnych odpowiedzi uczniów z grupy A w obu sprawdzianach można wnosić, że przypomnienie w tekście sprawdzianu III istotnie interweniującej definicji w niewielkim stopniu wpłynęło na wyniki (64% poprawnych odpowiedzi w sprawdzianie III wobec 50% w sprawdzianie IV, przy małej liczebności badanych grup).

Wyniki sprawdzianów nie różnicują grup B i C, jednakże bliższa charakterystyka błędnych odpowiedzi uczniów z tych grup wykazuje istotną różnicę pomiędzy nimi. Odpowiedzi poprawne uzyskane w sprawdzianie III zawierały uzasadnienie, w którym uczniowie powoływali się na przypomnianą w tekście zadania definicję kąta.Natomiast błędne odpowiedzi uczniów z grup A i B polegały na tym, że traktowali oni kąt zgodnie z nawykiem

wyniesionym ze szkoły podstawowej, tj. jako pewien zbiór punktów, mimo przypomnianej nowej definicji. Zupełnie inaczej wyglądały błędy popełnione przez uczniów z grupy C. Zdarzały się tam odpowiedzi:"nie wiem jak to zrobić", lub zupełnie niezrozumiałe, niedorzeczne, świadczące o całkowitym niezrozumieniu zarówno treści, jak i symboliki (np. "figura", "$\sphericalangle \alpha = x^{o}$", "iloczyn ABC").

W sprawdzianie IV odpowiedzi poprawne podali tylko uczniowie z grupy A. Uzasadniali oni poprawnie fakt, że figura f nie ma środka symetrii, zauważając, że pewne odcinki dostrzeżonego sześciokąta nie zawierają się w figurze otrzymanej w wyniku przekształcenia. Odpowiedzi błędne uczniów z grupy A i B polegały na tym, że nie zauważali oni (interweniuje tu definicja różnicy zbiorów),iż trzy boki otrzymanego sześciokąta nie zawierają się w figurze określonej warunkami zadania. Wśród błędnych odpowiedzi uczniów z grupy C można wyróżnić jeszcze inne, świadczące o nierozumieniu pewnych pojęć (np. środka symetrii figury).

Charakterystyczne powtarzające się błędne odpowiedzi u uczniów z grup A i B w sprawdzianie III mogły być najprawdopodobniej spowodowane wspomnianym już nawykiem ze szkoły podstawowej, gdzie obowiązywało inne określenie kąta. Popełniający ten błąd uczniowie nie potrafili więc, mimo przypomnienia w tekście sprawdzianu nowej definicji, przezwyciężyć dawnego przyzwyczajenia. Można by przypuszczać, że przyczyna leży tu także w pewnych niedomaganiach nauczania, które powinno kształcić u uczniów świadomość, że w rozumowaniu matematycznym trzeba odwoływać się do definicji. Ten powód jest jednak mało prawdopodobny wobec charakterystyki szkoły i uczących, o czym wspomniałem uprzednio.

3.4. Wyniki sprawdzianów V,VI i VII

Zamieszczone poniżej tabele (Tabela 3.3, Tabela 3.4 i Tabela 3.5) podają wyniki uzyskane przez uczniów z grup A, B i C w sprawdzianach V, VI i VII.

Tabela 3.3
Sprawdzian V

Kategoria odpowiedzi	Grupa A	%	Grupa B	%
K1. Uczeń uważa rozumowanie za poprawne	-	-	22	81,4
K2. Uczeń uważa rozumowanie za błędne, ale źle to uzasadnia	-	-	2	7,5
K3. Uczeń uważa rozumowanie za błędne, ale w uzasadnieniu niezbyt wyraźnie wskazuje na faktyczny powód	-	-	3	11,1
K4. Uczeń uważa rozumowanie za błędne i poprawnie to uzasadnia	30	100	-	-
Razem	30	100	27	100

Tabela 3.4
Sprawdzian VI

Kategoria odpowiedzi	Grupa A	%	Grupa B	%	Grupa C	%
K1. Uczeń nie zauważa lub nie reaguje na absurdalność wniosku	-	-	1	4,8	3	19,8
K2. Uczeń zauważa absurdalność wniosku, ale sądzi, że "w matematyce tak może być"	-	-	2	9,6	4	26,4

cd. tabeli 3.4

K3. Uczeń zauważa absurdalność konkluzji, wyciąga stąd wniosek o błędzie w rozumowaniu, ale nie potrafi go poprawnie znaleźć	3	14,3	12	57,1	8	52,8
K4. Uczeń zauważa absurdalność wniosku, wnosi stąd o błędzie w rozumowaniu i poprawnie ten błąd znajduje	18	85,6	6	28,5	-	-
Razem	21	100	21	100	15	100

Tabela 3.5
Sprawdzian VII

Kategoria odpowiedzi	Grupa A	%	Grupa B	%	Grupa C	%
K1. Odpowiedź poprawna	26	72,4	7	17	-	
K2. Odpowiedź nie na temat	3	8,3	6	14,6	-	
K3. Odpowiedź błędna	7	19,3	28	68,4	15	100
Razem	36	100	41	100	15	100

Sprawdzian V bardzo wyraźnie różnicuje uczniów z grup A i B. Wszyscy badani z grupy A dali poprawną odpowiedź, wyraźnie wskazując logiczną strukturę błędu popełnionego w rozumowaniu. Natomiast aż 81,4% uczniów z grupy B nie zauważyło błędu w rozumowaniu, a ci nieliczni (11,1%),którzy orientowali się, gdzie leżał błąd, nie uświadamiali sobie jednak wyraźnie jego struktury logicznej.

W sprawdziane VI wszyscy uczniowie z grupy A zauważyli absurdalność konkluzji i wyciągnęli stąd wniosek o błędzie w rozumowaniu, a także w przeważającej większości (85,6%)poprawnie

ten błąd znaleźli. W grupie B też większość uczniów zauważa absurdalność konkluzji (85,6%) i wyciąga stąd wniosek o błędzie w rozumowaniu, ale spośród nich tylko 28,5% potrafi poprawnie ten błąd znaleźć. Zarówno w grupie B jak i C są uczniowie, którzy mimo iż dostrzegają absurdalność konkluzji, nie wyciągają stąd wniosku o błędzie w rozumowaniu, uważając, że "w matematyce to się może zdarzyć, mimo iż w rzeczywistości jest to niemożliwe" (w grupie B dwóch uczniów, a w grupie C czterech). W grupie C aż 20 % badanych w ogóle nie dostrzega absurdalności wniosku lub nie reaguje na nią ; nie jest to dla nich żadnym sygnałem do refleksji nad przeprowadzonym rozumowaniem. Ogółem prawie połowa uczniów z tej grupy nie zauważa absurdalności wniosku lub jeżeli nawet to spostrzega, to sądzi, iż "w matematyce może tak być". Odpowiedzi tego typu w grupie A w ogóle się nie pojawiły. Zwróćmy uwagę na to, że większość (85,7%) tych uczniów z grupy A, którzy zauważyli absurdalność wyniku rozumowania i wyciągnęli stąd wniosek o błędzie w rozumowaniu, potrafiło poprawnie ten błąd wykryć. Analogiczny procent w grupie B wynosi tylko 33,3.

W sprawdzianie VII większość odpowiedzi w grupie A (72,4 %) to odpowiedzi poprawne, gdy tymczasem w grupie B większość stanowią odpowiedzi błędne (68,4 %). W grupie C wszystkie odpowiedzi były błędne.

3.5. Wyniki sprawdzianu VIII

Tabela 3.6 podaje wyniki uzyskane przez uczniów z grup A, B i C w sprawdzianie VIII.

Tabela 3.6
Sprawdzian VIII

Kategoria odpowiedzi	A	%	B	%	C	%
K1. (a)poprawnie (b)poprawnie	21	87,5	6	27,3	-	-
K2. (a)błędnie (b)błędnie	-	-	-	-	9	75

ciąg dalszy tabeli 3.6

K3 (a)błędnie (b)poprawnie	-	-	-	-	3	25
K4 (a)poprawnie (b)błędnie	3	12,5	16	72,7	-	-
Razem	24	100	22	100	12	100

Ogromna większość uczniów z grupy A odpowiedziała poprawnie na obydwa pytania, gdy tymczasem w grupie B tylko 27,3 % uczniów odpowiedziało poprawnie.

3.6. Wnioski

Rezultaty uzyskane przez badanych uczniów z grupy A w sprawdzianach dotyczących "dyscypliny myślenia", mimo niewielkich populacji uczniów biorących udział w badaniach, ze względu na szczególnie wyraźne i charakterystyczne różnice w odpowiedziach wzmacniają hipotezę, że uczniowie uznani przez opinię szkolną za zdolnych wyróżniają się następującymi cechami aktywności matematycznej:

1° umiejętnością poprawnego wykorzystywania definicji w rozumowaniach w przypadku, gdy jest ona w konflikcie z jakimś innym czynnikiem ,

2° umiejętnością kontrolowania poprawności przeprowadzonego rozumowania, zarówno od strony formalnej,jak i treściowej ,

3° aktywną reakcją na pojawienie się sprzeczności w wyniku rozumowania.

4. BADANIA INDYWIDUALNE

4.1. Uwagi dotyczące metod stosowanych w dotychczas opisywanych badaniach

Omówione w poprzednich rozdziałach badania przeprowadzone były zasadniczo w ten sam sposób. Uczniowie odpowiadali pisemnie na postawione pytania. Uzyskane odpowiedzi były przedmiotem analizy, w wyniku której formułowano wnioski. Taka metoda zakłada z góry pewne ograniczenia, na które zwrócę uwagę.

Przede wszystkim - w przypadku, gdy uczeń ma do rozwiązania pewien problem - pisemna odpowiedź informuje nas jedynie o rezultacie uzyskanym w skomplikowanym procesie, którego obraz jest często niepełny i fragmentaryczny, ogranicza się bowiem do tego, co badany zapisze na arkuszu. Nie ma więc możliwości obserwacji całego procesu rozwiązywania zadania i rejestracji istotnych momentów tej pracy. W przypadku odpowiedzi błędnej, bądź braku odpowiedzi w ogóle, nic nie wiemy o powodach niepowodzenia. Być może uczeń miał tu trudności spowodowane przyczynami nie mającymi bezpośredniego związku z tym, co badaliśmy (np. mógł nie rozumieć pewnych określeń czy nie znać pewnych pojęć). W efekcie odpowiedź błędna mogłaby być spowodowana nie brakiem uzdolnień, ale np. brakiem wiedzy. Stąd zresztą - między innymi - bierze się przyjęte w pracy założenie o wyłącznie pozytywnym charakterze eksperymentowanych kryteriów uzdolnień matematycznych.

Sprawdziany opisane w poprzednich rozdziałach miały weryfikować uzdolnienia do różnych rodzajów aktywności matematycznej, ale każdy z nich dotyczył przede wszystkim jednego jej rodzaju, gdy tymczasem zasadniczą cechą twórczej pracy matematycznej na każdym poziomie jest właśnie synteza różnych jej nurtów. Również i badania uzdolnień matematycznych - jako uzdolnień do różnych czynników aktywności matematycznej - powinny dotyczyć także tej aktywności łącznie, w naturalnej sytuacji, w której różne jej rodzaje splatają się wzajemnie.

Te wszystkie uwagi i zastrzeżenia implikują konieczność badań innego typu; badań, w trakcie których uczeń, postawiony przed pewnym problemem, pracowałby pod ciągłą obserwacją

prowadzącego badania i - co może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwne - przy jego pomocy, jeśli to okaże się niezbędne do przejścia przez wszystkie stadia rozwiązywania problemu. Można by bowiem z góry zaplanować pewne sytuacje, które wystąpiłyby w trakcie pracy nad postawionym zagadnieniem i obserwować reakcje ucznia, jego trudności, sukcesy lub sposoby atakowania problemu. Odpowiednio dawkowana i rejestrowana pomoc prowadzącego badania (jeżeli byłaby potrzebna) pozwoliłaby uczniowi na przejście przez wszystkie zaplanowane sytuacje. Umożliwiłoby to więc porównanie reakcji różnych uczniów w tych samych interesujących nas okolicznościach.

Pewne zastrzeżenia budzi metoda badania z permanentną obserwacją pracy ucznia. Jest to bowiem istotna zmiana sytuacji, w jakiej uczeń pracuje nad zagadnieniem, i w pewnych przypadkach może np. wpływać hamująco na pracę badanego. Również bardzo ważna jest umiejętna i zaplanowana oraz dokładnie rejestrowana ewentualna interwencja badającego. Stwarza to wiele problemów natury technicznej przy przeprowadzaniu tego rodzaju badań.

W niniejszym rozdziale przedstawię badania typu omówionego powyżej, przeprowadzone z grupą dwudziestu uczniów. Rozwiązywali oni w obecności prowadzącego badania serię czterech specjalnie skonstruowanych zadań, których rozwiązanie wymagało różnych rodzajów aktywności matematycznej. Omówię teraz te zadania .

4.2. Zadania zastosowane w badaniach indywidualnych

ZADANIE 1[1]

Dany jest zbiór sześcioelementowy. Na ile co najwyżej niepustych i parami rozłącznych podzbiorów można podzielić ten zbiór tak, aby żadne dwa z otrzymanych podzbiorów nie były równoliczne ?

---

(1) Zwrócono mi uwagę na to, że w tym i pozostałych omawianych tu zadaniach sformułowanie "można podzielić" lub "wystarczy podzielić" nie jest dość jasne. Jednak żaden z badanych uczniów nie ujawnił wątpliwości związanych z takim właśnie sformułowaniem zadania.

Rozwiązując to zadanie próbujemy rozbić zbiór sześcioelementowy na podzbiory spełniające podane warunki. Można rozumować w sposób następujący: ponieważ otrzymane podzbiory mają być niepuste i ma ich być możliwie najwięcej, do pierwszego z nich zaliczymy dokładnie jeden element. Aby spełnić warunek, że żadne dwa nie mogą być równoliczne, każdy następny podzbiór wybieramy tak, by miał o jeden element więcej niż poprzedni. Ponieważ zbiór miał 6 elementów, otrzymujemy więc trzy podzbiory odpowienio jedno, dwu i trójelementowy. Szukana liczba podzbiorów spełniających warunki zadania wynosi więc 3.

Jeżeli uczeń to łatwe zadanie rozwiązał, to otrzymywał polecenie: "Sformułuj zadanie ogólniejsze ", przy czym wcale nie precyzowano, co pod określeniem "ogólniejsze" należałoby rozumieć. Jeżeli uczeń nie potrafił takiego ogólniejszego zadania sformułować, to polecano mu rozwiązać zadanie poprzednie, ale w przypadku zbioru siedmio lub ośmioelementowego; przy tym znów pytano o zadanie ogólniejsze. Jeżeli i to nie dawało rezultatu, to prowadzący badanie sam formułował zadanie 2, które następnie uczeń rozwiązywał.

ZADANIE 2

Na ile co najwyżej niepustych i parami rozłącznych podzbiorów można podzielić zbiór n - elementowy tak, aby żadne dwa z otrzymanych podzbiorów nie były równoliczne ?

Rozwiązanie tego zadania można otrzymać uogólniając metodę stosowaną poprzednio w zadaniu 1. Jeśli bowiem ilość podzbiorów ma być możliwie największa, to muszą one być możliwie najmniej liczne. A że mają być niepuste i żadne dwa nie mogą być równoliczne, zaliczmy, tak jak poprzednio, do pierwszego podzbioru jeden element, do drugiego inne dwa elementy, itd., zaliczając do każdego następnego podzbioru o jeden element więcej niż do poprzedniego aż do wyczerpania wszystkich elementów zbioru n - -elementowego. Gdy n jest większe od sumy pewnych k kolejnych liczb naturalnych, a mniejsze od sumy $k+1$ kolejnych liczb naturalnych, wtedy do ostatniego, k - tego podzbioru zaliczymy k elementów oraz pozostałe (jest ich mniej niż $k+1$) elementy

zbioru. Jeżeli więc k oznacza największą liczbę podzbiorów spełniających warunki zadania 2, musi być największą liczbą naturalną spełniającą nierówność

(1) $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + k \leq n.$

Stosując wzór na sumę ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\frac{(1+k)k}{2} \leq n,$$

czyli $k^2 + k - 2n \leq 0$, a więc

$$k \in \langle k_1, k_2 \rangle, \text{ gdzie } k_1 = \frac{-1 - \sqrt{8n+1}}{2}, \; k_2 = \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}.$$

Ponieważ k ma być największą liczbą naturalną spełniającą nierówność (1), więc

$$k = \left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right] \quad (2).$$

Jeżeli badany uczeń nie potrafił rozwiązać samodzielnie tego zadania, proponowano mu rozważanie szczególnych przypadków dla $n = 7,8,9$ itd. Jeżeli i ta wskazówka nie pomogła, sugerowano wyraźnie zastosowanie tego samego sposobu co w zadaniu 1. Dopiero jeżeli i to nie dało rezultatu, prowadzący badanie naprowadzał ucznia na pomysł zapisania nierówności (1) i jej rozwiązania.

Po rozwiązaniu tego zadania uczeń otrzymywał zadanie 3.

ZADANIE 3

Na ile co najmniej niepustych i parami rozłącznych podzbiorów wystarczy podzielić zbiór n-elementowy, aby mieć pewność, że wśród otrzymanych podzbiorów są co najmniej dwa równoliczne ?

Rozwiązanie tego problemu można otrzymać bezpośrednio jako wniosek z rozwiązania zadania 2. Jeżeli bowiem k jest

(2) Symbol $[x]$ oznacza cechę liczby x.

największą liczbą podzbiorów niepustych i parami rozłącznych, na które można podzielić zbiór n - elementowy tak, aby żadne dwa podzbiory nie były równoliczne, to przy każdym podziale tego zbioru na $k+1$ podzbiorów niepustych i parami rozłącznych musi już być co najmniej jedna para podzbiorów równolicznych. Zgodnie więc z rozwiązaniem zadania 2 otrzymujemy jako odpowiedź liczbę

$$k = [\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}] + 1.$$

Jeżeli uczeń próbując rozwiązać to zadanie nie zauważył jego związku z zadaniem 2, prowadzący badanie po pewnym czasie zwracał mu na to uwagę, prosząc o porównanie treści tego zadania z poprzednim. Jeżeli to nie pomogało, badający pytał o możliwości wykorzystania wyniku zadania 2, czy wreszcie pomagał w analizowaniu treści obu zadań, aby uczeń mógł dojść do rozwiązania.

Jako ostatnie uczeń otrzymywał następujące zadanie:

ZADANIE 4

Na ile co najwyżej niepustych i parami rozłącznych podzbiorów wystarczy podzielić zbiór n-elementowy tak, aby żadne dwa z otrzymanych podzbiorów nie były równoliczne ?

Pomimo podobieństwa treści z zadaniem 2 rozwiązanie jest tutaj zupełnie inne. Zauważmy, że dla n parzystego poszukiwany w zadaniu podział nie istnieje. Już bowiem przy podziale na dwa podzbiory może się zdarzyć, że będą to podzbiory równoliczne. W tej samej sytuacji znajdziemy się przy podziale zbioru na dowolną większą od 2 ilość podzbiorów, ponieważ zawsze mogą się tam pojawić dwa podzbiory jednoelementowe, a więc równoliczne, gdy tymczasem w zadaniu żądamy, aby takich nie było.

Jeżeli natomiast n jest liczbą nieparzystą, to liczba 2 spełnia warunki zadania, bo wobec nieparzystości n żadne dwa podzbiory nie mogą być równoliczne, nie spełnia zaś ich żadna liczba większa od 2.

Jeżeli uczeń nie radził sobie z rozwiązaniem, prowadzący badanie sugerował rozważenie konkretnych wartości n, np. 7,8,9, a w przypadku niepowodzenia doradzał rozróżnienie przypadków: n parzyste, n nieparzyste.

Przeprowadzając omówione wyżej badania chciałem uzyskać odpowiedzi na kilka pytań związanych z różnymi rodzajami aktywności matematycznej potrzebnej do rozwiązania wykorzystanych tu czterech zadań. W szczególności interesowała mnie odpowiedź na pytanie, czy uczeń potrafi sformułować zadanie ogólniejsze od zadania 1, np. przez "uzmiennienie" występujących tam stałych liczbowych. Przez obserwację rozwiązania zadania drugiego, które jest właśnie takim prostym uogólnieniem zadania 1, chciałem stwierdzić, czy uczeń potrafi w twórczy sposób przenieść metodę tam zastosowaną na przypadek ogólniejszy, jakie tutaj wystąpią trudności, czy wtedy uczeń potrafi korzystać z informacji, czy potrafi samodzielnie - w razie trudności - powracać do przypadków szczególnych i wyciągać z nich właściwe wnioski.

Na podstawie obserwacji rozwiązywania zadania 3 chciałem stwierdzić, czy uczeń dokładnie sobie uświadamia treść tego zadania i, co za tym idzie, czy potrafi skojarzyć jego związek z rozwiązaniem zadania 2, mimo formalnych różnic w tekście (w zadaniu 2 występują określenia:"co najwyżej", "można", "żadne dwa nie są równoliczne", natomiast w zadaniu 3 - "co najmniej", "wystarczy", "są co najmniej dwa równoliczne").

Obserwując rozwiązywanie zadania 4 interesowałem się z kolei zagadnieniem, czy mimo zewnętrznych formalnych podobieństw w sformułowaniu tego problemu i zadania 2 (jedyną różnicą w sformułowaniu obu zadań jest to, że wyraz "można", występujący w zadaniu 2, został zastąpiony w zadaniu 4 wyrazem "wystarczy"), uczeń dostrzega, że treść ich jest zupełnie inna i rozwiązania obu zadań są od siebie niezależne.

Skonstruowane tu zadania 1 - 4 dotyczą w zasadzie tego samego prostego problemu - podziału zbioru n-elementowego na podzbiory; podziału spełniającego pewne warunki. Sformułowano je przy użyciu takich określeń jak: "co najwyżej", "co najmniej",

"można", "wystarczy", "żadne dwa", "każde dwa", a więc wymagających precyzyjnego logicznego ich rozumienia w całym kontekście zadania. Umiejętność właściwego odczytania treści zadania mogłaby więc świadczyć o pewnych predyspozycjach do logicznej analizy sytuacji opisanych w zadaniach.

Przeprowadzając badania należy zapewnić sobie taką ich organizację, która umożliwiałaby dostrzeżenie wszystkich istotnych momentów i zarejestrowanie ich w formie dogodnej do późniejszej analizy i opisu. W tym celu przeprowadzając badania z pierwszymi sześcioma uczniami rejestrowałem cały przebieg rozwiązywania przez nich zadań na taśmie magnetofonowej, a także zebrałem arkusze, na których zapisywali swoje pomysły, obliczenia czy szkice rozwiązań. Posługując się tym materiałem oraz własnymi spostrzeżeniami notowanymi bezpośrednio w trakcie badań sporządziłem kwestionariusze do opisu rozwiązań poszczególnych zadań zawierające rejestr interesujących mnie reakcji badanego ucznia na zawarte w zadaniach sytuacje. Kwestionariusze te uwzględniały zarówno sytuacje, które a priori wyróżniłem przy obmyślaniu zadań, jak również i te, które wystąpiły w trakcie przeprowadzania badań wspomnianych już sześciu uczniów (po jednym z klas II, III i IV w każdej z grup A i B). Przeprowadzając badania z następnymi uczniami nie nagrywałem już całego ich przebiegu, ograniczając się do wypełnienia kwestionariuszy bądź w trakcie rozwiązywania zadania przez ucznia, bądź bezpośrednio po zakończeniu badania. Dla przykładu zacytuję in extenso kwestionariusz do zadania 1.

I Czy uczeń zadaje pytania ? O co pyta ?

II Czy rozumie zadanie inaczej niż to sugeruje treść, a jeżeli tak, to jak rozumie zadanie ?

III Czy przy próbach rozwiązania uwzględnia tylko pewne założenia? Które ? W jaki sposób następuje weryfikacja ?

IV Jak wyglądają próby, które nie prowadzą do poprawnych wyników ?

V Rozwiązanie poprawne. Uzasadnienie.

VI Stopień sprecyzowania odpowiedzi.

VII Ingerencja prowadzącego badania.

VIII Inne uwagi.

4.3. Analiza wyników badań indywidualnych

W badaniach indywidualnych omawianych w tym rozdziale wzięło udział 20 uczniów, w tym trzynastu z grupy A i siedmiu z grupy B. Ilość uczniów z poszczególnych klas podaję w tabeli 4.1.

Tabela 4.1

Grupa / Klasa	A	B
II	3	2
III	7	3
IV	3	2
Razem	13	7

Te nierówne ilości uczniów z obu grup uczestniczących w badaniach spowodowane zostały trudnościami organizacyjnymi związanymi z przeprowadzaniem tych badań. Aby uczniowie, którzy już rozwiązywali te zadania, nie kontaktowali się z uczniami, którzy dopiero mieli je rozwiązywać, byli wybierani na ogół z różnych klas, a badania odbywały się w różnym czasie (na ogół w jednym dniu rozwiązywał zadanie tylko jeden uczeń).

Ze względu na małe liczebności badanych grup, nie staram się tu porównywać rezultatów, lecz raczej wydzielić cechy charakterystyczne odpowiedzi uczniów z grupy A.

Przedstawiając zadania wykorzystane w badaniach opisanych w tym rozdziale sformułowałem również pewne pytania, na które chciałem uzyskać odpowiedzi. Zestawienie odpowiedzi na zasadnicze z tych pytań znajduje się w tabeli 4.2. Z danych zawartych w tej tabeli wynika, że umiejętność uogólnienia zadania 1 przez "uzmiennienie stałej", nie tylko nie różnicuje uczniów grupy A (wszyscy oni bez trudności tak właśnie uogólnili zadanie 1), ale także niezbyt wyraźnie odróżnia uczniów obu grup. Wyraźnie natomiast różnicuje uczniów grup A i B zarówno umiejętność twórczego przeniesienia metody rozwiązania zadania 1 na zadanie 2, jak też związane z "dyscypliną myślenia"

dostrzeżenie związku zadania 3 z zadaniem 2 i różnicy między zadaniami 2 a 4.

Tabela 4.2

Numery kolejne i symbole uczniów / Treść pytania		1. Czy uczeń potrafi samodzielnie sformułować zadanie ogólniejsze od zadania 1	2. Czy uczeń potrafi samodzielnie, w twórczy sposób przenieść na zad. 2 metodę rozwiązywania zadania 1	3. Czy uczeń samodzielnie dostrzega związek zad.3 z zad.2	4. Czy uczeń samodzielnie dostrzega różnicę między zad. 2 a zad.4	5. Klasa
1	A_4	+	+	-	+	IV
2	A_5	+	+	+	+	III
3	A_9	+	+	-	+	III
4	A_{13}	+	+	+	-	IV
5	A_{14}	+	+	+	+	III
6	A_{15}	+	+	+	+	II
7	A_{24}	+	+	+	+	III
8	A_{25}	+	+	+	+	III
9	A_{28}	+	+	+	+	III
10	A_{29}	+	+	+	+	II
11	A_{35}	+	+	+	+	III
12	A_{38}	+	+	+	+	II
13	A_{40}	+	+	+	+	IV
14	B_3	-	-	-	-	IV
15	B_9	+	+	-	-	III
16	B_{12}	+	-	-	+	II
17	B_{15}	+	-	-	+	III
18	B_{19}	+	-	-	-	II
19	B_{26}	-	-	+	-	III
20	B_{28}	+	-	-	-	IV

+ odpowiedzi pozytywne

- odpowiedzi negatywne

Omówię teraz najistotniejsze spostrzeżenia poczynione w trakcie obserwacji pracy uczniów nad rozwiązywaniem zadań. Zwrócę najpierw uwagę na uczniów z grupy A.

Rozwiązując zadanie 1 uczniowie z klasy II pytali: "Co to są zbiory równoliczne i parami rozłączne ?". To samo pytanie zadaje również czterech uczniów z trzeciej klasy. Uczniowie z klasy czwartej nie stawiają tu pytań. Trzy osoby przystępujące do rozwiązywania zadania 1 dostrzegły tam pytanie, którego w rzeczywistości nie było (na ile sposobów można dokonać takiego podziału). Pozostali uczestnicy badań w grupie A od początku rozumieli zadanie 1 właściwie. Jego rozwiązanie nie sprawiło im kłopotu. Charakterystyczne jest, że oprócz trzech uczniów, pozostali, formułując odpowiedzi na pytanie postawione w tym zadaniu, wymieniali bardzo wyraźnie wszystkie warunki, jakie spełnia znaleziona liczba 3. Tak samo formułowali również odpowiedzi w pozostałych zadaniach. Wydaje się, że miało to - jako próba refleksji nad tym, co oznacza uzyskany rezultat - pozytywny wpływ na późniejsze dostrzeżenie związku między zadaniem 3 a zadaniem 2. Interwencja prowadzącego badania była niewielka i sprowadzała się do podania odpowiedzi na pytania dotyczące nieznanych określeń (co omawiałem powyżej); w dwóch przypadkach do polecenia : "odczytaj jeszcze raz treść zadania", lub zwrócenia uwagi: "czy o to pytamy w zadaniu ?".

Wszyscy uczniowie z grupy A bez trudności uznali zadanie 2 za ogólniejsze od zadania 1 i wszyscy potrafili samodzielnie przenieść metodę rozwiązania zadania 1 na zadanie 2. Rozwiązując to zadanie niektórzy uczniowie samorzutnie wracali do przypadków szczególnych,np. weryfikując z ich pomocą poprawność warunku sformułowanego w postaci równania. Są również uczniowie, którzy nie wymieniają na początku wszystkich warunków, jakie ma spełniać liczba k będąca rozwiązaniem problemu (np. nie piszą, że $k \in N$ i że k ma być największą liczbą spełniającą poprzednie warunki), ale dopiero po rozwiązaniu nierówności $1 + 2 + \ldots + k \leq n$ wybierają właściwe k. Rozwiązując to zadanie uczniowie ci, niejako "przeskakując" nad pewnymi warunkami i idąc za główną myślą rozumowania, potrafili jednak samodzielnie do tych warunków wrócić i uzyskać poprawną odpowiedź.

W rozwiązaniu zadania 3 zwraca uwagę fakt, że prawie wszyscy uczniowie z grupy A po przeczytaniu jego treści wracają do zadania 2 (być może wiąże się to z formułowanymi przez nich, na ogół bardzo szczegółowymi, odpowiedziami w zadaniu 2), analizują jego treść, przy czym niektórzy nawet wyodrębniają i porównują poszczególne warunki. W efekcie dostrzegają związek tego zadania z zadaniem 2 i otrzymują rozwiązanie. Także ci uczniowie, którzy samodzielnie nie dostrzegli tego związku, po propozycji porównywania treści obu zadań bez trudności znajdują poprawne rozwiązanie.

Większość uczniów przystępując do rozwiązywania zadania 4 wracała do poprzednich zadań, porównując tematy. To na ogół (poza jednym przypadkiem) wystarczyło już do znalezienia rozwiązania, przy czym najczęściej rozstrzygano przypadek, gdy n jest liczbą nieparzystą, a dopiero potem znajdowano rozwiązanie dla n parzystego. Niektórzy uczniowie dochodzili do rozwiązania przez rozważenie przypadków szczególnych (np. $n = 6$ i $n = 7$), przedstawiając jednak w odpowiedzi od razu rozumowanie ogólne.

Bardzo często w trakcie rozwiązywania zadań uczniowie samorzutnie wracali do ponownego odczytywania ich treści i porównywania poszczególnych warunków. Można tu wyróżnić kilka postaw uczniów w trakcie badań. Paru uczniów "myślało głośno", prowadząc jakby dyskusję z samym sobą. Byli tacy, którzy w milczeniu rozważali treść zadań, podając od razu gotowe, sprecyzowane odpowiedzi. Jedni notowali przebieg swych rozumowań dość szczegółowo na arkuszu, inni natomiast pisali bardzo niewiele. Również czas rozwiązywania tych zadań był różny (od 10 do około 35 minut) . Nie są to więc obserwacje, które by można uważać za charakterystyczne dla całej grupy; raczej określają one indywidualne właściwości poszczególnych badanych.

Praca uczniów z grupy B nad rozwiązywaniem omawianej tu serii czterech zadań wyraźnie odróżnia ich od uczniów z grupy A. Czterech uczniów ma trudności ze zrozumieniem treści zadania 1; po interwencji prowadzącego badanie dwóch zorientowało się w problemie, a dwóch, mimo wyjaśnień, do końca nie miało pewności, jak rozumieć łącznie postulowane w zadaniu warunki. Udzielając odpowiedzi na pytanie sformułowane w tym zadaniu trzech uczniów

daje pełne i poprawne uzasadnienie, pozostali mają trudności z podaniem wszystkich warunków,jakie spełnia znaleziony podział. Tylko dwóch uczniów miało kłopoty z uogólnieniem pierwszego zadania; jeden z nich, zamiast uogólniać, zmieniał treść zadania, a drugi proponował zastąpienie liczby 6 kolejno przez 10, 100, nie mogąc się zdecydować na n.

Rozwiązując zadanie 2 tylko jeden uczeń potrafił samodzielnie zapisać warunek w postaci nierówności, pozostali zaś nie potrafili tego zrobić bez wyraźnych sugestii ze strony prowadzącego badanie. Widoczna tu była stosunkowo duża sprawność rachunkowa (np.prawie wszyscy bez trudności rozwiązali poprawnie nierówność stosując wzór na sumę n początkowych liczb naturalnych) . Natomiast bardzo duże trudności mieli ci uczniowie z uwzględnieniem pozostałych warunków ($k \in N$ i k maksymalne). Nawet po wyraźnych wskazówkach ze strony prowadzącego badanie uczniowie nie radzili sobie z uwzględnieniem wszystkich warunków jednocześnie. Podając odpowiedź, w większości nie uświadamiali sobie, co oznacza znaleziona liczba i nie umieli tego poprawnie wypowiedzieć.

Tylko jedna osoba zauważa samodzielnie związek zadania 3 z poprzednim i podaje poprawne rozwiązanie. Pozostali badani nie dostrzegają tego związku i do rozwiązania dochodzą dopiero w wyniku wyraźnie kierowanej przez prowadzącego badanie analizy treści obu zadań (ogromne trudności w uświadomieniu sobie, co oznacza rozwiązanie zadania 2 i czego żądamy w zadaniu 3).

Tylko jeden uczeń doszedł samodzielnie podczas rozwiązywania zadania 4 do rozważania przypadków : n parzyste, n nieparzyste, ale,co warto podkreślić, w każdym z poprzednich zadań zaczynał on rozwiązywanie od rozważania takich właśnie przypadków. Poprzednio schemat ten nie dał wyników, natomiast w tym zadaniu prowadził do celu. Mimo to uczeń ten miał duże trudności z przypadkiem, gdy n jest liczbą parzystą, podobnie zresztą jak i pozostali uczniowie. Dwóch z nich do końca, mimo wyjaśnień ze strony prowadzącego badanie, miało wyraźne kłopoty w zrozumieniu rozwiązania, gdy n jest liczbą parzystą.

Niektórym uczniom wyraźnie przeszkadza w rozwiązywaniu zadań to , że n nie jest daną numerycznie liczbą ("nie wiem, ile n wynosi" - kilkakrotnie stwierdza uczeń II klasy).

Polecenie odwołania się do szczególnych przypadków : n = 6, n = 7 itp. wyraźnie tutaj pomaga. Wielu uczniów ma trudności z rozróżnieniem w kontekście zadań znaczenia słów "można" i "wystarczy". Często też przy próbach rozwiązania pewne warunki są przez nich pomijane. Jeden z uczniów stwierdza, że "tego typu zadań nie uczyłem się rozwiązywać" (typowe dla uczniów pilnych i mniej zdolnych), inny zaś po przeczytaniu zadania 1 mówi "nie rozumiem, o co tu chodzi" i samodzielnie nie podejmuje prób zrozumienia treści. Są uczniowie, którzy w trakcie pracy nad zadaniami wyraźnie oczekują od prowadzącego badanie potwierdzenia poprawności kolejnych kroków, nie próbując ich samodzielnie weryfikować. Na podstawie obserwacji pracy uczniów z grupy B wydaje się, że nie potrafiliby oni samodzielnie rozwiązać tych zadań

4.4. Wnioski

Badania opisane w niniejszym rozdziale pozwoliły ujawnić kilka cech charakterystycznych dla matematycznej aktywności uczniów związanej z problemami, przed którymi postawiono badanych.

1° Uzdolnienie do dostrzegania i formułowania prostych uogólnień numerycznych (np. przez uzmiennienie stałej), nie różnicuje uczniów z grupy A, ani nawet nie odróżnia wyraźnie uczniów z tej grupy od uczniów z grupy B.

2° Wyraźnie natomiast wyróżnia uczniów grupy A zdolność do twórczego przeniesienia metody rozwiązania zadania na zadanie ogólniejsze.

3° Uczniowie grupy A potrafią samorzutnie odwoływać się do przypadków szczególnych przy weryfikacji formułowanych hipotez częściowych.

4° W trakcie przeprowadzanych rozumowań uczniowie z grupy A potrafią "przeskoczyć" pewne ogniwa rozumowania idąc za główną ideą i wracać później do weryfikacji tych ogniw.

5° Starannie formułowane odpowiedzi, z pełnym wymienianiem wszystkich warunków, jakie spełniają znalezione rozwiązania, są charakterystyczne dla uczniów z grupy A jako forma uświadamiania sobie , co oznacza znalezione rozwiązanie.

6° Charakterystyczną trudnością występującą w grupie B przy rozwiązywaniu tych problemów są kłopoty z jednoczesnym uwzględnieniem kilku warunków.

7° Wśród uczniów grupy B obserwujemy pojawienie się takich postaw (niekoniecznie charakterystycznych dla wszystkich uczniów tej grupy), które nie ujawniły się w grupie A, jak np. uporczywe trzymanie się pewnego schematu postępowania bez względu na okoliczności, czy też bierność i zniechęcenie w przypadku napotkania pierwszej trudności.

5. WNIOSKI Z PRZEPROWADZONYCH BADAŃ

Przeprowadzone badania, mimo stosunkowo niewielkich populacji uczniów biorących w nich udział, pozwoliły wyróżnić pewne cechy charakterystyczne dla aktywności matematycznej grupy uczniów uznanych w opinii szkolnej za zdolnych. W szczególności uczniowie ci wyróżniają się:

1° umiejętnością twórczego odbierania, przetwarzania i wykorzystywania informacji matematycznej w sensie, jaki nadano tym określeniom w pracy,

2° umiejętnością poprawnego wykorzystywania definicji w rozumowaniach w przypadku, gdy jest ona w konflikcie z jakimś innym czynnikiem,

3° umiejętnością kontrolowania poprawności przeprowadzonego rozumowania, zarówno od strony formalnej, jak i treściowej,

4° aktywną reakcją na pojawienie się sprzeczności w wyniku rozumowania,

5° umiejętnością twórczego przeniesienia metody rozwiązania danego problemu na zagadnienie ogólniejsze,

6° umiejętnością przeprowadzania analizy treści zadań o złożonej strukturze logicznej.

Konieczne jest jednak sprawdzenie w dużej populacji, czy wyróżnieni przez wyniki takich sprawdzianów uczniowie są również

uznawani przez opinię szkolną za zdolnych i jak wygląda ich dalszy rozwój matematyczny. Byłaby to weryfikacja zasadności sformułowanych wyżej wniosków, przeprowadzona w odwrotnym kierunku do tego, który zastosowałem w pracy.

Wymienione wyżej cechy aktywności matematycznej, które wyróżniają grupę uczniów zdolnych, mogą posłużyć do określenia w oparciu o nie pewnych kryteriów uzdolnień matematycznych ucznia. Ujawnienie się bowiem w aktywności matematycznej badanego ucznia jednej z wymienionych uprzednio jej cech można by traktować jako przejaw uzdolnień do danego rodzaju aktywności matematycznej. W pracy ograniczono się tylko do kilku specyficznych cech. Sądzę, że przeprowadzony sondaż upoważnia do uznania za właściwe stosowanie podobnej metody w badaniu uzdolnień uczniów do różnych czynników aktywności matematycznej. Metoda ta polegałaby na wyróżnianiu rozmaitych takich czynników i doborze odpowiadających im sprawdzianów.

Przeprowadzony sprawdzian upoważnia mnie również do stwierdzenia, że tzw. "wyższe formy" aktywności matematycznej, dotąd rzadko badane metodą testów (zwykle nastawionych na kontrolę umiejętności i sprawności) można również badać za pomocą bardzo prostych sprawdzianów. Ich cechą charakterystyczną powinno być to, że odnoszą się one do sytuacji nietypowych dla standardowych zadań szkolnych, ale nie wymagają ani dużej wiedzy, ani sprawności technicznych. Sądzę,że na tej drodze należałoby szukać realizacji postulatu, wysuwanego przez współczesnych dydaktyków matematyki w wyniku krytyki stosowanych dotąd testów , dotyczącego wypracowania sposobów badania tych " wyższych form" aktywności matematycznej uczniów.

Równocześnie jednak, jak pokazały także badania indywidualne, bezpośrednia obserwacja pracy ucznia jest koniecznym uzupełnieniem badań mających na celu ujawnienie tych "wyższych form" aktywności matematycznej. Oczywiście, tego rodzaju sprawdziany nie mogą zastąpić stałej kontroli postępów w opanowywaniu wiedzy i sprwności czy umiejętności rozwiązywania zadań i problemów.

Trafne wyselekcjonowanie uczniów "zdolnych" według opinii szkolnej zależy istotnie od czasu, w jakim ten sam nauczyciel

ma możność obserwowania ucznia; im ten czas jest dłuższy, tym opinia bardziej uzasadniona i wiarygodna. Uzupełnienie tej opnii przez badania tego typu, co opisane w niniejszej pracy, można by więc przeprowadzać przed przejściem uczniów do klas różnicujących już całą populację ze względu na dalszy kierunek nauki.

Wydaje się niecelowe stosowanie do badania uzdolnień matematycznych tych samych sprawdzianów dla grupy uczniów "zdolnych" i zupełnie "niezdolnych" według opinii szkolnej, gdyż w przypadku tych ostatnich sprawdziany te są po prostu dla uczniów niezrozumiałe i wyniki niejako z góry są przesądzone. Należałoby się więc ograniczyć tylko do uczniów reprezentujących już pewien poziom wiedzy, ustalając go np. za pomocą testów wiadomości

Ze względu na złożoną strukturę uzdolnień matematycznych wydaje się celowe stosowanie zarówno sprawdzianów mogących ujawniać uzdolnienia do poszczególnych rodzajów aktywności matematycznej, jak i takich, które by weryfikowały te uzdolnienia w złożonej sytuacji, wymagającej różnych rodzajów tej aktywności.

Publikacje wykorzystane

FREUDENTHAL, H.; Mathematik als pädagogische Aufgabe, Klett, Stuttgart 1973.

KRYGOWSKA, Z.; Zarys dydaktyki matematyki, cz.II i cz.III, PZWS, Warszawa 1977.

KRYGOWSKA, Z., i J.Maroszkowa; Geometria dla klasy I liceum oglnokształcącego, PZWS, Warszawa 1973.

KLAKLA, M.: Dostrzeganie problemów a uzdolnienia matematyczne, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP Kraków, zeszyt 67, Prace z Dydaktyki Matematyki II (1978) str. 87 - 120.

Math. École, nr 61 - 62 (1974),

NOWECKI, B.: Przyczynek do badań nad rozumieniem przez uczniów tekstu matematycznego, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP Kraków, zeszyt 54 (1974), str. 65 - 110.

POLYA, G.: Odkrycie matematyczne, Warszawa 1975.

THOM, R.: Czy istnieje matematyka nowoczesna ?, Wiadomości Matematyczne 18 (1974),str 130 - 142.

SOME RESEARCH ON RECOGNITION OF MATHEMATICAL ABILITY

Summary

It is shown that children, considered by the teacher as mathematically gifted, generally possess certain skills pertaining to creative mathematical activity: ability of creative perception, transforming and utilizing mathematical information, and ability of orderly thinking.

Research has been based on the analysis of solutions of some specially constructed mathematical problems.