ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 2 (1982)

KRYSTYNA WUCZYŃSKA
Sieniawka

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Wybrane problemy nauczania matematyki w szkołach średnich na początku Drugiej Rzeczpospolitej

1. PROGRAMY NAUCZANIA

Wiek XX przyniósł wzrost zainteresowania sprawami nauczania matematyki niemal we wszystkich cywilizowanych krajach świata. Nauczanie nacechowane zasadami neohumanistycznymi w coraz mniejszym stopniu zaspokajało potrzeby wynikające z rozwijającej się techniki i gospodarki społeczeństw. Oprócz preferowanych wartości merytorycznych, formalnych i etycznych kształcenia językowo-historycznego zaczęto podkreślać wartości nauczania przedmiotów ścisłych, a w tym bardzo mocno matematyki. Ożywił się proces poszukiwania nowych sposobów nauczania tego przedmiotu. W wielu państwach zostały wprowadzone nowe programy nauczania. Często wprowadzenie nowych programów nauczania matematyki wiązało się z ogólną reformą szkolnictwa średniego.

Do ogólnego ruchu reformatorskiego włączały się z biegiem czasu również państwa, pod których zaborem znajdowały się ziemie polskie. Reforma nauczania wprowadzona w roku 1902 we Francji wpłynęła na poddanie rewizji programów i metod nauczania w Niemczech. W roku 1904 w ramach prac Towarzystwa Przyrodników i Lekarzy Niemieckich została powołana specjalna "Komisja Nauczania".

Przedstawiła ona na kongresie w Meranie 24 - 30 września 1905 r. propozycje zmian w nauczaniu przedmiotów przyrodniczych w niemieckich szkołach średnich, opracowane w oparciu o aktualny stan ich nauczania. Projekt ten, zwany Programem Merańskim, omawiał nauczanie poszczególnych przedmiotów z uwzględnieniem konkretnych wskazań i wymagań dydaktycznych, planów godzin dla wszystkich typów szkół średnich oraz postulatów dotyczących organizacji szkolnictwa średniego w ogóle.

Przed nauczaniem matematyki w szkole średniej Program stawiał następujące postulaty:

"1. Przegląd naukowy materiału w szkole przerabianego.
2. Pewne wyrobienie poglądu matematycznego i zużytkowanie go do rozwiązywania zadań.
3. Zrozumienie znaczenia matematyki dla dokładnego poznania przyrody i współczesnej kultury w ogóle"[Projekty reformy, 1907, str.231] .

Postawione postulaty miały być realizowane poprzez:

I. Dostosowanie nauczania do naturalnego rozwoju umysłowego uczniów.

W związku z tym (w objaśnieniach do programu) zalecano, aby:

- nauczany materiał miał strukturę genetyczną zamiast ściśle logiczno - dedukcyjnej (w szczególności dotyczyło to geometrii) do metod dowodzenia należało włączyć ruch, konstrukcje, rysunek;
- nauczanie w klasach niższych oprzeć należy na intuicji i indukcji, w oparciu o które w klasach wyższych można stosować logikę i dedukcję;
- szeroko stosować zasadę poglądowości w nauczaniu.

II. Rozwijanie zdolności matematycznego ujmowania otaczającego świata zjawisk.

Realizacja tego zadania sprowadzona została do dwóch nakazów stanowiących podstawę reformy:

- kształcenie wyobraźni przestrzennej;
- wyrabianie nawyków myślenia funkcyjnego.

III. Wskazywanie związków między różnymi częściami matematyki. Fuzja różnych przedmiotów matematyki szkolnej.

Pojęcie funkcji stało się w matematyce szkolnej pojęciem o podstawowym znaczeniu. Z jednej strony przypisywano mu znaczenie interdyscyplinarne dla wszystkich działów matematyki szkolnej, z drugiej - badanie zależności funkcjonalnej pomiędzy zjawiskami różnego rodzaju stanowiło główny przedmiot zastosowań matematyki. Ponieważ jednak funkcja swoją nieporównywalną rolę w opisywaniu i badaniu przyrody spełnia dopiero po wprowadzeniu pojęć pochodnej i całki, widziano konieczność wprowadzenia tych pojęć do programu szkoły średniej.

Program Merański szybko został spopularyzowany poza granicami Niemiec, a nawet miał wpływ na powstanie w roku 1908 Międzynarodowej Komisji do Spraw Nauczania Matematyki. W wielu krajach idee Programu stały się wytyczną reform nauczania matematyki w szkołach średnich. Między innymi nowe programy nauczania matematyki, wprowadzone w roku 1909 w Austrii, opracowano pod wyraźnym wpływem Programu Merańskiego. W Rosji, na zjazdach nauczycieli matematyki w roku 1912 i 1914, postulowano wprowadzenie do programów nauczania zmian wynikających z jego tez.

Wiadomości o zmianach w nauczaniu matematyki w szkołach średnich w Niemczech i innych krajach docierały do nauczycieli polskich. Dużo miejsca poświęcały tym zagadnieniom czasopisma polskie: "Wiadomości Matematyczne", "Szkoła Polska", "Przegląd Pedagogiczny", "Muzeum". Między innymi w kolejnych numerach "Szkoły Polskiej" (Nr 5 - 9, 1907 r.),publikowano "Projekty reformy wykładu matematyki i przyrodoznawstwa ułożone przez Komisję Naukową Towarzystwa Przyrodników i Lekarzy Niemieckich".

Systematycznie proces reformowania śledziły "Wiadomości Matematyczne". Oprócz sprawozdań ze zjazdów i konferencji oraz odnośnych artykułów regularnie umieszczano w nich sprawozdania z literatury, recenzje i bibliografie książek polskich i obcych. Kronika informowała o wydarzeniach bieżących na świecie.

W roku 1905 Towarzystwo Nauczycieli Szkół Wyższych w Krakowie powołało Komisję dla Reformy Szkół Średnich na terenie zaboru austriackiego. W skład Komisji weszli głównie nauczyciele szkół średnich z Krakowa. W roku 1906 w "Muzeum" (organie T.N. Sz.W.) ukazał się program tej Komisji pt. "Nasza szkoła średnia, krytyka jej podstaw i konieczność reformy". Dokonano w nim

rzeczowej analizy organizacji szkolnictwa średniego i programów nauczania poszczególnych przedmiotów. Bez krytykowania generalnie wszystkiego wymieniono, co konkretnie na taką krytykę zasługuje, i podano własne propozycje zmian.

W zakresie nauczania matematyki postulowano:

1. znacznie ograniczyć materiał nauczania i inaczej rozłożyć go w czasie;
2. wyrzec się dążenia do nauczania wielu rzeczy różnorodnych, a uczyć gruntownie rzeczy zasadniczych;
3. unikać przykładów mechanicznych, rozwiązywanych za pomocą gotowych sposobów, a przerabiać dużą ilość zadań rachunkowo prostych, ale wymagających logicznego myślenia;
4. w nauczaniu, szczególnie przy przerabianiu geometrii i arytmetyki teoretycznej, posługiwać się metodą heurystyczną;
5. nauczanie algebry oprzeć na pojęciu funkcji, które jest niezbędne do zrozumienia matematyki i do zastosowań w fizyce;
6. opracować nowe podręczniki do geometrii.

W lipcu 1907 roku na X Zjeździe Przyrodników i Lekarzy Polskich we Lwowie, podjęto 2 uchwały następującej treści:

"1) Zjazd, widząc w planach szkolnych niedostateczne uwzględnienie przedmiotów przyrodniczych, uznaje konieczną potrzebę powiększenia liczby godzin poświęconych w szkole średniej tym naukom i w ogóle potrzebę rewizji planów nauczania w gimnazjach, szkołach realnych itp.

2) Zjazd wyraża opinię, że metody nauczania matematyki w szkole średniej powinny ulec zmianie i zwraca się do pracujących w tym kierunku instancji, tak w Królestwie Polskim jak i w Galicji, z prośbą, aby we wzajemnym porozumieniu, jak najrychlej opracowały program tej zmiany." (Wiadom. Mat.12, Dodatek 4, 1908 r.).

W roku 1909 w Austrii zostały wprowadzone nowe plany nauczania do szkół średnich, które z nieznacznymi zmianami stały się obowiązujące także w szkołach z polskim językiem nauczania. Również w licznie zakładanych w tym czasie polskich szkołach prywatnych nauczanie nie odbiegało zasadniczo od obowiązujących programów nauczania.

Nowe plany poszerzyły cele stawiane przed nauczaniem

matematyki. Do sformułowanego w planach z roku 1900 celu: "gruntowne poznanie i dokładne opracowanie matematyki elmentarnej", dodano: "tudzież zrozumienie i zastosowanie pojęcia funkcji". Cele nauczania geometrii rozszerzono, o "przenikanie się stereometrii i geometrii wykreślnej". W uwagach do planu omówiono sposób opracowywania poszczególnych działów. Przestrzegano przed zewnętrznym formalizmem i przedwczesną abstrakcją. Podkreślano wzajemne znaczenie poszczególnych działów matematyki. Materiał o funkcjach uwypuklono jako szczególnie ważny i zalecano wzbogacać go przykładami funkcji z fizyki i przyrody. Zaznaczono, że znajdującej się w programie wzmianki o różniczkowaniu nie należy traktować jako postulatu pełnego wykładu na ten temat , ale jako zalecenie wprowadzenia rachunku różniczkowego tam, gdzie prowadzi to do uproszczenia rachunków.

W szkołach realnych od klasy II do VII prowadzony był dodatkowy przedmiot: rysunki geometryczne (w klasach V - VII była to po prostu geometria wykreślna). W konsekwencji tego zwiększone zostały wymagania z geometrii wykreślnej na egzaminach dojrzałości. Okólnik Rady Szkolnej Krajowej w sprawie egzaminu dojrzałości z tego przedmiotu w szkołach realnych, w roku 1913 zarządził: "... wymagania z geometrii wykreślnej uzupełnia się w ten sposób, że egzaminanci mają na przyszłość wykazać także znajomość głównych zasad rzutów ukośnych, aksonometrii i rzutów centralnych w rozmiarze odpowiadającym planowi nauki."

Nowe plany nauczania stały się przedmiotem dyskusji polskich nauczycieli. Szukano środków do jak najlepszej ich realizacji. Uważano, że ich wdrażanie zabezpiecza interesy narodowe. Wreszcie, wyraźnie określano własne, polskie stanowisko w omawianych kwestiach. Dla naszkicowania charakteru i przedmiotu działalności polskich nauczycieli matematyki w tym okresie niech posłuży kilka szczegółowych przykładów.

I. Dnia 6.II.1911 r. w Krakowie odbyła się konferencja nauczycieli, inspektorów i zaproszonych gości (uczestniczyli m.in. Placyd Dziwiński, Ignacy Kranz, Antoni Łomnicki, Ludwik Hordyński) , na której przedmiotem obrad był kwestionariusz z pytaniami:

"1. Jakim sposobem należy przy nauce matematyki rozwijać systematycznie i metodycznie pojęcie funkcji i wprowadzać uczniów w tzw. myślenie funkcjonalne ? Od której klasy należałoby rozpocząć tę metodyczną naukę ? Jak należałoby przy tej nauce stosować metodę analityczną i wykreślną ?
2. Jak należy wprowadzać i metodycznie rozwijać zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego w najwyższych klasach szkół średnich i stosować je do zagadnień z geometrii analitycznej ?
3. Jak należy rozłożyć materiał przepisany ze stereometrii na klasy wyższe, zachowując przy tym ciągłą łączność stereometrii z algebrą i arytmetyką ? "(Hordyński, 1913, str.163).

II. W dniach 18 - 23.VII.1911 roku odbył się w Krakowie XI Zjazd Lekarzy i Przyrodników Polskich. W sekcji matematyki zajmowano się reformą nauczania matematyki. Referaty wygłosili: Samuel Dickstein (Warszawa), Antoni Łomnicki (Lwów) , Stanisław Zaremba(Kraków). Uchwała Zjazdu określała stanowisko w sprawie programów nauczania matematyki w szkołach średnich. Postulowano nauczanie arytmetyki w klasach niższych w połączeniu z propedeutyką geometrii. W klasach wyższych włączenie do wykładu teoretycznego arytmetyki elementów teorii grup i teorii liczb i wzbogacenie geometrii o początki geometrii rzutowej i wykreślnej. Sugerowano, ze względu na zastosowania praktyczne, zapoznanie uczniów z elementami rachunku prawdopodobieństwa, a ze względu na zastosowania do zagadnień astronomicznych - z elementami trygonometrii sferycznej. Wykład trygonometrii łączono z geometrią analityczną. Zalecano fuzję planimetrii ze stereometrią zarówno w kursie propędeutycznym, jak systematycznym. Podkreślano, że kurs geometrii powinien uwzględniać w miarę możności wyniki nowych badań nad podstawami geometrii. W trakcie całej nauki szkolnej zalecano kształtować pojęcie zmienności i zależności pomiędzy wielkościami, aż do wprowadzenia elementów analizy matematycznej. Zaznaczono przy tym, że należy je wprowadzać za pomocą metod możliwie ścisłych na podstawie pojęcia granicy. Wszelkie

namiastki ścisłych definicji, rozumowań i dowodów matematycznych uznano za szkodliwe dla matematycznego wykształcenia młodzieży.

III. Zarząd Główny T.N.Sz.W. 15.II.1913 roku przedłożył Radzie Szkolnej Krajowej[1] memoriał wraz z projektem planu naukowego 8 - letniej szkoły realnej w Galicji. Celem projektu było: "zbudowanie szkoły, która wychowywałaby dla społeczeństwa pracowników i pionierów rozwoju ekonomicznego"(Projekt planu, 1913) . W taki sposób uzasadniano w memoriale konieczność jej utworzenia. Zaniedbanie gospodarcze Galicji powoduje jej słabość w każdej innej dziedzinie,a przełamanie tego stanu jest możliwe tylko przez przygotowanie własnej, zaangażowanej inteligencji ekonomicznej i technicznej. Tymczasem istniejące gimnazja przygotowują ludzi subtelnych, żywo interesujących się sztuką, ale dalekich od zagadnień życia praktycznego. Potrzebna jest jeszcze inna szkoła, i powinna nią być szkoła realna. Istniejące szkoły tego typu, w swoim aktualnym stanie organizacyjnym, roli tej nie mogą spełnić. Przede wszystkim nie mają one wyraźnie zaznaczonego profilu kształcenia, nie mają własnej podstawy naukowej opartej na określonej i istotnie preferowanej grupie przedmiotów. Ponadto dają absolwentom znacznie mniejsze uprawnienia niż gimnazja. W efekcie rekrutacja młodzieży do tych szkół jest coraz mniejsza i jest to młodzież coraz słabsza. Fakt, że taki sam układ organizacyjny szkół w Austrii jest odpowiedni dla tego kraju, nie może tu być argumentem. Austria ma już rozwinięte życie gospodarcze, co stanowi naturalny bodziec do interesowania się sprawami ekonomicznymi. W naszym społeczeństwie brakuje przykładów przedsiębiorczości przemysłowej lub handlowej. Sytuacja polityczna wytworzyła brak wiary w powodzenie w tym kierunku. Panuje nastrój biernego akceptowania istniejącego stanu, mimo że jest on bardzo mierny. I dlatego polskie

---

[1] Rada Szkolna Krajowa, naczelny autonomiczny organ szkolnictwa polskiego w zaborze austriackim. Działała w latach 1867 - 1921. Por.Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, t.9, str. 655.

szkoły realne muszą mieć inny charakter, bo mają do spełnienia inn funkcje. Argumentem niepisanym był też fakt, że szkoły realne były ustawodawczo zależne od Sejmu Krajowego.

Przedłożony projekt planu naukowego gimnazjum realnego zakładał, że nauka w szkole powinna być oparta na samodzielnej pracy ucznia i ćwiczeniach praktycznych. Podstawą kształcenia miała być grupa nauk matematyczno-przyrodniczych, co zostało wyraźnie zaznaczone już planem godzin. Największą ich ilość otrzymała matematyka (33 godziny) . Geometria wykreślna, jako oddzielny przedmiot, miała być nauczana już od kl.V. Zakres materiału programowego był duży, chociaż w uwagach ogólnych zaznaczono, że nie chodzi tu o szerokie jej poznanie, lecz o gruntowne. W programie umieszczono m.in. geometrię analityczną, zasady rachunku prawdopodobieństwa, elementy rachunku różniczkowego (bez całki). Program geometrii wykreślnej był najobszerniejszy ze wszystkich programów omawianego okresu.

Proponowany projekt szkoły realnej został zatwierdzony przez Sejm Galicyjski, ale nie został wprowadzony w życie(2)

Prace nad doskonaleniem nauczania matematyki w szkołach średnich podejmowali także nauczyciele polscy w innych zaborach. W Królestwie Polskim szczególne ożywienie tej działalności nastąpiło po roku 1905, kiedy, w wyniku uzyskania pewnych swobód politycznych, znacznie wzrosła liczba polskich szkół prywatnych. Sprawą pierwszoplanową stało się opracowanie dla polskiego szkolnictwa prywatnego jednolitych programów nauczania. W zakresie nauczania matematyki próbę taką podjęło wielu światłych nauczycieli tego przedmiotu. Na przykład na uwagę zasługuje bardzo szczegółowo opracowany przez J.Szczepańskiego "Program arytmetyki dla szkoły średniej ze wskazówkami metodycznymi." Jednak dla

---

(2) Por."Sejmowa Komisja Szkolna wobec szkolnictwa średniego ", Muzeum 25 t.2(1909), str.383 - 418. Por.M.Janelli, "Stan szkolnictwa średniego prywatnego w kraju", Muzeum 29 t.2 (1913), str 1 - 22. Por. też S.Dickstein,"O reformie nauczania matematyki w Polsce. Notatka historyczna ",Rocznik Pedagogiczny 1(1921), str.263 - 269 .

przygotowania pełnych programów nauczania potrzebne są przemyślenia i dyskusje wielu osób. I dlatego już na początku 1905 roku grupa warszawskich nauczycieli matematyki i fizyki, zrzeszyła się w Koło Matematyczno-Fizyczne[3]. Głównym zadaniem Koła było opracowanie jednolitych i liczących się z wymaganiami nauki i czasu programów nauczania. Już w połowie czerwca 1905 roku szczegółowo opracowane programy zostały oddane do druku w "Przeglądzie Pedagogicznym " (str.236,253,267,281). W planach podkreślono potrzebę ograniczenia nauczania arytmetyki. Przy uwypukleniu znaczenia działań rachunkowych potępiano niewłaściwość różnych sztucznych sposobów nauczania tego przedmiotu. Pojęcie proporcjonalności zalecano rozwijać na zadaniach zaczerpniętych z życia i otaczającej przyrody oraz nakazano unikać sztucznych kombinacji, jakimi były przepełnione istniejące podręczniki. Zwracano uwagę na potrzebę metodycznego opracowania materiału nauczanego z algebry i geometrii. W tym celu już w kl.I wprowadzono propedeutykę geometrii, a z prostymi równaniami zapoznawano uczniów wcześniej, przed systematyczną nauką algebry. Do programów włączono elementy geometrii przekształceń i geometrii analitycznej. W ostatniej klasie wprowadzono początki analizy matematycznej, motywując tę innowację rozwojem innych nauk i potrzebami życia praktycznego. I tutaj szczególnego podkreślenia wymaga fakt, że myśli przewodnie pierwszych polskich programów nauczania były zbliżone do później podniesionych w Programie Merańskim.

Następnie Koło, którego skład powiększył się także o nauczycieli spoza Warszawy, zajęło się podręcznikami szkolnymi. Dokonano rzeczowej krytyki istniejących podręczników. Zainicjowano wznowienie wydań podręczników pozytywnie zaopiniowanych oraz tłumaczenie na język polski wskazanych podręczników obcych. Spowodowano opracowanie kilku nowych podręczników dostosowanych do proponowanego programu. Ożywiono popularyzację tych kwestii w czasopismach nauczycielskich. Od roku 1906 Koło miało własny

---

[3] K.Wuczyńska "Koło Matematyczno-Fizyczne w Warszawie a reforma nauczania matematyki i fizyki na początku XX wieku ", Wiadomości Matematyczne 20(1978), str.183 - 188.

organ prasowy, którym był "Dodatek" do "Wiadomości Matematycznych". Z umieszczonych tam protokołów z posiedzeń Koła wynika, że jego członkowie orientowali się w przebiegu prac o charakterze międzynarodowym. Przewodniczący Koła Samuel Dickstein uczestniczył w IV Kongresie Matematyków w Rzymie i w ciągu okresu działalności Międzynarodowej Komisji do Spraw Nauczania Matematyki na bieżąco informował Koło o przebiegu prac. Między innymi w sprawozdaniu z konferencji w Brukseli (8 - 10.VIII.1910 r.)przekazał informacje o pracach podkomisji narodowych wielu krajów[4]. Z dużą uwagą śledzono publikacje i podręczniki wydawane za granicą. Wiele z nich znajdowało się w bibliotece Koła. Na jednym z posiedzeń Samuel Dickstein powiedział: "Koniecznym jest dla dobra sprawy referowanie na posiedzeniach wybitniejszych pozycji podręcznikowych zagranicznych, gdyż my obecnie jesteśmy w fazie tworzenia szkoły swojskiej, musimy uczyć się sumiennie i korzystać z doświadczeń poczynionych gdzie indziej, co oczywiście nie przeszkadza zastanawianiu się samodzielnemu i opracowywaniu lepszych programów szkolnych."[5] Omówiono między innymi książki F.Kleina, A.Höflera, E.Borela, F.Enriquesa, Bekego i Mikoli (Sprawozdania, 1906 - 1911 a). Większość recenzji jak i innych referatów i sprawozdań w całości drukowano w "Dodatku do Wiadomości Matematycznych", co czyniło je dostępnymi dla nauczycieli niezrzeszonych w Kole, a także dla nauczycieli w innych zaborach.

W większych trudnościach znajdowało się szkolnictwo polskie w zaborze pruskim, gdzie swobody narodowe były najmniejsze. Jednakże ciągle żywe były tam idee głoszone w okresie Wiosny

---

(4) S.Dickstein sprawozdanie z konferencji w Brukseli przedstawił na posiedzeniu Koła Matematyczno-Fizycznego w dniu 29.X. 1910 r. Pełny tekst Sprawozdania opublikowano w Wiadomościach Matematycznych 15(1911).Dodatek V, str.117 - 122.

(5) Por.Protokół z posiedzenia Koła Matematyczno-Fizycznego z dnia 23.II.1907 r. Wiadomości Matematyczne 11 (1907), Dodatek III.

Ludów przez Karola Libelta, Bronisława Trentowskiego, Ewarysta Estkowskiego[6] i innych światłych nauczycieli polskich. Józef Lompa[7] tak pisał we wstępie do swojego "Przewodnika do rachunków pamięciowych dla nauczycieli elementarnych" wydanego w Gnieźnie w roku 1848: "Niniejsze dzieło przeznaczone jest dla szkół naszych. Niejeden może mi zarzuci: na co ta praca, kiedy podobnych dzieł w języku niemieckim jest bez liku, kiedy po niemiecku prowadząc naukę rachunków, nauczyciel zarazem w niemiecki język wprawia dzieci, co przecież głównym zadaniem nauczyciela ma być według myśli rządu ? - Na to odpowiada się. Książki w języku polskim nam koniecznie są potrzebne ... " Karol Libelt wydając w roku 1844 swój "Wykład matematyki dla szkół gimnazjalnych " opartych na książkach Ohma i Telkampfa, wyjaśniał: "Nie należy bynajmniej stronić od oświaty cudzoziemskiej, ale nabierając jej, przyswajając sobie, narodowić ją trzeba ."

W taki sposób, mimo pozbawienia Kraju samodzielnego bytu narodowego, trwała i bogaciła się polska tradycja nauczania matematyki. Kiedy po przeszło wiekowym okresie niewoli Polska odzyskała niepodległość, przemyślenia te i ukształtowane koncepcje były bardzo pomocne przy organizowaniu nauczania w szkołach polskich. Stworzenie jednolitego systemu szkolnego z trzech odrębnych systemów organizacyjnych pozostałych po rządach zaborczych było zadaniem bardzo trudnym. Oto fragment stanowiska polskich

---

(6) Karol Libelt (1807 - 1875) , filozof i esteta, oraz znany działacz społeczny i polityczny w W.Ks. Poznańskim. Por.W.E.P., PWN, t.6,str. 489. Bronisław Trentowski (1808 - 1869), filozof, pedagog i publicysta, główny przedstawiciel polskiej "filozofii narodowej". Wśród prac "Chowanna, czyli system pedagogiki narodowej"(t.1-2,1842), por. W.E.P., PWN, t.11, str. 641. Ewaryst Estkowski (1820 - 1856), pedagog i wielkopolski działacz oświatowy, publicysta. W latach 1849 - 1853 wydawał pierwszy polski fachowy miesięcznik pedagogiczny "Szkoła Polska", por. W.E.P., PWN, t.3, str. 482.

(7) Józef Lompa (1797 - 1863), działacz narodowy, nauczyciel; jego działalność przyczyniła się do utrzymania języka i obyczajów polskich na Śląsku, por. W.E.P.,PWN, t.6 str.591.

władz oświatowych w tej sprawie:

"Odradzająca się Polska otrzymała w spadku po okresie niewoli najrozmaitsze typy i systemy państwowego szkolnictwa średniego stworzone przez zaborców. Mamy więc gimnazja pruskie w Wielkopolsce i austriackie z typu, choć polskie z języka wykładowego w Galicji. Szkolnictwo prywatne byłej Kongresówki nosi na sobie jeszcze ślady więzów rosyjskich, a przy tym nie stanowi ono bynajmniej jednolitej całości; jest to raczej pstrokata mozaika, na którą się składał częściej przypadek niż twórcza myśl pedagogiczna. Jasną jest rzeczą, że w tych warunkach nie można budować systemu szkolnictwa średniego za pomocą drobnych jedynie poprawek i mizernej łataniny. Tu trzeba budowę rozpocząć od fundamentów." (O programie, 1919, str.1).

Pierwszy projekt szkoły średniej powstał jeszcze w czasie wojny w Warszawie, po ewakuacji Kongresówki przez Rosjan w drugiej połowie 1915 roku. Został wydany w roku 1916 przez Wydział Oświecenia pod nazwą: "Program szkoły średniej ogólnokształcącej". Program ten nie odegrał większej roli. Opracowany był pospiesznie (4.II.1916 - 10.IV.1916) i wąsko ukierunkowany, o czym świadczy już sama motywacja jego powstania:

"Odnowienie polskiego Uniwersytetu i otwarcie polskiej Politechniki w Warszawie wysunęło na czoło naszego szkolnictwa średniego sprawę umiejętnego przygotowania młodzieży do tych dwóch wyższych uczelni. Doświadczenie pierwszego semestru wykazało, że obowiązujące dotychczas programy szkół średnich nie dają dostatecznego przygotowania do studiów wyższych. Uwzględniając opinię wypowiedzianą jednozgodnie przez grono nauczycielskie Uniwersytetu i Politechniki, Sekcja III byłego Wydziału Oświecenia, postanowiła przejrzeć dotychczasowe programy szkół średnich, poddać je ścisłemu rozważaniu i w porozumieniu z gronem osób zaproszonych ze sfer profesorskich i pedagogicznych, opracować nowe, odpowiadające bardziej wymaganiom współczesnej dydaktyki i potrzebom wytworzonym przez nowe warunki życia." (Program, 1916)

Program nauczania matematyki w 8 - klasowej szkole ogólnokształcącej opracowała podkomisja w składzie: Ziemowit Arlitewicz,

Zygmunt Straszewicz, Jan Zydler. Szczególny nacisk kładł program na przyzwyczajanie uczniów do ujmowania funkcjonalnej zależności pomiędzy wielkościami i możliwie częste stosowanie wykresów graficznych. Aby uzyskać czas na wprowadzenie do nauczania działów, które dla realizacji tego zadania miały szczególne znaczenie, zredukowano w dotychczasowym programie pewne partie materiału.

I tak:

- opuszczono wyciąganie pierwiastka sześciennego;
- opuszczono dział o największym wspólnym dzielniku;
- opuszczono wzory na spłaty terminowe i kapitalizację wkładów;
- równania nieoznaczone ograniczono do dwóch niewiadomych pierwszego stopnia;
- opuszczono rozdział o ułamkach ciągłych;
- zredukowano rozdział o równaniach diofantycznych ograniczając je do najprostszych i tylko do algebraicznej metody ich rozwiązywania;
- naukę o dwumianie Newtona ograniczono do wykładnika naturalnego.

Zalecono natomiast:

- położyć większy nacisk na liczbę pierwiastków równiania algebraicznego;
- dać pojęcie szeregów i najprostszych cech ich zbieżności (e^x, sin x, cos x);
- rozszerzyć rozdział o kombinatoryce elementami rachunku prawdopodobieństwa;
- dać krótki, zasadniczy rys rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniem do zadań z dziedziny algebry, geometrii, fizyki i mechaniki

Program zakładał już od pierwszego roku nauczania propedeutykę geometrii. Kurs systematyczny składał się z planimetrii w kl.IV-VI, stereometrii w kl.VI-VII, geometrii analitycznej w kl. VIII. Geometrii wykreślnej nie wyodrębniono, a nauczanie jej przy stereometrii miało kształcić wyobraźnię przestrzenną.

Materiał trygonometryczny dotyczył głównie goniometrii z podkreśleniem analitycznej metody wykładu.

Zasadnicze prace nad reformą szkolnictwa średniego wykonała Komisja Pedagogiczna przy Stowarzyszeniu Nauczycielstwa Polskiego w Warszawie. W planie ogłoszonym w roku 1917 po raz pierwszy odstąpiono od 8-letniej szkoły średniej, na rzecz szkoły 4-letniej, opartej o 7-letnią szkołę powszechną.(Podobne stanowisko zajęła także utworzona pod koniec roku 1917 Komisja Referentów Krakowskiego Koła T.N.Sz.W.). Ustalono 2 typy szkół średnich: humanistyczny i realny. Plany godzin wyraźnie preferowały grupy przedmiotów stanowiących podstawy naukowe obu rodzajów kształcenia. Przy tej samej liczbie 120 godzin tygodniowo w ciągu 4-letniego okresu nauki, przeznaczono: w oddziałach humanistycznych - 78 godzin na przedmioty językowo-historyczne, 34 godziny na przedmioty matematyczno-przyrodnicze i 8 godzin na rysunki i gimnastykę; w oddziałach realnych podział ten wynosił odpowiednio: 50 godzin, 58 godzin, 12 godzin.

Określając zadania nauczania matematyki stwierdzono: "Matematyka zarówno przez treść jak metody jest bardzo ważnym czynnikiem wykształcenia ogólnego, będącego głównym zadaniem szkoły średniej ogólnokształcącej " (Prace Komisji, 1917).

Zakres materiału nauczania przewidywał matematykę elementarną objętą programem dotychczasowej średniej szkoły filologicznej, poszerzony o następujące działy:

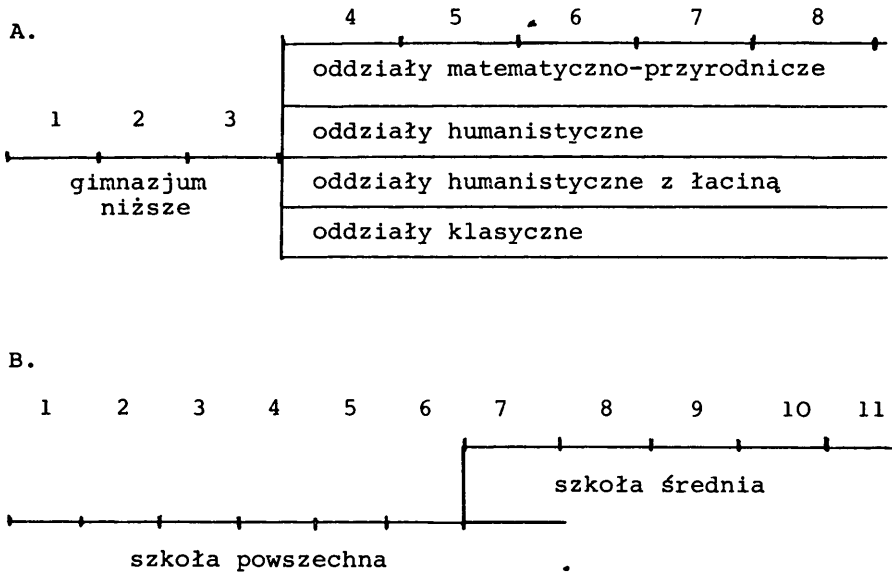
- geometrię analityczną, jako uzupełnienie omawianych wykresów funkcji stopnia pierwszego i drugiego;
- początki rachunku różniczkowego i całkowego w oparciu o najprostsze zagadnienia z geometrii i fizyki;
- geometrię wykreślną, obejmującą rzuty prostokątne i pojęcie rzutu ukośnego z zastosowaniem do rysunku prostych przedmiotów.

Wprowadzenia nowych działów dokonano kosztem redukcji pewnych **partii materiału tradycyjnego**,głównie tych samych co w poprzednim programie. W uzasadnieniu podano:

"Poza korzyściami praktycznymi najważniejszym zadaniem powyżej wymienionych działów matematyki w szkole średniej będzie należyte wyrobienie poglądu przestrzeniowego oraz kształcenie ujmowania i wyrażania zależności pomiędzy wielkościami (myślenie funkcyjne). Wprowadzając do kursu szkoły średniej nowe działy uważamy za konieczne usunięcie z programu obecnego części materiału mniej ważnego lub przestarzałego. Uwzględnienia niektórych pojęć tzw. matematyki wyższej domagają się nauki wyższe (fizyka). Zgadza się to również i z historycznym rozwojem nauczania matematyki, z którego widać jak stopniowo zakres tego nauczania się rozszerza " (Prace Komisji, 1917).

Projekt planu Komisji Pedagogicznej stał się punktem wyjścia do prac Wydziału Programowego Sekcji Szkół Średnich Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego powołanego w roku 1918. W roku 1919 został opublikowany "Program naukowy szkoły średniej " (Program, 1919), będący propozycją ministerialną organizacji szkolnictwa średniego w Polsce. Przed przedłożeniem programu do aprobaty sejmowi został on poddany ogólnej dyskusji nauczycielstwa.

Przewidziana programem szkoła średnia składała się z dwóch części: jednolitej podstawy, którą stanowiło 3-letnie gimnazjum niższe, i 5 klas wyższych, zróżnicowanych na następujące 4 wydziały: matematyczno-przyrodniczy, klasyczny, humanistyczny i humanistyczny z łaciną. Jednocześnie program był dostosowany do modyfikacji, gdyby wprowadzono 7-letnią szkołę powszechną. Wtedy mianowicie szkoła średnia 5-letnia poprzedzona byłaby sześcioma klasami szkoły podstawowej. VII klasa szkoły podstawowej przewidziana była dla zakończenia wykształcenia ogólnego tych uczniów, którzy nauki w szkole średniej nie podejmą. Oba rozwiązania ilustrują schematy:



Na nauczanie matematyki w poszczególnych wydziałach przeznaczono następujące ilości godzin: wydział matematyczno-przyrodniczy - 26 godzin tygodniono w ciągu 5 - letniego okresu kształcenia; wydział humanistyczny - 20 godzin; wydział humanistyczny z łaciną - 19 godzin; wydział klasyczny - 12 godzin, przy czym na tym wydziale w ostatniej klasie matematyki już nie było. Tutaj też był wyraźnie mniejszy zakres materiału nauczania. W gimnazjum niższym jednolitym dla wszystkich wydziałów na nauczanie matematyki przeznaczono 14 godzin tygodniono w ciągu 3 lat nauki. Była to arytmetyka w połączeniu z propedeutyką geometrii i początkami algebry w kl.III.

W gimnazjum wyższym programy nauczania matematyki na wydziałach humanistycznym i humanistycznym z łaciną były identyczne. Na wydziale matematyczno-przyrodniczym materiał miał być realizowany szybciej i był poszerzony. Zakres materiału nauczania na wszystkich wydziałach (oprócz klasycznego) miał ujmować, poza działami zazwyczaj występującymi w programach nauczania, także następujące zagadnienia:

- ciągi, szeregi, granice;
- geometrię analityczną (także na wydziale klasycznym

przewidziano elementy tego przedmiotu);
- pochodną i jej najprostsze zastosowania.

Na wydziale matematyczno-przyrodniczym uwzględniono naukę o rzutach i całkę z jej najprostszymi zastosowaniami.

W dyskusji nad programem uwagi krytyczne o programie matematyki wypowiedział Stanisław Zaremba w artykule: "Pogląd na program naukowy szkoły średniej" (Zaremba, 1920). Autor wysunął trzy postulaty. Zasadniczy dotyczył sprzeciwu wprowadzenia w trzech typach gimnazjów elementów rachunku różniczkowego.

W uzasadnieniu autor podał 2 powody:

A. O gruntownym uczeniu początków analizy matematycznej nie może być mowy, ze względu na czas jakiego wymaga ta nauka, jak również ze względu na brak potrzebnych wiadomości z matematyki elementarnej, które uczeń musi opanować przed przystąpieniem do poznawania pojęć tego działu matematyki.
B. Korzyści, jakie daje poznanie rachunku różniczkowego, stają się tylko złudzeniem, jeżeli nie pozna się go w sposób gruntowny.

Jednocześnie autor nie pochwalał kierunku intuicyjnego w nauczaniu matematyki, za którego głównego rzecznika uważał Feliksa Kleina. Zdaniem Stanisława Zaremby tylko ścisła wiedza może doprowadzić do pożądanych efektów nauczania.

Inne wady programu wg Stanisława Zaremby to:

- skreślenie geometrii wykreślnej z programu gimnazjum matematyczno - przyrodniczego. Autor szczegółowo uzasadnił konieczność wprowadzenia w tym typie szkoły geometrii wykreślnej wraz z teorią perspektywy i teorią cieni;
- brak w programie pojęcia grupy przekształceń. Autor podkreślił, że pojęcie grupy leży u podstaw wielu najważniejszych i najróżnorodniejszych gałęzi matematyki czystej i stosowanej, a jednocześnie jest to pojęcie zupełnie dostępne dla ucznia szkoły średniej.

Stanowisko zaprezentowane przez Stanisława Zarembę nie było odosobnione. W poruszanych przez niego kwestiach od wielu lat wypowiadali się nauczyciele matematyki. Oto kilka takich wypowiedzi.

Antoni Hoborski w roku 1917 w pracy: "Uwagi o dydaktyce matematyki dla wyższych klas gimnazjów klasycznych" ustosunkował się do "nowych prądów" w nauczaniu matematyki, prezentowanych głównie przez Feliksa Kleina. Czwarta z tez tam wymienionych dotyczyła nauczania w szkole średniej rachunku nieskończonościowego. Tak uzasadniał autor swoją dezaprobatę w tej sprawie: "... wymaga znacznego zwiększenia materiału naukowego, kiedyby go raczej należało nieco skrócić. Zasady, choćby tylko, rachunku różniczkowego wymagają wielu nowych pojęć, a przyswojenie sobie nowego pojęcia połączone jest z wielkimi trudnościami natury dydaktycznej; wszak nie idzie o mechaniczne zaznajomienie się z symbolami różniczki i całki; nadto uczeń pragnie widzieć cel swojego wysiłku umysłowego, jego użyteczność, co znów prowadziłoby do dalszego zwiększenia materiału naukowego. Z tego powodu oświadczam bez obawy o zarzut skrajności nieusprawiedliwionej, że tezę czwartą należy w całości odrzucić" (Hoborski, 1917) .

Stanowisko to jeszcze raz podtrzymał Antoni Hoborski w wydanej w roku 1925 pracy pt. "Trzy odczyty o nauczaniu matematyki w szkole średniej". Uzasadnienie swoje skończył stwierdzeniem: " Nie należy się też łudzić, że obznajomienie się z techniką działań wyższych jest już prawdziwą i rzetelną znajomością matematyki, która jednak polegała dotąd zawsze i polegać będzie na prawidłowej dedukcji" (Hoborski, 1925).

Przeciwko skreśleniu z programu szkoły średniej geometrii wykreślnej wypowiedział się Tadeusz Łazowski w artykule: "Kilka uwag o nauczaniu geometrii" (T.Ł. 1919). Autor widział w tym przedmiocie przeciwwagę zarytmetyzowania lub zbytniego sformalizowania geometrii klasycznej. Podkreślił jej rolę w rozwijaniu wyobraźni przestrzennej i odpowiedniej intuicji. Za nauczaniem geometrii wykreślnej wypowiedział się także Antoni Hoborski w pierwszej z cytowanych już prac.

Samuel Dickstein dwukrotnie na zebraniach Koła Matematyczno - Fizycznego (25.V.1907 r.; 29.X.1910 r.) podkreślał konieczność włączenia pojęcia grupy do nauczania w szkole średniej. Na prośbę zarządu Koła, Władysław Smosarski przygotował na zebrania Koła 10 wykładów pt. "Wiadomości z teorii grup z

zastosowaniem do matematyki elementarnej"[8].

Tadeusz Gutkowski na zebraniu sekcji matematyczno - fizycznej Stowarzyszenia Nauczycielstwa Polskiego (10.X.1917 r.), w referacie "Teoria przesunięć" wskazał, jak można stosując pojęcie grupy wyjaśnić pewne zagadnienie z geometrii płaskiej. Jednak w notatce historycznej "O reformie nauczania matematyki w Polsce" Samuel Dickstein, pisząc o tym postulacie Stanisława Zaremby, zachował pewną ostrożność, stwierdzając: "Zaznaczyć wszakże należy, że nie posiadamy dotąd podręczników matematyki elementarnej, które w wykładzie pomysł ten metodycznie przeprowadzają"(Dickstein, 1921).

Powróćmy do ministerialnego "Programu naukowego szkoły średniej". Szukając motywów późniejszych zdarzeń, warto posłużyć się cytatem Samuela Dicksteina z notatki historycznej: "Uwagi krytyczne prof.Zaremby nie pozostały bez wpływu na prace sekcji opracowującej programy matematyki dla szkół średnich"(Dickstein, 1921). Faktem jest, że w drugim wydaniu programu, które ukazało się w roku 1921 pod zmienionym tytułem "Zasady planu nauczania w szkole średniej", znalazły się zmiany w planach godzin, a opracowane w oparciu o te plany programy nauczania matematyki dla trzech wydziałów (bez wydziału humanistycznego z łaciną) nie zawierały elementów analizy matematycznej. Geometria wykreślna została uwzględniona w kursie geometrii elementarnej. W programie wydziału matematyczno - przyrodniczego umieszczono rzuty prostokątne oraz elementarne wiadomości o rzutach środkowych i perspektywie, dla wydziału humanistycznego - elementarne wiadomości o rzucie prostokątnym. Program wydziału klasycznego nie zawierał geometrii wykreślnej. Także podtrzymana została decyzja o braku godzin matematyki w ostatniej klasie tego wydziału.

Wprowadzone zmiany w stosunku do pierwotnego planu nie

---

[8] Cykl wykładów składał się z dwóch części: I Grupy skończone nieciągłe, czyli grupy podstawień; II Grupy przekształceń ciągłych. Był opracowany na podstawie prac znanych matematyków, m.in. J.Puzyny, G.A.Millera, M.C.Bourleta - i zawierał przykłady nadające się do wykorzystania w szkole średniej, por. Wiadomości Matematyczne 15, Dodatek V, 1910 r.

spotkały się z ogólną aprobatą. Oto fragment protestu ogłoszonego na łamach "Przeglądu Pedagogicznego" przez Lucjana Zarzeckiego wielce zasłużonego działacza oświatowego,autora jedynej w tym okresie książkowej pozycji polskiej z dydaktyki matematyki pt. "Nauczanie matematyki początkowej". Artykuł zatytułowany "W sprawie rachunków tzw. wyższych w szkole średniej" zaczął słowami: "Jak wiadomo program MWR i OP usunął z klas wyższych elementy rachunku różniczkowego i całkowego, które znalazły już tam przedtem swe prawo obywatelstwa i nawet wyrabiać się zaczęła pod wpływem praktyki metoda ich nauczania. Przed laty dziesięciu witaliśmy to wprowadzenie rachunków wyższych jako postęp w nauczaniu, jako ukoronowanie wykształcenia matematycznego i rzecz wielkiej doniosłości praktycznej. Tymczasem ze względów niewiadomych sprawa została przesądzona w naszym Ministerstwie w sposób inny, negatywny, hamujący postęp naszej szkoły i naszej myśli dydaktycznej." (Zarzecki, 1921, str.133). Następnie autor starał się odeprzeć te argumenty,które zazwyczaj przytaczane były przez przeciwników wprowadzenia w szkole"rachunków wyższych": "materiał trudny", "wymaga gruntownego przygotowania uczniów", "szacunek dla nauki nie pozwala,aby go kaleczyć, a charakter matematyki, aby nie być ścisłym". Autor wskazał, że argumenty te są równie słuszne dla innych, ogólnie akceptowanych partii matematyki szkolnej (liczby niewymierne, logarytmy, długość obwodu i pole koła, sin 0° lub tg $\frac{\pi}{2}$ itp.) . Będąc konsekwentnym należałoby powiedzieć: "...nie uczmy matematyki w szkole średniej, to jest niemożliwe. Atoli ścisłość myślenia nie jest jeszcze tym samym co mądrość". I dlatego nie można rezygnować z tego działu nauki, który ma wszechstronne zastosowanie, budzi zainteresowanie nauką, ma wartości nie tylko matematyczne, ale kulturalne w ogóle.

Podobnie Bronisław Bielecki w artykule "W sprawie programu matematyki w naszych szkołach średnich", uzasadniając konieczność utrzymania"rachunków wyższych",przynajmniej na wydziale matematyczno-przyrodniczym, tak odpowiedział na obawę braku ścisłości przy pracowywaniu tego działu: "... ustalonym jest fakt, że najbardziej twórcze procesy przebiegają najpierw w podświadomości, w głębiach intuicji, a logika dopiero wykańcza

i rewiduje to, co intuicja stworzyła. Czy słusznym jest więc podporządkowanie w początkowym okresie studiów, tej głównej u nas siły twórczej, logice ?" (Bielecki, 1923) . Ponadto dodaje: " I jeszcze jeden wzgląd za tym, aby kurs propedeutyczny umieścić w gimnazjach. Jeśli nie dać uczniom początków rachunku różniczkowego i całkowego w szkole średniej to ci, którym warunki życiowe nie pozwolą na dalsze studia,będą zacofani w swym wykształceniu o całe dwa wieki. Dodajmy, że szkoła średnia w innych krajach dawała i daje sobie radę z tym zagadnieniem" (Bielecki, 1923). Bronisław Bielecki podał konkretne propozycje rozwiązań. Mianowicie: w kl.VIII program przewidywał: "Powtórzenie i uzupełnienie najważniejszych zagadnień kursu gimnazjum wyższego", a wskazówki do tego rozdziału były bardzo nieokreślone. Tymczasem było to miejsce, gdzie wiadomości o funkcjach, ich przebiegu i prędkości zmian mogły być usystematyzowane w początkowy wykład rachunku różniczkowego i całkowego. Nie chodziło tu o wprowadzenie różniczki i całki, ale o funkcje pochodne i funkcje pierwotne. Ważne było to, aby pojęcia te w umysłach uczniów dojrzewały stopniowo, zanim na wyższej uczelni poznają ścisłe pojęcia różniczki i całki. Pewną ilość godzin na ten dział proponował autor uzyskać kosztem geometrii wykreślnej.

Także inne kwestie programu matematyki były przedmiotem dyskusji. W omawianym już artykule Bronisław Bielecki zwracał uwagę, że dla wydziału matematyczno-przyrodniczego niewłaściwe jest nieuwzględnienie kombinatoryki i osnutego na niej rachunku prawdopodobieństwa. Uważał, że brak czasu na te działy wynikał z wyjątkowego uprzywilejowania geometrii wykreślnej. I chociaż samo wprowadzenie tego przedmiotu autor pochwalał, to uważał, że powinien on być wykładany w szczuplejszym zakresie. Sprawa nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkołach była często dyskutowana. W Kole Matematyczno-Fizycznym wniosek Bolesława Danielewicza (22.V.1909 r.)o włączeniu rachunku prawdopobieństwa do programu szkoły średniej uznano za najlepiej umotywowany.(9)

(9) Ocena w "Referacie Komisji Programowej Koła Matematyczno - Fizycznego", Wiadomości Matematyczne 14(1910),str 95 - 133.

Za wnioskiem wypowiedzieli się: Samuel Dickstein, Stanisław Srebrny, Lucjan Zarzecki, Grzegorz Zawadzki. W roku 1913 w artykule "Kilka uwag o nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej"[10], Antoni Hoborski, podkreślając walory kształcące tego przedmiotu, podał zasadnicze pensum materiału dla szkoły średniej i wskazówki metodyczne z przykładami lekcji. Jeden z wniosków XI Zjazdu Lekarzy i Przyrodników w Krakowie z roku 1911, mówił: "Ze względu na zastosowania praktyczne, pożądane jest obeznanie z elementami rachunku prawdopodobieństwa"(Dickstein, 1921). Także projekt planu naukowego szkoły realnej w Galicji z roku 1913 przewidywał zasady rachunku prawdopodobieństwa. Jednak żadne powojenne projekty programów nauczania rachunku prawdopodobieństwa nie uwzględniały. Trzeba zaznaczyć, że w programie znajdował się dwumian Newtona, a więc elementów kombinatoryki program nie wykluczał.

Inne wymieniane usterki programu to:

1. Brak zróżnicowania celów nauczania matematyki i bardzo małe zróżnicowanie materiału nauczania (poza pensum godzin 25-19) między wydziałami matematyczno - przyrodniczym a humanistycznym (Bielecki,1923).
2. Niekiedy brak konsekwencji w wysuwaniu na pierwszy plan idei matematycznych i ograniczaniu operacji technicznych, np. w programie algebry w kl.I rozdziały ustawiono w tradycyjnej kolejności z dodaniem nowego rozdziału - 7: "Wiadomości wstępne o zależności funkcjonalnej". Uwaga: "Ze względów redakcyjnych punkty 6 i 7 zostały umieszczone w końcu programu; należy jednak od początku roku przy nadarzających się sposobnościach zapoznawać uczniów z pojęciem funkcji, układać i rozwiązywać równania", jest zbyt nieokreślona i pozostaje fakt, że na pierwszym planie znalazła się sucha technika algebry, a możliwość przepojenia wszystkich jej pojęć ideą funkcyjną nie została podkreślona w sposób należyty

---

[10] Por.A.Hoborski "Kilka uwag o nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej", Muzeum 29 t.2(1913),str. 494 - 503.

(Bielecki, 1923).

3. Przeładowanie materiału nauczania w naturalny sposób grozi zmniejszeniem sprawności i pewności rachunkowych (Bóbr,1924).

Fakt, że wykazywano usterki programów nauczania matematyki nie oznacza, że zostały one przyjęte negatywnie. B.Kalicun - - Chodowicki w artykule "Geometria w programie matematyki dla gimnazjów państwowych" (Program, 1922 a) uznał program geometrii za "znakomity". Podkreślał słuszność fuzji geometrii z arytmetyką w kl.I i trygonometrii z algebrą w kl.VII oraz przyłączenie geometrii wykreślnej do matematyki. Pochwalał rozbicie trygonometrii na 2 części: trygonometrię kąta ostrego(kl.VI)i kąta dowolnego(kl.VII).Bronisław Bielecki w swojej krytycznej analizie ma np. taką dygresję : "... wbrew z góry powziętemu celowi ześrodkowania uwagi na szczegółach godnych krytyki raz po raz budzi się jednak uczucie zadowolenia na widok ziszczonych rozmaitych punktów programu, jak np. wprowadzenie rachunków przybliżonych, tablic logarytmicznych 4 - cyfrowych(ale nie na wydziale matematyczno - przyrodniczym), osnucie kursu na pojęciu funkcji, paralelizmie między algebrą a geometrią"(Bielecki, 1923). W innym miejscu napisał: "Każdego z nas starszych nauczycieli, którzy wykładali jeszcze według starych metod i programów, ale czuli potrzebę reformy nauczania, w konieczność tej reformy wierzyli i w miarę możności, w dowolnych granicach, zasady jej starali się w czyn wprowadzić, programy naszych szkół muszą zadowolić swą postępowością" (Bielecki, 1923).

Główną wykładnię celów i treści programowych dały podręczniki szkolne. Choć jest to trudna, a ze względu na swoją funkcję bardzo odpowiedzialna forma pracy twórczej, podjęło ją wielu matematyków i doświadczonych nauczycieli matematyki. Chyba wszystkie wydane w tym okresie podręczniki były opracowaniami polskimi. W prasie nauczycielskiej było wiele przykładów świadczących o tym, że nauczyciele wyraźnie przedkładali podręczniki autorów polskich nad podręczniki obce. Oto fragmenty dwóch recenzji podręczników wydanych jeszcze w okresie zaborów.

Pierwszy pochodzi z recenzji kolejnego z podręczników R.Suppantschitscha w tłumaczeniu L.Hordyńskiego. Podręczniki

R.Suppantschitscha zostały opracowane zgodnie z austriackim "Normalplanem" (jak nazywano nowe programy nauczania do szkół średnich z roku 1909), dla wszystkich klas szkół średnich. Były bardzo rozpowszechnione w Galicji i przez wiele lat polecane przez Radę Szkolną Krajową. A mimo to recenzent chłodno powitał wydanie kolejnego tomu i można przypuszczać, że powodem były nie tylko jego niedoskonałości. Już na wstępie czytamy: "... pojawiło się kilka oryginalnych,zupełnie udanych podręczników polskich. I dobrze się stało, że nie zapożyczono się, jak zwykle u Niemców, u których trudno napotkać podręcznik napisany prosto i jasno, bez przeładowania erudycją i abstrakcją, a przecież znalazł się wyjątek. Ukazał się IV tom tłumaczenia niemieckich podręczników Suppantschitscha. Tłumaczyć warto tylko rzeczy wzorowe; przekład choćby najlepszy nigdy nie zastąpi oryginału. Czy faktycznie ta książka jest taka ? Nie !" (Sprecher, 1913, str. 504).

Za kontrprzykład niech posłuży fragment recenzji wydanego w tym czasie podręcznika A.Łomnickiego: "Cieszyć się należy, że znalazł się człowiek, który podjął się dokonania, w krótkim czasie pracy trudnej, ryzykownej wobec konkurencji wielu wcale dobrych podręczników obcych czekających tylko na przekład na język polski" (Zabielski, 1912).

To zapotrzebowanie na polską literaturę podręcznikową i życzliwa aprobata podejmowanego trudu ich opracowania, sprzyjały powstawaniu podręczników. Były wśród nich książki pisane pośpiesznie w celu tymczasowego zaspokojenia potrzeb, ale były też książki doskonałe, trafnie ujmujące materiał teoretyczny i ćwiczeniowy, i napisane z dużym znawstwem pedagogicznym. Większość była dostosowana do programów nauczania i właściwie interpretowała i realizowała postawione w nich cele nauczania. Główne idee charakteryzujące większość podręczników to : kształcenie myślenia funkcyjnego i kształcenie wyobraźni przestrzennej. Chociaż zgodnie z tradycyjną koncepcją matematyki elementarnej wyraźnie odróżniano myślenie analityczne, którego przedmiotem jest liczba i funkcja, od myślenia geometrycznego, którego podstawą jest logiczna dedukcja, a przedmiotem figury geometryczne, to w wielu podręcznikach widoczne były starania

o wskazywanie związków między różnymi przedmiotami matematyki szkolnej, dążenie do fuzji materiału w nich zawartego. Ponadto wspólną cechą większości podręczników była troska o dostosowanie wykładu do wieku ucznia, upoglądowienie podawanych treści, kierowanie się zasadami pedagogiki i psychologii. W następnych rozdziałach tej pracy omówiona zostanie realizacja tych idei w podręcznikach szkolnych wydawanych w pierwszych latach okresu międzywojennego.

2. KSZTAŁCENIE MYŚLENIA FUNKCYJNEGO W PODRĘCZNIKACH MATEMATYKI

Nauka o funkcji w szkole średniej nie ma długiej tradycji. Uwypuklono ją dopiero w programach nauczania opracowywanych na początku XX w., głównie tych, które były utrzymane w duchu Programu Merańskiego. W roku 1909 Roman Jamrógiewicz pisał: "... teoria funkcji dziś jeszcze dość obca nauce szkolnej, otwiera umysłom uczni szersze widnokręgi, dozwalając duchowi sięgnąć w dal, a możność takiego sięgnięcia działa orzeźwiająco, podnosi i krzepi, porywa ku sobie. Nauka o funkcjach podawana może tu i ówdzie nieśmiało, z lekka, dziś wkracza pewniej w mury szkoły średniej, być może, że kiedyś zyska w tym świecie prawo obywatelstwa, ponieważ jednak na razie jest w tym świecie homo novus (sit licentia verbo) nie można wniosków podawać, czy i o ile tę próbę doświadczenia przetrzyma " (Jamrógiewicz, 1909, str.89). Poszukiwania sposobów prowadzenia nauki o funkcji podejmowane były w wielu krajach. Nauczyciele polscy zagadnienie to omawiali między innymi na posiedzeniach Koła Matematyczno - Fizycznego w Warszawie, na konferencjach i zjazdach nauczycielskich. Było ono tematem publikacji w prasie nauczycielskiej. Własne stanowisko konfrontowano z odnośnymi opiniami w innych krajach. Na przykład L.Hordyński (1913) pisząc o potrzebie realizowania nauki o funkcji w szkole średniej i o konieczności wczesnego przygotowywania uczniów do tej nauki, przypomniał, że twórca Programu Merańskiego F.Klein postępowanie takie nazywa "przyzwyczajaniem do funkcjonalnego myślenia ", zaś A.Höfler zaleca poprzedzić to myślenie funkcjonalne "funkcjonalnym spostrzeganiem". Sprawa wczesnego rozpoczynania kształcenia

myślenia funkcyjnego uczniów była często podkreślana. W.Arvay w roku 1911 pisał: "Wprowadzenie uczniów w myślenie funkcyjne powinno odbywać się powoli, ale zacząć dość szybko" (Arvay,1911).

Postulaty te znalazły odzwierciedlenie w ministerialnych programach nauczania. Czwarty z celów nauczania arytmetyki w gimnazjum niższym sformułowano: "Zaprawienie do samodzielnego wykrywania prostych związków pomiędzy wielkościami (początek zastosowania idei zależności funkcjonalnej)." (Program, 1920). Chociaż zadania tego program nie stawiał przed propedeutycznym kursem geometrii, to w opracowaniach dydaktycznych i prasie nauczycielskiej sugerowano wykorzystanie także możliwości tkwiących w tym przedmiocie. S.Neapolitański pisał: "... kurs ten bardzo się nadaje do rozwinięcia u uczniów idei zależności funkcjonalnej" (Neapolitański, 1929). Lucjan Zarzecki trzecią część swojej książki "Nauczanie geometrii początkowej" napisał zgodnie z następującym stanowiskiem: "Następny bardzo istotny cel propedeutycznego nauczania geometrii to przygotowanie podłoża do myślenia funkcyjnego. Geometria do tego więcej się nadaje ze względu na swoją większą konkretność niż algebra, jakkolwiek funkcje ze względu na swoją historię zjawiły się pierwotnie w świecie liczb. U Euklidesa już, u Apoloniusza i Pappusa nie mówiąc już o Archimedesie i Heronie z Aleksandrii pojęcie zależności funkcjonalej rozwijane było głównie na geometrii, nie tylko dlatego, że Grecy nie posiadali środków ekspresji właściwych dzisiejszej analizie, że posługiwali się, jak mówi Zeuthen[11], tzw. algebrą geometryczną, lecz i z tej ważnej przyczyny, że geometria jest właściwszym terenem do rozwijania myślenia funkcyjnego w pierwszych fazach rozwoju matematyki niż analiza" (Zarzecki, 1919).

Autorzy podręczników do matematyki dla gimnazjów niższych starali się realizować w swoich książkach te postulaty.

---

[11] H.G.Zeuthen, matematyk duński, autor bardzo poczytnych podręczników z historii matematyki: "Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter" ,Kopenhaga 1893 - w j. duńskim; 1896 - w j.niemieckim. "Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrundert",Leipzig 1903.

W arytmetyce rozpoczynały to zadania, w których operacje arytmetyczne łączono z prostymi obserwacjami życia i przyrody. W trakcie całego kursu rozwiązywania"zadań z treścią",układanie łatwych równań, poznawanie własności liczb i działań na nich wykonywanych dostarczały nieustannie okazji do wskazywania zależności między różnymi wielkościami. Momentem szczególnie odpowiednim było poznawanie wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalnych. Istotne znaczenie dla ukształtowania u ucznia intuicji zależności funkcjonalnej miały polecane do wykonania modele i rysunki figur geometrycznych. Mierzenie, kreślenie, sporządzanie materialnych modeli przez obrysowywanie, cięcie, sklejanie, sprzyjały mimowolnej koncentracji myśli i uwagi dziecka. Jeżeli przy tym przez określoną zmianę danych wykreślany rysunek stawał się bardzo duży lub bardzo mały, jeżeli przyjęcie pewnych wymiarów powodowało, że model się nie skleił lub miał nieoczekiwany kształt, wtedy występowanie zależności między pewnymi elementami stawało się oczywiste. W pamięci dziecka zarysowywały się trwałe obrazy, do których mogło sięgać później w systematycznym kursie matematyki szkolnej. Także wiele było sprzyjających sytuacji w nauczanych treściach geometrycznych. Rozważania zależności kształtu i wielkości figur geometrycznych od ich elementów, obliczanie ich powierzchni i objętości, bardzo obszernie opracowywane "przemiany" figury, przy których była zachowywana pewna jej wielkość, np. bok, kąt, powierzchnia - dotyczyły wpływu zmian jednych wielkości na wielkości inne od nich zależne. Niektóre zależności otrzymywały nawet bardziej analityczną formę wzorów. To, że pojawiały się one jako zapis prosty i użyteczny, że przeważnie układali je sami uczniowie, było bardzo pomocne dla późniejszej nauki o funkcji.

Systematyczna nauka o funkcji była prowadzona w gimnazjum wyższym w kursie algebry. Tu uczeń miał poznać pojęcie funkcji, nauczyć się badać jej zmienność, mieć przyswojone wiadomości z teorii funkcji i umieć je stosować do rozwiązywania zadań z różnych działów matematyki, a także z innych nauk. W trakcie poznawania rozmaitych funkcji, opisywania ich własności, kreślenia ich wykresów, rozwiązywania za ich pomocą różnych innych zagadnień, miała ukształtować się umiejętność myślenia funkcyjnego.

W czasie kilkuletniego obcowania z funkcją powinien wytworzyć się u ucznia nawyk dostrzegania funkcji w różnych sytuacjach w matematyce, fizyce i przyrodzie. Programy ministerialne nadały temu zagadnieniu rangę jednego z czterech celów nauczania matematyki w gimnazjum: "2. Przyzwyczaić go (ucznia) do dostrzegania związków funkcjonalnych zachodzących między znanemi mu zjawiskami, do ujmowania tych związków w postaci wzorów analitycznych i do badania własności odpowiednich funkcji" (Program,1922, c, str.89). "Wiadomości wstępne o zależności funkcjonalnej" zostały umieszczone jako ostatni dział tematyczny algebry w kl.IV (I). W dołączonej uwadze zaznaczono, że już od początku roku przy nadarzających się sposobnościach należy zapoznawać uczniów z pojęciem funkcji. Wszystkie omawiane tu podręczniki do kl.IV (I) realizowały oba polecenia.

Najczęściej przygotowanie do nauki o funkcji miało miejsce przy omawianiu działań rachunkowych. Badano zależność wyniku od wartości "wyrazów działania".Niekiedy już tutaj używano terminu "funkcja". Miało to miejsce przy określaniu wyrażeń algebraicznych i omawianiu własności działań na nich wykonywanych. Były też inne zdania w tej sprawie. Tadeusz Gutkowski w przedmowie do swego podręcznika pisał: "... Niektórzy autorowie utożsamiają od razu w określeniu pojęcie wzór i funkcja. Mnie się to nie wydaje słusznem, bo uczeń zaczyna operować wyrazem "funkcja" nie rozumiejąc go jeszcze, a tego chyba nie należy zalecać. Wolałem więc wybrać inną drogę i wpierw zapoznać ucznia z treścią, a dopiero dać jego nazwę" (Gutkowski, 1917 a). Przygotowanie do nauki o funkcji w tym podręczniku przeprowadzono bardzo starannie. Głównym środkiem realizacji były ćwiczenia. Było ich dużo, miały nieskomplikowaną treść poszerzaną powoli i systematycznie. Znajdowano więc najpierw wartość y określoną wzorem, którym był wielomian stopnia pierwszego, później drugiego, w końcu iloraz takich wielomianów. Przedstawiono graficznie zależność między przyjętymi wartościami x a otrzymanymi wartościami y. Ograniczano zakres liczb, które mogły być nadawane jako wartości x. Później szukano tej wartości x, dla której wartość y równa się zeru lub innej określonej liczbie i odwrotnie - szukano wartości y, dla której wartość x byłaby równa liczbie danej.

Zakres i sposób ujmowania materiału dotyczącego wstępnych wiadomości o funkcji nie był jednakowy. Więcej materiału teoretycznego, bardziej skomplikowanych rachunkowo zadań, było w podręcznikach wcześniejszych. Wspomniany podręcznik Tadeusza Gutkowskiego wydany był po raz pierwszy w roku 1917. W tym podręczniku funkcję określono jako "... taką zmienną, której wielkość zależy od drugiej zmiennej" (Gutkowski, 1917 a ,str.72). Podobnie definiowano funkcję prawie we wszystkich podręcznikach. Graficzny obraz funkcji w podręczniku Gutkowskiego wprowadzono w oparciu o empirycznie sporządzony wykres temperatury dziennej. Określono pierwiastek funkcji oraz sposób znajdowania pierwiastków za pomocą wykreślania krzywej. Potem od razu rozpoczęto badanie funkcji. W tym celu zostały podane takie twierdzenia, "... które w wielu wypadkach czynią je bardzio prostem"(str.79). Po każdym twierdzeniu umieszczony był przykład, w którym zastosowanie twierdzenia pomagało w rozwiązaniu. Przebieg zmienności funkcji przedstawiano tabelą i graficznie. Przykłady dotyczyły najprostszych funkcji liniowych, kwadratowych, homograficznych.

Podręczniki Tadeusza Gutkowskiego stanowiły ważny krok w kierunku doskonalenia nauczania matematyki. Współczesny recenzent nie szczędził pochwał wypowiadanych wręcz entuzjastycznie. Między innymi pisał: "... jest moim zdaniem nieocenionym postępem w kierunku pobudzania ucznia do krytycznego myślenia" (Sprecher, 1925, str.320). Ale były też oceny negatywne. S. Kulczycki, chociaż rozpoczął swoją recenzję stwierdzeniem, że jest to od szeregu lat najpopularniejszy podręcznik tego przedmiotu, później wykazał kolejne jego niedoskonałości. Krytykował surowe trzymanie się rozważań logicznych, i: "... powątpiewa w ogóle czy którakolwiek kląsa dorosła do owych kwestii, a jest pewny, że żadna nie rozsmakuje się w tych logicznych frykasach" (Kulczycki, 1924, str.101).

Podręczniki nieco późniejsze podawały mniej materiału i wprowadzały go wolniej. Wydany w roku 1920 podręcznik Jerzego Mihułowicza przeznaczał nawet oddzielne paragrafy na omówienie każdego ze sposobów przedstawiania funkcji:

sformułować twierdzenie, że wykresem jest linia prosta. Wykazano je dla trzech przypadków: $a = 0$, $y = b$; $b = 0$, $y = ax$; $y = ax + b$.

Na podkreślenie zasługuje fakt, że w dowodzie korzystano z wektorów, co świadczy o wdrażaniu nowoczesnych sposobów wykładu. Słowo "wektor" zostało zaprezentowane polskim nauczycielom matematyki zrzeszonym w Kole Matematyczno - Fizycznym przez Samuela Dicksteina 23.IV.1910 roku. W posiedzeniu uczestniczył i był żywym dyskutantem Tadeusz Gutkowski. W roku 1917 wydano jego: "Algebrę elementarną, cz.I" i "Trygonometrię" w których wektory były stosowane w wielu miejscach wykładu. W "Algebrze elementarnej" nazywano je jeszcze "odcinkami kierunkowymi",ale w "Trygonometrii" nazwa "wektor" była już tytułem pierwszego rozdziału i pierwszym określonym pojęciem.

Zasady nauczania i wskazania psychologii rozwojowej były uwzględniane w podręcznikach Jerzego Mihułowicza. Jednym ze stosowanych środków było poprzedzanie nowych wiadomości tematami łatwiejszymi i ilustrowanie przykładami z życia. Do funkcji liniowej takim przygotowaniem było wcześniejsze opracowanie proporcjonalności prostej. Szukano jej w "zadaniach z treścią", wyrażano wzorem, przedstawiano wykresem. W ten sposób zostały podane pierwsze wiadomości o funkcji $y = ax$. Dowód na to, że prosta jest wykresem funkcji $y = ax$ przeprowadzono w oparciu o podobieństwo trójkątów. Wykres funkcji $y = ax + b$ otrzymano z wykresu funkcji $y = ax$ przez przesunięcie równoległe do osi y o długość "b". Nie dowodzono więc od początku, że wykresem funkcji liniowej jest prosta, tylko że wykresem funkcji $y = ax + b$ jest prosta równoległa do prostej $y = ax$. Podobnie przeniesiona została cecha charakterystyczna funkcji liniowej: "to, że funkcja ta rośnie (maleje) równomiernie " (Mihułowicz, 1920, str.111). To rozłożenie tematu na dwie części w sposób rozszerzający treść przy stałym odwoływaniu się do poprzednich wiadomości odróżnia ten podręcznik od pozostałych, ujmujących całość materiału za jednym razem. Ponadto podręczniki Jerzego Mihułowicza były stale doskonalone. Każde z kolejnych wydań miało pewne uzupełnienia i poprawki. Na przykład do omawianego tu tematu w wyd.VI z roku 1929 został dodany § 14 "Zmienność funkcji liniowej", rekapitulujący wiadomości w formie trzech tabel

ilustrujących zmienność funkcji $y = ax + b$ w zależności od współczynnika "a".

Chyba bardziej dla nauczyciela niż ucznia przeznaczony był materiał na temat funkcji liniowej w podręczniku St.Ruziewicza i E.Żylińskiego . Dążenie do dedukcyjnej konstrukcji wykładu spowodowało znaczne jego wydłużenie i np. na temat graficznego przedstawienia funkcji liniowej przeznaczono 16 stron (Ruziewicz Żyliński, 1926 b,str.1-16). Rekompensatą dla uczniów był wybór zadań nieskomplikowanych, wymagających tego co dla poznania funkcji było rzeczywiście potrzebne.

Na koniec jeszcze jeden sposób traktowania materiału o funkcji liniowej (Wojnicz - Sianożęcki, 1922). Tym razem główny nacisk położono na postać wzoru zapisującego funkcję. Już na początku umieszczono informację, że funkcja może być napisana w postaci wyraźnej: $y = nx + b$, niewyraźnej czyli uwikłanej : $mx - ny = p$; wreszcie w postaci:

$$\frac{x}{\frac{p}{m}} + \frac{y}{\frac{-p}{n}} = 1.$$

Po wyznaczeniu punktów przecięcia linii prostej z osiami, poprzez podstawienie do ostatniej postaci za kolejne zmienne zera, podkreślono dogodność przedstawienia funkcji w postaci $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Przechodząc ponownie do postaci $y = nx + b$ omówiono znaczenie współczynnika n dla położenia prostej i jego zależność od parametrów a i b z poprzedniego zapisu. Także treść dołączonych zadań dotyczyła przede wszystkim określania zmian położenia prostej w zależności od wartości parametrów występujących w różnych postaciach zapisu funkcji.

Okazji do utrwalenia wiadomości o funkcji dostarczała nauka o równaniach i nierównościach. Proste równania rozwiązywane były na długo przed poznaniem funkcji. Po jej opracowaniu do równań wracano ponownie. Przede wszystkim odwoływano się do funkcyjnej interpretacji rozwiązań. Omawiano metodę graficzną rozwiązywania równań, nierówności i układów równań. Ważne było to, że równania i nierówności były tematem powracającym kilkakrotnie

w kursie szkoły średniej i że te powroty łączyły się z poznawaniem kolejnych funkcji.

Spośród funkcji omawianych w szkole średniej najwięcej uwagi poświęcono funkcji stopnia drugiego. W poznaniu materiału funkcyjnego miała ona znaczenie szczególne. Była pierwszą funkcją, która ma ekstrema. Przy jej badaniu uczeń miał do czynienia z dużą ilością terminów i operacji z zakresu ogólnej teorii funkcji. Nieskomplikowana, ale i niezbyt elementarna budowa wzoru pozwalała przy rozwiązywaniu poszczególnych zadań poznawać ogólny algorytm badania funkcji.

Program ministerialny rozkładał materiał na temat funkcji kwadratowej na dwie klasy. W kl.V (II;15 lat) rozpoczynały go równania kwadratowe z jedną niewiadomą. Funkcja kwadratowa i jej wykres miały być omawiane po równaniach. Zwracano uwagę na miejsca zerowe i ekstrema, rozkładanie trójmianu na czynniki, znak trójmianu. Naukę w kl.V(II)kończyło rozwiązywanie nierówności kwadratowych ilustrowane na wykresie trójmianu. W kl.VI(III)uwzględniono dyskusję równania kwadratowego i układy równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.

Materiał podręcznikowy we wszystkich omawianych tu książkach obejmował te zagadnienia. Różny był porządek i sposób rozszerzania treści. Przeważnie naukę rozpoczynano badaniem przebiegu i kreśleniem wykresów poszczególnych typów funkcji kwadratowej. Zestawiano najpierw wszystkie własności funkcji $y = x^2$, później funkcji

$$y = x^2 + px + q,$$

która po sprowadzeniu do postaci

$$y = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 - \tfrac{1}{4}\Delta;\ \Delta = p^2 - 4q,$$

była rozpatrywana dla przypadków $\Delta = 0$ i $\Delta \neq 0$. Następnie badano funkcje $y = ax^2$ i $y = ax^2 + bx + c$ (Mihułowicz, 1929, str. 1-19). Czasami wybór omawianych na początku typów funkcji był inny. Na przykład: $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = a(x - d)^2$;

$y = a(x-d)^2 + e$, $y = ax^2 + bx + c$. Po przedstawieniu trójmianu w postaci kanonicznej określano miejsca zerowe i znak trójmianu kwadratowego. (Ruziewicz, Żyliński, 1926 b). W jednym z podręczników postać kanoniczna rozpoczynała wykład, a równania kwadratowe rozwiązywano dopiero po opracowaniu funkcji (Gutkowski, 1917). Wszędzie dyskusja równania stopnia drugiego zamykała materiał. Omawiano warunki istnienia pierwiastków oraz znaki pierwiastków. Badano położenie danej liczby względem pierwiastków równania oraz położenie pierwiastków równania względem danego przedziału. Zagadnieniem koronnym była zależność pierwiastków od współczynników.

Większość podręczników zwracała uwagę na związek funkcji kwadratowej z liniową. Czasami była to tylko uwaga, że gdy w funkcji $y = ax^2 + bx + c$ $a = 0$, to zależność sprowadza się do prostej $y = bx + c$ (Ruziewicz, Żyliński, 1928, str.113). Gdzie indziej mówiono,że funkcja $y=ax^2+bx+c$ jest "uogólnieniem funkcji liniowej" i przechodzi w nią, gdy $a = 0$ (Mihułowicz, 1929, str.1). Były podręczniki pokazujące to przejście graficznie na rysunku (Gutkowski, 1917).

Zadania związane z funkcją kwadratową wykorzystywano dla kształcenia ogólnej wiedzy o funkcji i jej wykresie. Szczególnie preferowano zadania na dyskusję. Nowym problemem, który rozszerzał stosowanie funkcji kwadratowej, było wyznaczanie wartości największych i najmniejszych. Tematy do zadań czerpano z sytuacji życia codziennego, fizyki, geometrii. Ta użyteczność poznawanych wiadomości stanowiła istotny czynnik motywacji i zainteresowania. Podstawowe zastosowanie poznawanych wiadomości następowało w samej algebrze w kolejnym dziale: "Układy równań stopnia drugiego z dwoma niewiadomymi", kl.VI(III). Kreślenie wykresu równiania,graficzne rozwiązywanie układów równań, wymagało tych samych operacji i tego samego stylu myślenia co badanie funkcji. Poczynione spostrzeżenia na temat własności wykresów równań dotyczyły tych samych pojęć co przy wykresie funkcji. Analizowanie różnorodnych przypadków wymagało znajomości funkcji i bardzo wzbogacało doświadczenia w badaniu wzajemnej zależności i rejestrowaniu przebiegu zmian. W podręcznikach dział ten

opracowywany był dość obszernie, z dużą ilością rozwiązanych zadań i ciekawymi ilustracjami graficznymi rozwiązań.

Zwraca uwagę brak jednoznacznego określenia różnicy między wykresem funkcji a wykresem równania, a były nawet miejsca, w których różnica ta jakby nie była zauważana, np.: "... obrazem zbioru pierwiastków równania $x^2+y^2=a^2$ $(a \neq 0)$ jest na płaszczyźnie XY koło o środku leżącym w początku układu i o promieniu (a). Otrzymana krzywa jest tym samym obrazem zależności funkcyjnej pomiędzy X i Y, wyrażonej przez równanie" (Ruziewicz, Żyliński, 1928, str.55). Niekiedy wprowadzano pojęcie "funkcji dwu i wielowartościowej". Podawano sposoby badania takich funkcji (Gutkowski, 1919; Mihułowicz, 1924).

W programie kl.VI(III)znajdowały się jeszcze funkcje: potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna. Powtarzająca się forma opisywania własności tych funkcji uczyła tego, co istotne.

W programie kl.VII (IV; 17 lat) poszerzanie wiadomości o funkcji odbywało się w ramach nauki o ciągach i granicach. W podręczniku Tadeusza Gutkowskiego po zapisaniu wzoru na n-ty wyraz postępu arytmetycznego zaznaczono: "widzimy więc, że a_n jest funkcją liniową od n" (Gutkowski, 1919, str.2) Był to jedyny podręcznik, w którym nie używano słowa "ciąg", tylko mówiono o "zmiennej x zależnej od n".

W innych podręcznikach nie definiowano ciągu jako funkcji określonej na zbiorze liczb naturalnych, ale dążenie do takiego ujmowania było widoczne, np. przy porównaniu określenia ciągu w drugim (1924 r.)i czwartym (1930 r.)wydaniu podręcznika J. Mihułowicza: "Jeżeli pewien nieskończony zbiór liczb, jest tak uporządkowany, że każda liczba tego zbioru ma ściśle oznaczone miejsce (tj. że możemy wskazać, która liczba jest pierwsza, druga, ... n-ta), to mówimy, że liczby te tworzą ciąg"(Mihułowicz, 1924, str.1). "Jeżeli każdej liczbie naturalnej w ciągu liczb naturalnych podporządkujemy jakąś ściśle oznaczoną liczbę, to mówimy, że te liczby tworzą ciąg niekończony" (Mihułowicz, 1930, str.47). Teoria ciągów zbieżnych, obliczanie granic, zastosowanie ciągów, to materiał rozwijający myślenie funkcyjne, a ponadto potrzebny do dalszej nauki o funkcji. Program nauczania dla kl. VII(IV) gimnazjum matematyczno-przyrodniczego uwzględniał pojęcie

granicy funkcji i zastosowanie jej do badania funkcji. W jednych podręcznikach podawano definicję granicy funkcji Cauchy'ego (Gutkowski, 1919), w innych Heinego (Mihułowicz, 1930), czasem podawano obie definicje (Mihułowicz, 1924). Po ćwiczeniach w obliczaniu granic właściwych i niewłaściwych określano ciągłość funkcji, omawiano zasadnicze własności funkcji ciągłych, podawano inne twierdzenia na ten temat. W końcu cały ten materiał był użyty do badania funkcji. Wybór metody badania należał do indywidualnych cech podręcznika. W podręcznikach wcześniejszych, opracowywanych przed ostatecznym ustaleniem programów nauczania, autorzy poszerzali materiał o elementy analizy matematycznej i w badaniu funkcji posługiwali się pierwszą i drugą pochodną. Z podręczników wydanych po roku 1918 elementy rachunku różniczkowego i całkowego znajdowały się tylko w "Algebrze" T.Gutkowskiego. W przedmowie autor stwierdził: "... zdaniem moim pojęcia te będą głęboko zrozumiałe tylko wtedy, gdy od najmłodszych lat będziemy je wszczepiali swoim wychowańcom licząc się przy tem, co w danym czasie zrozumiałym być może." (Gutkowski, 1919). W podręczniku, po określeniu pochodnej i opracowaniu związanego z nią materiału teoretycznego w kolejnych paragrafach podawane były gotowe algorytmy do badania poszczególnych typów funkcji. Po każdym algorytmie w kilku szczegółowo rozwiązanych przykładach pokazywano, jak należy go stosować praktycznie. W pozostałych podręcznikach badanie funkcji odbywało się tylko metodami elementarnymi. Niemniej w ramach także tego sposobu obserwujemy doskonalenie metody. Zrezygnowano z rozwiązań dających się zastosować tylko do pewnej grupy przypadków na rzecz rozwiązań ogólniejszych.

Program nauczania w kl.VIII(V)pozostawił pewną swobodę w dokonaniu rekapitulacji wiadomości. W rozdziale "Powtórzenie i uzupełnienie najważniejszych zagadnień kursu gimnazjum wyższego" stwierdzono: "W tym dziale niepodobna podać szczegółowego programu, gdyż musi on być dokładnie przystosowany do potrzeb poszczególnej klasy" (Program, 1922, c,str.96). Dalej polecono syntetyzujące ujęcie materiału.

W ostatnim rozdziale podręcznika J.Mihułowicza znajdowało się zestawienie ważniejszych funkcji. Uczeń dowiadywał się tam,

że poznane przez niego funkcje należą do jednej z trzech grup:

1° Funkcji algebraicznych - jeżeli mogą być przedstawione równaniem postaci: $a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n = 0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ oznaczają funkcje całkowite zmiennej x. Takimi są funkcje całkowite, ułamkowe i niewymierne.

2° Funkcji przestępnych - jeżeli nie są ze zmienną niezależną związane żadnym równaniem algebraicznym. Takimi są np. $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ itp.

3° Funkcji innych - takimi są np. n-ty wyraz lub suma n wyrazów postępu arytmetycznego lub geometrycznego; wartość kapitału złożonego na procent składany; różne funkcje z fizyki itp.(Mihułowicz, 1930, str. 112-114).

I taki zakres wiadomości o funkcji miał poznać absolwent gimnazjum.

Oddzielnego omówienia wymagają zbiory zadań algebraicznych i inne książki dla uczniów szkół średnich, traktujące o funkcji.

Zależność funkcyjna jako przedmiot ćwiczeń w zbiorach zadań pojawiła się później niż w podręcznikach. Nie występowała prawie zupełnie w zbiorach wcześniejszych. I nagle w bardzo krótkim czasie wydano kilka pozycji zupełnie idei tej podporządkowanych. Ta natychmiastowa reakcja na zaistniałą potrzebę oddaje atmosferę odradzania się szkolnictwa polskiego. Jest przykładem samorzutnego włączania się polskich nauczycieli do wszystkich potrzebnych prac. Poniższy fragment wypowiedzi jednego z autorów dowodzi, że podejmowano je nawet wtedy, gdy zdawano sobie sprawę z ich tymczasowości: "... Szczegółowy program ukaże się w druku zapewne w niedalekiej przyszłości. Tymczasem jednak młodzież nasza z powodu braku podręczników dostosowanych do wymagań Ministerstwa nie zawsze jest w możności wypełniać włożone nań obowiązki. Komisje egzaminacyjne niejednokrotnie stwierdziły u naszych abiturientów brak zrozumienia danych im do rozwiązania zagadnień. Pragnąc choć w części ułatwić naszej młodzieży pracę, zdecydowałem się wydać niniejszą książeczkę. Warszawa, 24 lipca 1920 r."(Bóbr, 1920, str.113).

Wydane na początku lat dwudziestych zbiory zadań na badanie zależności funkcjonalnej należały do najtrudniejszych książek z tego okresu adresowanych do uczniów szkoły średniej. Zadania w nich zawarte raczej nie nadawały się do rozwiązywania równolegle z poznawaniem materiału z podręczników szkolnych. Przeważnie nie trzymały się programu nauczania. Mogły być wykorzystane po opracowaniu całego materiału w kl.VIII (V),przy powtórzeniu i uzupełnieniu najważniejszych zagadnień kursu szkolnego. Nie tylko systematyzowały poznany materiał, ale go poszerzały, często przedstawiały w nowym ujęciu. Charakteryzowała je chęć nadania idei funkcyjnej roli integrującej całą wiedzę matematyczną zdobytą w gimnazjum. Najobszerniejszym i chyba najtrudniejszym zbiorem była książka R.Witwińskiego "Badanie zależności funkcjonalnej dla klas wyższych szkół średnich" (Witwiński,1921). Zwrócimy uwagę tylko na rozdział III. Miał on największą ilość zadań. Zadania trudniejsze, obok odpowiedzi, były opatrzone wskazówkami albo skrótowymi rozwiązaniami. Sugerowały one, że po znalezieniu rozwiązania w postaci wzoru funkcyjnego należy przeprowadzić badanie otrzymanej funkcji i wykreślić jej obraz graficznie. Przy rozwiązywaniu wielu zadań należało posługiwać się pochodną.

W roku 1923 ukazała się książka Z.Arlitewicza "Tematy matematyczne z rozwiązaniami i objaśnieniami dla klas wyższych szkół średnich". Książka, choć nie było to jednoznacznie określone, była skierowana raczej do nauczycieli. Przedstawiono w niej próbę znalezienia metody pracy przy rozwiązywaniu w szkole trudnych zadań (m.in.ze zbioru R.Witwińskiego i N.Rybkina). Autor był przekonany o potrzebie przerabiania takich zadań. Biorąc przez wiele lat udział w pracach Komisji Matematyczno-Fizycznej, powołanej przez Ministerstwo WR. i O.P. do wyboru tematów na egzaminy dojrzałości, dokładnie poznał tematykę zadań maturalnych i uważał, że do ich rozwiązywania należy specjalnie przygotowywać uczniów. Proponowana metoda składała się z trzech etapów:

A. Rozważania wstępne. W tej części między innymi wyodrębnia się zmienne niezależne, przewiduje budowę wzoru opisującego występujące w zadaniu związki i czyni spostrzeżenia co do

przypadków szczególnych.

B. Rozwiązanie zadania.

C. Rozszerzenie tematu. Można tu zastosować jedną z następujących czynności: Uogólnienie tematu co do treści. Uzupełnienie tematu przez wprowadzenie nowego warunku. Modyfikacja tematu przez zmianę jednego z warunków lub przez zmianę ról między zmienną niezależną i poszukiwaną wielkością. Powiązanie tematu z innymi pokrewnymi. (Arlitewicz, 1923, str.5).

Tematem proponowanych przez autora zarówno zadań, jak i objaśnień była funkcja i te zagadnienia związane z jej nauczaniem, które mogły stwarzać kłopoty uczniom. Były też zadania pokazujące, jak stosować wiadomości o funkcji do rozwiązywania zagadnień innych nauk, głównie fizyki i geometrii. Autor uważał, że spostrzeżenia i uwagi, jakie poczynił uczeń przy takim rozwiązywaniu bardzo trudnych zadań, "znakomicie przyczyniają się do rozwijania jego myślenia funkcjonalnego oraz poczucia form geometrycznych" (Arlitewicz, 1923, str. 4). Było to stwierdzenie dyskusyjne. Chociaż rozwiązanie skomplikowanego zagadnienia w sposób szczegółowy i dogłębny, z próbą jego modyfikacji i utrudnienia miało pewne wartości dla kształcenia myślenia matematycznego i solidności pracy, to nie było dostosowane do psychiki przeciętnego 18-latka, który źle znosił długie obciążenia myślowe. Ponadto charakter nauczania w szkole średniej wymagał utrzymania pewnego tempa pracy po to, by mógł być zrealizowany cały przewidziany programem materiał. Zadanie, którego rozwiązanie zajmowało 8 stron, mogło być opracowane w kółku matematycznym przez uczniów interesujących się matematyką w sposób szczególny, a nie przez maturzystów, do których książka była głównie adresowana. Natomiast dla nauczycieli książka ta na pewno była pożyteczna.

Pewne tematy z zakresu materiału funkcyjnego zostały opracowane znacznie szerzej w specjalnie im poświęconych pozycjach książkowych. Książki te, mimo że były przeznaczone dla uczniów klas starszych i abiturientów, na ogół nie były dostosowane do programów nauczania. Omawiane zagadnienia traktowały w sposób indywidualny, często orginalnie.

Wydana w roku 1920 książka St.Bobra "Badanie funkcji liniowej oraz trójmianu" miała zadania wzorowane na tematach maturalnych. Rozważania teoretyczne charakteryzowało stosowanie metod geometrii analitycznej. Pozwalała spojrzeć po opracowaniu całego kursu matematyki szkolnej po raz drugi na funkcję liniową i kwadratową w innym ujęciu i w szerokim kontekście innych treści. Charakterystyczne dla książki umieszczenie funkcji w rodzinach krzywych tego samego typu dobrze uogólniało materiał. Inaczej opracowany był trójmian kwadratowy w książce F.Straszewskiego (1933). Autorowi (jak sam pisał) nie zależało na oryginalności ujęcia, czy specjalnym poszerzaniu wiadomości (zrezygnował np. z uwzględnienia liczb urojonych, ponieważ nie występowały w obowiązującym programie nauczania) . Książka przede wszystkim systematyzowała materiał i dostarczała wielu dobrych zadań, możliwych do rozwiązania przez przeciętnego ucznia. Napisana w sposób przystępny rozwijała treść powoli, płynnie, bez zamazywania tego co istotne szczegółami dodatkowymi. Nowe wiadomości od razu popierane były rozmaitymi przykładami. Dołączony w II części zbiór zadań utrwalał rzeczy podstawowe na nieskomplikowanych przykładach.

Tematem specjalnego książkowego opracowania było " Pojęcie granicy i jego zastosowanie" (Steckel, 1929). Książka S.Steckla nie zawierała rozważań teoretycznych. Była zbiorem zadań dotyczących ciągów nieskończonych i granic funkcji. Oba tematy znajdowały się w programach nauczania, ale w znacznie mniejszym zakresie. W recenzji książka była polecana raczej dla nauczyciela, bo chociaż "... wszystkie poruszane tematy są zwięźle i przystępnie wytłumaczone we wskazówkach, włączonych do odpowiedzi", to ich obfitość powoduje, że "... tylko w pewnej mierze może się stać użyteczną dla uczniów" (A.Cz.1930, str.199). Zbiorem zadań nie tylko zaadresowanym, ale i napisanym dla ucznia było "Repetytorium matematyki w zadaniach" Witolda Rybczyńskiego (1931). Autor chciał, aby zbiór systematycznie ułożonych zadań zastąpił podręcznik do ostatniej klasy gimnazjum, którego brak był wyraźnie odczuwalny. Miał więc systematyzować materiał, a jednocześnie umożliwić odświeżenie i skontrolowanie wiadomości z matematyki przed egzaminem dojrzałości. Był to bardzo dobry zbiór

razy większy obwód ma także dwa razy większe pole. Wykazać błędność tego twierdzenia, przyjmując kwadratowy kształt wyspy" (Łomnicki, 1930, str.164).

Niektóre twierdzenia stanowiły okazję do zastanowienia się nad rodzajem wskazywanej zależności. Akcentowano momenty, w których należało rozstrzygnąć,czy między omawianymi obiektami i pojęciami istnieje jakaś zależność, rozumiana rozmaicie w różnych sytuacjach. Tak np. po zdefiniowaniu proporcjonalności odcinków za pomocą odcinków wyznaczonych na ramionach kąta przez proste równoległe zastanawiano się, "... czy proporcjonalność odcinków określona w taki sposób zależy czy nie zależy od wielkości kąta, na którego ramionach dokonano konstrukcji" (Wojtowicz, 1926, str. 209).

Dla zrozumienia funkcji bardzo pomocne było pojęcie ruchu, którym posługuje się geometria. Narzucał on zmienność w obiektach, których zależność badano. Dobrze ilustrowały to przykłady z modelami ruchomymi. Np. to, że 3 boki wyznaczają trójkąt, a 4 nie wyznaczają czworokąta łatwo zauważano na figurach wykonanych "z pasków tektury połączonych luźno pluskiewkami" (Wojtowicz, 1926, str.27). Przy manipulowaniu wielokątami przegubowymi i różnymi mechanizmami zbudowanymi na zasadzie wielokątów przegubowych obserwowano zależności bardziej skomplikowane. Podstawowym ruchom na płaszczyźnie poświęcano w podręcznikach specjalne rozdziały: "Przekształcenie przez przesunięcie", "Obrót", "Przekształcenie symetryczne" (Wojtowicz, 1926). Uczniowie poznawali zasadniczą własność ruchu, tj. że każda figura po przekształceniu przez ruch przechodzi w figurę do niej przystającą. Bardzo ważne jest to, że ruch nadawał przekształceniom charakter ciągły.

Oprócz przekształceń figur przez ruchy omawiane były przekształcenia poprzez odpowiedniość, tzn. przyporządkowanie. Miało to miejsce przede wszystkim przy przekształceniu przez jednokładność.(Podobieństwo figur było określane w oparciu o jednokładność, poprzez rezygnację z wymagania, aby odpowiednie odcinki rozpatrywanych figur były równoległe). Równolegle z opracowywaną w algebrze definicją funkcji w geometrii występowała bardzo zbliżona definicja "wyznaczania": "...wyraz>>wyznaczać<< zawsze

wyrażać dla nas będzie dwie prawdy: 1° każdemu przedmiotowi A odpowiada jakiś przedmiot B; 2° każdemu przedmiotowi A odpowiada jeden tylko przedmiot B" (Wojtowicz, 1926, str.8). Przykłady przytoczone po tej definicji można było bez zmian przenieść do rozdziału o funkcjach w algebrze. Tematem szczególnie dogodnym do rozważań właściwych dla myślenia funkcyjnego były miejsca geometryczne. Ułatwiał je sposób sformułowania definicji tego pojęcia: "Miejscem geometrycznym punktów mających pewną własność nazywamy figurę, która spełnia dwa następujące warunki: 1° każdy punkt tej figury posiada ową własność; 2° żaden punkt nie leżący na naszej figurze, nie posiada tej własności" (Wojtowicz, 1926, str.74). Zadania na ten temat swoją treścią obejmowały niemal wszystkie omawiane w geometrii zagadnienia. Miały różny stopień trudności. Bardzo ciekawy był sposób wyrażania miejsca geometrycznego za pomocą ruchu. Znalezienie miejsca geometrycznego sprowadzał on do "znalezienia linii, którą zakreśla punkt poruszający się po płaszczyźnie wg pewnego prawa" (Wojtowicz, 1926, str.112). Zwracano uwagę na wyznaczanie skrajnych położeń ruchomego punktu, jeżeli figura zmieniać się mogła tylko w pewnych granicach. Szukanie miejsc geometrycznych stanowiło jedną z metod rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Polegała ona na sprowadzeniu zadania do znalezienia punktu wyznaczonego przez dwa znane warunki (Wojtowicz, 1926, str.131).

Były w kursie geometrii zagadnienia korelujące ją z algebrą. Jednym z nich była algebraiczna metoda konstrukcji geometrycznych. Chodziło tu o budowanie odcinka wg wzoru określającego zależność szukanego odcinka od odcinków danych. Zdarzały się konkluzje, w których bezpośrednio stwierdzano, że zadanie jest rozwiązalne za pomocą cyrkla i linijki wtedy, gdy "...odcinek szukany jest funkcją stopnia pierwszego lub drugiego odcinków danych" (Wojtowicz, 1926 ,str.290). Zarówno geometrii jak algebry dotyczyły przykłady wartości ekstremalnych i ćwiczenia w ich wyznaczaniu.

Odpowiednie miejsce w rozważaniach geometrycznych miało pojęcie granicy ciągu nieskończonego. Widoczne były starania o nadanie definicji tego pojęcia możliwie przejrzystej postaci. Były definicje tak sformułowane, że podawały od razu algorytm

do obliczania za pomocą granic różnych wielkości geometrycznych. Wykorzystywano go do wyznaczenia: długości okręgu, pola koła, objętości ostrosłupa, walca, powierzchni bocznej walca, stożka, objętości stożka,powierzchni i objętości kuli (Zydler, 1925). Wielokrotne powtórzenie metody, ilustracje graficzne do każdego przykładu sprzyjały przyswojeniu pojęcia. Można spotkać w podręcznikach przykłady, które miały przestrzec przed pochopnym ustalaniem granicy (Wojtowicz, 1926, str.304). We wszystkich podręcznikach metoda budowania ciągów była stosowana do wyznaczania liczb niewymiernych. Ale mimo że zagadnienie było opracowywane starannie, że omawiano je także w kursie algebry, sam temat okazał się zbyt trudny. W prasie nauczycielskiej niejednokrotnie wskazywano na to, że teoria Dedekinda oparta na pojęciu przekroju zbioru liczb wymiernych nie nadawała się do realizacji w szkole średniej.(13)

Utrwalenie wiadomości o funkcjach,z którymi spotykali się uczniowie w podręcznikach do geometrii, było sprawą odpowiedniego opracowania zbioru zadań, Najmniejszy udział miały w tym zbiory zadań konstrukcyjnych. Skromnego materiału dostarczały jedynie konstrukcje metodą analizy algebraicznej. Inaczej sytuacja ta przedstawiała się w zbiorach zadań rachunkowych. W najbardziej rozpowszechnionych w szkołach zbiorach zadań N.Rybkina (b.d., 1922, 1923) większość ćwiczeń była bezpośrednio związana z funkcją. Polecenia dotyczyły ustalenia związków między danymi obiektami i zbadania zmienności w tych związkach. W kolejnych zadaniach I części zawarto wszystkie zagadnienia związane z algebraicznym materiałem funkcyjnym. Były więc polecenia: "Wyrazić AB jako funkcję z i zmieniając z zbadać zmiany AB" (str.42). Później ograniczono np. dziedzinę funkcji do przedziału (0,R)(str.43). Następnie polecono określić zakres wartości funkcji (str.60). Potem trzeba było "przedyskutować zagadnienie w przypadku, gdy R dąży do zera " (str.63). Ostatnie zadania dotyczyły wyznaczania wartości ekstremalnych (str.76).

(13) Por.K.Cwojdziński: "Rozmyślania nad programem szkoły średniej",Parametr 1 (1930), str.258-266 .

zadań. Na 115 stronach został zamknięty cały materiał matematyczny nauczany w szkole średniej. Trafne ujęcie problemów umożliwiło ograniczenie do minimum ilości zadań, lapidarny język - skrócenie zapisu. Zadania ułożono tematycznie w zakresie poszczególnych działów matematyki szkolnej. Były łatwe, różnorodne i utrwalały rzeczy naprawdę istotne. W szczególności powtarzały poznawane w szkole wiadomości o funkcji.

Geometria w zakresie matematyki szkolnej zachowywała pewną odrębność. Pełniejszego zbliżenia do pozostałych przedmiotów matematycznych nie uzyskano poprzez ujęcie materiału programowego ani sformułowanie celów nauczania. Rolę nici integrującej całość wiedzy matematycznej mogła spełniać idea funkcyjna. Mogła ona prowadzić do ujednolicenia myślenia matematycznego na różnym materiale. Przyswojenie pewnych cech myślenia funkcyjnego mogło być pożyteczne dla rozważań geometrycznych i odwrotnie, obiekty omawiane w geometrii mogły dostarczyć konkretnych obrazowych przykładów do nauki o funkcji. Pojęcie funkcji mogło być uwzględniane w postaci przekształcenia geometrycznego. Postulaty te zauważali autorzy podręczników do geometrii i przeważnie starali się je uwzględniać. Przede wszystkim zwracali uwagę na to, że twierdzenia geometryczne opisują związki zachodzące między obiektami (wielkościami) geometrycznymi. Niektóre związki są dość luźne, najczęściej wyrażone nierównością. Ale wskazywano i takie, które pozwalały dokładnie wyznaczać jedne wielkości na podstawie wielkości danych. Wreszcie były związki określane bezpośrednio równaniami. W trakcie rozważań geometrycznych wskazywano podstawowe rodzaje zależności: proporcjonalność prostą i odwrotną. Różnice między zależnościami rozmaitych typów łatwo wykazywano za pomocą takich np. zadań:

"Historyk grecki Tucydydes[12] sądził, że wyspa mająca dwa

---

[12] Tucydydes, historyk grecki z V w. p.n.e. Poruszane zagadnienie zależności powierzchni i obwodu pojawiało się niejednokrotnie w literaturze. Między innymi znalazło się w opowiadaniu Polybiusza, historyka greckiego z II w. p.n.e. skąd, jako problem matematyczny, zostało zaczerpnięte i rozwiązane przez Jana Brożka w pracy "Geodesia distantiarum" w 1610 r.

II część zbioru (Rybkin, 1922) zawierała zadania trudniejsze nie tylko w zakresie problemów geometrycznych, ale i zagadnień funkcyjnych. Zależności, które należało ustalić, były bardziej złożone, a badanie ich skomplikowane. Wymagany sposób rozwiązania sugerowały umieszczone przy końcu zbioru rozszerzone odpowiedzi do niektórych zadań. Dużo było"zadań na dyskusję".Tego samego autora "Zbiór zadań stereometrycznych wymagających zastosowania trygonometrii" (Rybkin, 1923) nie stawiał zagadnień funkcyjnych tak wysoko. Punkt ciężkości w zadaniach przenosił na określanie związków trygonometrycznych i ich przekształcanie. Zbiorem zadań przeznaczonych specjalnie do wykrywania zależności między wielkościami geometrycznymi był R.Witwińskiego "Zbiór zadań z geometrii płaskiej wymagających zastosowania algebry. Zadania na wykrycie zależności między wielkościami geometrycznymi" (Witwiński, 1922) Zadania w zbiorze były ciekawe, ale trudne. Ten sam model geometryczny był często tematem wielu pytań.

Ważną rolę w nauce o funkcji spełniała trygonometria. Wprowadzona przy końcu kursu matematyki szkolnej, po opracowaniu teorii funkcji, stwarzała jeszcze raz okazję do utrwalenia poznanych wiadomości na nowych interesujących przykładach. Ponadto wiadomości te wzbogacała. Po pierwsze do funkcji liczbowo-liczbowych dołączała funkcje określone na innych zbiorach, co znacznie rozszerzało sposób myślenia o funkcji w ogóle, po drugie funkcje trygonometryczne miały nową własność - okresowość. Trygonometria znajdowała się w programie nauczania kl.VI (III) i kl.VII (IV). W podręcznikach realizacja idei funkcyjnej zależała w dużym stopniu od określenia przedmiotu trygonometrii. W książkach wcześniejszych przeważało określenie: "trygonometria jest nauką o rozwiązywaniu trójkątów" (Rebiere , 1917, str.1). Przypisywano jej rolę nauki pomocniczej dla innych nauk, przede wszystkim geometrii. W podręcznikach późniejszych nadawano trygonometrii pewną autonomię, posiadanie przez nią własnych obiektów badań np. "trygonometria jest to nauka o własnościach wielkości osobnego rodzaju, zwanych trygonometrycznymi" (Stodółkiewicz, 1923, str.1). Oprócz powiązań z geometrią wskazywano tu na związki łączące ją z algebrą. Zdarzały się propozycje

traktowania trygonometrii jako części algebry:

"Trygonometrię określa się zwykle jako naukę zajmującą się rozwiązywaniem trójkątów. Nie jest to zupełnie ścisłe. Co prawda rozwiązywanie trójkątów, a właściwie zastosowania geometryczne trygonometrii zajmuje w kursie bardzo ważne miejsce, tym niemniej byłoby wielkim błędem pomijać w wykładzie wszystko to, co nie ma bezpośredniego związku z rozwiązywaniem trójkątów. Trygonometria właściwa jest jakby rozdziałem algebry, i jako taka powinna być traktowaną" (Gutkowski, 1917 b)

W tych podręcznikach kształceniu myślenia funkcyjnego poświęcano najwięcej uwagi. Różne były kolejność i sposób omawiania poszczególnych funkcji trygonometrycznych, ale poznawaniu ich zawsze towarzyszyło utrwalanie ogólnych wiadomości o funkcji. Wystarczy przejrzeć początkowe przykłady w większości podręczników, żeby przekonać się, że w bardzo prostych ćwiczeniach powracały wszystkie podstawowe zagadnienia funkcyjne. W naturalny sposób wzbogacano intuicję funkcji odwrotnej. Własność okresowości funkcji ilustrowano także przykładami w związku z innymi prostymi funkcjami nietrygonometrycznymi. Omawianie funkcji trygonometrycznych dostarczało szczególnie interesującego materiału do badania zmienności funkcji. Oprócz funkcji podstawowych omawiano i ilustrowano graficznie inne funkcje trygonometryczne. Były to głównie funkcje, których wykresy otrzymywano poprzez przekształcenia afiniczne podstawowych funkcji trygonometrycznych. Obserwując zestawy zadań na badanie funkcji w podręcznikach ułożonych chronologicznie, można wnosić, że w ciągu omawianego okresu dążono do eliminowania utrudnień rachunkowych na rzecz uwypuklenia podstawowych wiadomości o przekształceniach. Ponadto należy zaznaczyć, że w podręcznikach do trygonometrii podejmowano wyjątkowo dużo prób znalezienia nowych sposobów opracowania materiału. Na uwagę zasługuje "Trygonometria" W.J.Wyczałkowskiego (1929), w której autor chciał: "... przekonać ucznia na przykładzie o tej doniosłej roli, którą odgrywa w matematyce konwencjonalizm, prowadzący do uogólnień i uproszczeń logicznych. Godzi się zauważyć, że ten sposób traktowania przedmiotu odpowiada - jak się zdaje - jego historycznemu rozwojowi".W podręczniku pokazano sposób rozbudowywania nauki

poprzez przyjmowanie konwencji, korzystnie rozwiązujących nasuwające się problemy. Podręcznik był oryginalny,ale kontrowersyjny. Świadectwem skuteczności prac nad doskonaleniem podręczników do trygonometrii była"Trygonometria" Wł.Wojtowicza (1928). Sposób podawania materiału w tym podręczniku jest bardzo zbliżony do tego, jaki znajdujemy w podręcznikach dzisiejszych.

Ukoronowaniem nauki o funkcji w kursie geometrii była geometria analityczna. W programach nauczania przeznaczono ją dla klasy VIII (V). Znacznie zróżnicowany był zakres materiału między wydziałem matematyczno-przyrodniczym a innymi wydziałami. We wszystkich programach była tylko geometria analityczna na płaszczyźnie. Podręczniki podawały materiał nieco szerszy. W "Początkach geometrii analitycznej" A.Łomnickiego (1921) poszerzona została wiedza o konstrukcji samego przedmiotu: wykład o geometrii analitycznej na płaszczyźnie poprzedzała geometria analityczna jednowymiarowa, a kończyły wstępne pojęcia z geometrii analitycznej przestrzeni. Tak określany był przedmiot geometrii analitycznej:

"... Każde wyrażenie (algebraiczne lub przestrzenne) zawierające dwie zmienne możemy roztrząsać, analizować przy pomocy jego obrazu geometrycznego i wykrywać w ten sposób zawiłe nieraz związki matematyczne.

Z drugiej strony możemy każdą linię płaską zastąpić wyrażeniem zawierającym dwie zmienne. W ten sposób zamiast badać utwór geometryczny przy pomocy niedokładnego rysunku lub niepewnej wyobraźni geometrycznej, badamy go przy pomocy ścisłego rachunku. Obydwa te zadania stanowią przedmiot geometrii analitycznej płaskiej" (Łomnicki, 1912, str.163).

Treścią materiału nauczania były głównie krzywe stożkowe. Dla syntezy wiadomości o funkcjach ważne były dyskusje równań linii krzywych. Uwzględniono przy tym takie np. zagadnienia: stopień lini krzywej; symetrię względem osi; symetrię względem początku układu; granice rozciągania się linii krzywych; punkty nieskończonościowe (Łomnicki, 1912, str.230 - 234). Krzywe różnego kształtu, ich opisy algebraiczne były bardzo poglądowe i łatwo budziły zaciekawienie. We wszystkich podręcznikach umieszczono przykłady takich linii. Najwięcej było ich w podręczniku

J.Zydlera (1928), gdzie w bogatych notatkach historycznych umieszczono wykaz równań niektórych krzywych algebraicznych wraz z ich nazwami. Tajemnicze greckie nazwy, piękne kształty, ciekawe sposoby powstawania różnych linii nadawały geometrii poznawanej przez ucznia szkoły średniej oprawę godną "królowej nauk".

3. FUZJA RÓŻNYCH DZIAŁÓW MATEMATYKI SZKOLNEJ W PROGRAMACH I PODRĘCZNIKACH

Fuzjonizm to dążenie do możliwie ścisłego, organicznego powiązania różnych działów matematyki. W ruchu reformatorskim na początku XX wieku była to jedna z zasadniczych kwestii. W dyspozycji sprawozdań dla Międzynarodowej Komisji do Spraw Nauczania Matematyki została ujęta w pytaniach: "Jakie działy matematyki są wykładane w szkołach różnych typów? Ile czasu poświęca się na ich naukę i jaki jest obszar programu ? W jakim stopniu uwzględniają się związki pomiędzy tymi działami oraz z matematyką stosowaną (obejmującą i technikę i fizykę) ?" (Sprawozdania,1910). We wrześniu 1911 roku na przygotowawczym Zjeździe Międzynarodowej Komisji w Mediolanie usystematyzowano zebrane dane na temat:

1° ścisłości w nauczaniu matematyki;

2° łączenia, "fuzji" różnych działów,

W drugim temacie wyróżniono następujące rozwiązania:

- łączenie algebry lub arytmetyki z geometrią,polegające na używaniu metody graficznej przy nauce arytmetyki i algebry oraz analogiczne zastosowania geometrii analitycznej; odnotowano to w większości krajów;
- łączenie się w jedno planimetrii i stereometrii, próby takie nie były zbyt liczne, co tłumaczono obowiązującymi programami nauczania;
- planimetrię i trygonometrię łączono we Francji, w większości krajów wykładane były oddzielnie;
- stereometria i geometria wykreślna były ogólnie oddzielnie traktowane;

- geometria syntetyczna i analityczna "cięć stożkowych" wykładane były różnie;
- algebra i geometria w Stanach Zjednoczonych nauczane były kolejno, a nie równolegle (co zostało skrytykowane już w referacie) (Łazowski, 1912, str.73-74).

W polskich koncepcjach nauczania matematyki potrzeba zespalania różnych przedmiotów matematycznych była mocno akcentowana. Już w roku 1906, wymieniając braki w sposobie nauczania, na drugim miejscu stawiano "...niezrozumienie matematyki jako jednej całości w różnych działach; arytmetyce, algebrze, geometrii i trygonometrii" (R.A.1906, str.537). Ministerialne programy nauczania niepodległej Polski nakazywały fuzję geometrii z arytmetyką w gimnazjum niższym. Kurs systematyczny geometrii nie był jednoznacznie podzielony na planimetrię i stereometrię. Do geometrii włączono geometrię wykreślną, a trygonometrię połączono z algebrą, przy wcześniejszym zapoznaniu z funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego w kursie geometrii.

W opracowaniach podręcznikowych najszybciej zauważalną formą realizacji idei fuzji było opracowanie wspólnych książek dla różnych dyscyplin. Był to zabieg czysto zewnętrzny, polegający na złożeniu w jedną książkę podręczników do różnych przedmiotów(np. "Arytmetyka i geometria" ;Strutyński, 1928). Głębszą wymowę miało umieszczenie tych podręczników pod wspólnym tytułem, np. w "Arytmetyce" T.Sierzputowskiego (1921, 1922 a, 1922,b). część każdej z książek przeznaczona była na geometrię poglądową. Niektóre podręczniki zatytułowane "Geometria" miały w podtytułach: "Planimetria i stereometria" (Łomnicki, 1930 a ; Suppantschitsch, 1912) lub "Trygonometria i geometria analityczna" (Łomnicki, 1930 b; Suppantschitsch, 1913). Innym z mechanicznych środków łączenia przedmiotów było umieszczenie w podręczniku z jednej dyscypliny rozdziałów poświęconych zagadnieniom, którymi ta dyscyplina się nie zajmuje, np.w "Geometrii analitycznej" (Łomnicki, 1912) - rozdz.XI "Pochodna i całka"; w "Geometrii" (Zydler, 1925) - rozdz.XI "Trygonometryczne funkcje kąta ostrego"; w "Geometrii" (Suppantschitsch, 1912) - "Dodatek. Liczby niewymierne". Naturalnym środkiem zespalającym węższe dyscypliny matematyczne była rezygnacja z wyraźnego wydzielania ich w

ramach przedmiotu ogólnego,np. wcześniejsze podręczniki dzieliły jeszcze trygonometrię na goniometrię i trygonometrię właściwą — w późniejszych była już tylko trygonometria; podobnie w niektórych podręcznikach nie dzielono ostro geometrii na planimetrię i stereometrię, jak to było wcześniej ogólnie przyjęte.

Oczywiście, w idei fuzjonizmu nie chodziło o umieszczanie obok siebie, ale o wzajemne przenikanie się wiadomości z różnych dziedzin. Zbliżenie do siebie różnych dyscyplin matematycznych miało dać właściwy pogląd na istotę matematyki i jej sposób opisywania świata. Dotyczyło to głównie kursów propedeutycznych. Konkretyzacja jednych pojęć matematycznych za pomocą drugich - to doskonały środek poglądowy, w którym jeden przedmiot był przybliżany i wyjaśniany drugim przedmiotem. Szczególnie pożyteczne były zastosowania arytmetyki i geometrii w algebrze, nauce bardziej abstrakcyjnej. Oto przykłady tematów w ten sposób opracowywanych.

Poznanie prawideł dodawania i odejmowania"liczb ogólnych" rozpoczynała ilustracja liczb naturalnych za pomocą odcinków prostej. Sama nazwa "linia liczbowa" w połowie wywodziła się z geometrii, w połowie z arytmetyki. Określenie i własności dodawania i odejmowania były każdorazowo przedstawiane za pomocą odcinków i popierane przykładami arytmetycznymi. Wprowadzenie liczb względnych połączono znowu z "linią liczb względnych lub algebraicznych", na której następnie ilustrowano dodawanie i odejmowanie tych liczb. Iloczyn "ab" przedstawiał pole prostokąta, a "abc" objętość prostopadłościanu zbudowanego na odcinkach długości a,b,c. Na odpowiednio dzielonych kwadratach i sześcianach przedstawiano wzory skróconego mnożenia. Zdarzało się , że ilustracjami geometrycznymi opatrywano także algorytmy wyciągania pierwiastków: kwadratowego i sześciennego. Odwrotne przenikanie wiadomości arytmetycznych i algebraicznych do geometrii poglądowej zachodziło oczywiście przy wszystkich zagadnieniach metrycznych.

Związki innego rodzaju występowały między arytmetyką a algebrą. Algebrę wprowadzano przez uogólnianie "liczb szczegółowych".Podkreślano, że jest to korzystne ze względu na uproszczenie pewnych sformułowań słownych. W niższych oddziałach

nie było w żadnym podręczniku progu oddzielającego oba przedmioty." Liczby szczegółowe" stopniowo zastępowano literami, które otrzymywały nazwę "liczb ogólnych", a nauka o nich - "arytmetyki ogólnej". Później zbiór liczb poszerzano o liczby ujemne, które "... nazywamy liczbami względnymi albo algebraicznymi, a naukę o nich algebrą". Poznanie prawideł rachunkowych liczb i wyrażeń nie kończyło rozszerzania problematyki. W dalszej kolejności czytamy: "... algebrą zaś nazywamy obecnie tę część ogólnej umiejętności arytmetycznej, która się zajmuje specjalnie równaniami". Zespolenie z arytmetyką, tkwiące w idei konstrukcji algebry szkolnej, zostało podkreślone w tytułach podręczników. Przeważnie były to podręczniki do arytmetyki i algebry (Mihułowicz, 1920; 1924; 1929; 1930).

Realizację idei fuzji wiązano bardzo mocno z równoczesnym opracowywaniem stereometrii i planimetrii. L.Zarzecki pisał, że jest to "... jedna z najzdrowszych myśli propedeutycznego nauczania, bowiem: w otoczeniu widzimy przeważnie bryły, skoro więc mamy rozpocząć naukę na tle doświadczeń, należy wziąć jako punkt wyjścia bryłę" (Zarzecki, 1919). I znowu zgodność z tą zasadą występowała we wszystkich omawianych podręcznikach geometrii poglądowej. Punktem wyjścia wszędzie były bryły, przeważnie sześcian. Później z obserwacji figur przestrzennych wyprowadzano figury płaskie: po opisaniu sześcianu i kuli omawiano proste, koło, kąty; po ostrosłupie i 12-ścianie - trójkąty; po graniastosłupach i ostrosłupach - czworoboki. Trzeba powiedzieć, że przeplatanie się rozważań na temat figur płaskich i przestrzennych miało także swoich przeciwników. J.Sprecher pisał:

"Dwa najbardziej niepodobne utwory płaskie mają więcej zasadniczej wspólności choćby wymiarowość, wzajemną przemienność, podział na trójkąty itp. aniżeli podobne ze względu na elementy utwór płaski i bryła. A i dla bezpośredniego związku, dla ułatwienia koncentracji racjonalniej jest najpierw opracować figury płaskie, później bryły; pozwala to uczniowi przejrzyście i jasno objąć całość" (Sprecher, 1913, str.505). Należy nadmienić, że autor nie był przeciwny łączeniu arytmetyki i geometrii, w czym upatrywał doskonałą okazję do zrozumienia funkcji, gdyż jak pisał: "W arytmetyce zależność jako taka jest formalnie mniej uchwytna,

aby mogła służyć za substrat do wyrobienia u uczniów tego pojęcia. Uczeń niezupełnie rozumie cel wyrażenia: suma jest funkcją dodajników. Jeszcze proporcje pozwalają uwydatnić zależność na przykładach praktycznych czyli stosować pojęcie funkcji. Jednakże zależność wprost i odwrotnie proporcjonalna jest zanadto prosta, aby można należycie wykazać to pojęcie. Natomiast wielką rozmaitość zależności użycza nauka geometrii ..." (str. 508).

W kursach systematycznych autonomia przedmiotów była znacznie większa. Elementy różnych dyscyplin łączono rzadziej i dotyczyło to przeważnie tylko pewnych określonych zagadnień. W układzie algebra-geometria tematami zawierającymi pojęcia i metody pracy obu przedmiotów były:

- w algebrze: wykresy funkcji, graficzne rozwiązywanie równań i układów równań, graficzna ilustracja liczby niewymiernej, geometryczna interpretacja ilorazu różnicowego i pochodnej, zastosowania wiadomości (głównie badania funkcji, w tym wyznaczania wartości ekstremalnych) w geometrii;
- w geometrii: mierzenie i obliczanie wielkości geometrycznych, konstrukcje wyrażeń algebraicznych i konstrukcje za pomocą analizy algebraicznej.

Najpełniej i w sposób najbardziej naturalny oba przedmioty były zespalane w zbiorach zadań.Bardzo popularne książki R.Witwińskiego (1921; 1922) i N.Rybkina (bez daty; 1922; 1923) zawierały przeważnie zadania z pogranicza obu przedmiotów. Oto fragment przedmowy R.Witwińskiego do jednego z jego zbiorów zadań: "Celem książki niniejszej jest wykształcenie w uczniu umiejętności stosowania metody algebraicznej jako narzędzia badania w geometrii, rozbudzenia pojęć funkcji i równania w zastosowaniach geometrycznych " (Witwiński, 1922).

Oczywiście naturalną okazję do pokazania związków między algebrą a geometrią stworzono, włączając do programów szkoły średniej geometrię analityczną. Biorąc do ręki nowy podręcznik już na wstępie uczeń dowiadywał się, że: "Jej metoda polega na tym, że utwory geometryczne, więc linie, powierzchnie, przedstawiamy za pomocą równania i przez dyskusję równania badamy własności lini lub powierzchni. Na tej właśnie wzajemności na

algebraicznym odzwierciedleniu własności utworu geometrycznego i na geometrycznej interpretacji związku algebraicznego, polega istota geometrii analitycznej" (Zydler, 1928, str.1).

Fuzja planimetrii i stereometrii w wykładzie systematycznym albo nie była przeprowadzana, albo ograniczała się w zasadzie do przestawnego umieszczenia pewnych rozdziałów. W podręcznku J.Zydlera (1928),np. w 12 kolejnych rozdziałach przeznaczonych na materiał planimetryczny,rozdział VII dotyczył położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni; stereometrię zawierały następnie rozdziały końcowe: XIII - XV. W innym podręczniku (Wojtowicz, 1926), gdzie układ materiału był podobny, umieszczono wśród pewników podanych na początku nauki geometrii także te, które dotyczyły przestrzeni.

Na koniec trzeba zaznaczyć, że do głównych idei charakteryzujących programy nauczania i podręczniki szkolne odrodzonego szkolnictwa polskiego należały także kształcenie wyobraźni przestrzennej oraz pedagogizacja nauczania i dostosowanie go do naturalnego rozwoju umysłowego ucznia.

PUBLIKACJE WYKORZYSTANE:

I. Literatura o charakterze ogólnym

ANDRONOW, J.K.: Tri etapa w razwitii mieżdunarodnogo szkolnogo matimaticzeskogo obrazowania w XIX - XX w., Matematika w Szkole 4(1967),str.82 - 85.

R.A.: Nauczanie matematyki, Szkoła Polska 25, nr.16 - 17 (1906), str.537 - 547, nr 18,str.607 - 612.

ARVAY, W.: Jak prowadzić naukę o funkcjach w naszych gimnazjach?, Muzeum 27(1911), str.500 - 521.

BIELECKI, Br.: W sprawie programów matematyki w naszych szkołach średnich, Przegląd Pedagogiczny 42.3(1923).

BÒBR, St.: Kilka słów o programie tzw. algebry, Rocznik Pedagogiczny 2(1924),str. 166 - 169 .

Cz.A.: rec. S.Steckel, Pojęcie granicy i jego zastosowania 1929, Przegląd Pedagogiczny 49 (1930), str.199.

DICKSTEIN, S.: O reformie nauczania matematyki w Polsce. Notatka historyczna, Rocznik Pedagogiczny 1(1921), str.263 - 269.

HOBORSKI, A.: Uwagi o dydaktyce matematyki dla wyższych klas gimnazjów klasycznych, Kraków 1917.

HOBORSKI, A.: Trzy odczyty o nauczaniu matematyki w szkole średniej, Kraków 1925.

HORDYŃSKI, L.: O nauczaniu matematyki w galicyjskich szkołach realnych, Muzeum 29(1913), str. 162 - 182.

JAMRÒGIEWICZ, R.: rec. Pl.Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry dla wyższych klas szkół średnich, Wyd.III, 1907, Muzeum 25(1909),str.88 - 93.

KALICUN-CHODOWICKI, B.: Geometria w programie matematyki dla gimnazjów państwowych, Rocznik Pedagogiczny 2(1924),str. 169 - 172.

KIELSKI, B.: Typy szkół średnich ogólnokształcących na ziemiach polskich, Rocznik Pedagogiczny 1(1921).

Kronika, Przegląd Pedagogiczny (1906 - 1930).

KRYGOWSKA, Z., KULCZYCKI, S., STRASZEWICZ, S.: Nauczanie geometrii w klasach licealnych szkoły ogólnokształcącej, Warszawa 1954.

KULCZYCKI, S.: rec. T.Gutkowski-Wilkosz, Algebra elementarna,cz. I. Warszawa 1923, Przegląd Pedagogiczny 43 (1924), str. 100 - 102.

ŁAPAREWICZ, A.: rec. K.Kirst i Z.Szczawiński, Trygonometria oraz zbiór zadań, 1910; Wiadomości Matematyczne 15(1911), str. 128 - 132.

ŁAZOWSKI, T.: Zjazd Komisji Międzynarodowej w sprawie nauczania matematyki, Wychowanie w Domu i w Szkole 5(1912), str. 71 - 75 .

Ł.T.: Kilka uwag o nauczaniu geometrii, Przegląd Pedagogiczny 38(1919).

Nasza szkoła średnia. Krytyka jej podstaw i konieczność reformy, Praca zbiorowa, Kraków 1906.

NEAPOLITAŃSKI, S.: Zarys dydaktyki matematyki dla nauczycieli szkół powszechnych i średnich, Warszawa 1929.

Nowe plany naukowe austriackich szkół, Lwów 1909.

O programie naukowym szkoły średniej, Przegląd Pedagogiczny 38 (1919).

PAHL, Fr.: Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts, Leipzig 1913.

Prace Komisji Pedagogicznej przy Stowarzyszeniu Nauczycielstwa Polskiego, Przegląd Pedagogiczny 36(1917).

Program gimnazjum państwowego. Gimnazjum wyższe. Program kl.IV (I) i ramy programu klas następnych, Warszawa 1920.

Program gimnazjum państwowego. Wydział humanistyczny, Warszawa 1922 a.

Program gimnazjum państwowego. Wydział klasyczny, Warszawa 1922 b

Program gimnazjum państwowego. Wydział matematyczno-przyrodniczy, Warszawa 1922 c.

Program naukowy szkoły średniej, Warszawa 1919.

Program szkoły średniej ogólnokształcącej. Z prac Sekcji III (szkół średnich)b.Wydziału Oświecenia przy Komitecie Obywatelskim stołecznego miasta Warszawy, Wychowanie w Domu i Szkole 9.1(1916), str.923 - 987.

Projekt planu naukowego szkoły realnej w Galicji ułożony przez Towarzystwo Nauczycieli Szkół Wyższych, 1913.

Projekty reformy wykładu matematyki i przyrodoznastwa ułożone przez Komisję Naukową Towarzystwa Przyrodników i Lekarzy Niemieckich,z dołączeniem sprawozdania z dotychczasowej działalności Komisji przez A.Gutzmera z Halii n/s: Szkoła Polska 26,nr 5, str. 195 - 198; nr 6, str. 229 - 232, nr 7, str. 273 - 276, nr.8,str. 307 - 310; nr 9,str. 421 - 424(1907).

Projekt zastosowania planu nowych gimnazjów realnych do potrzeb szkół średnich w Galicji, ułożony przez lwowski komitet przygotowania reformy szkolnej, istniejący w łonie Tow. Nauczycieli Szkół Wyższych, Muzeum 25 (1909), str.135 - 156.

Referat Komisji Programowej Koła Matematyczno - Fizycznego, Wiadomości Matematyczne 14(1910),str. 95 - 133.

SCHUBERTH, E.: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, 1971.

Sejmowa Komisja Szkolna wobec szkolnictwa średniego, Muzeum 25 (1909),str. 383 - 418.

Sprawozdania przedwstępne Komisji Międzynarodowej d/s Nauczania Matematyki o organizacji Komisji i o planie ogólnym jej działania, Wiadomości Matematyczne 14(1910), str.11 - 24.

Sprawozdania z miesięcznych posiedzeń Koła Matematyczno - Fizycznego w latach 1907 - 1911, Wiadomości Matematyczne 10 - 15 (1906 - 1911)a.

Sprawozdania z rocznej działalności Koła Matematyczno - Fizycznego w latach 1907 - 1911, Wiadomości Matematyczne 10 - 15 (1906 - 1911)b.

SPRECHER, J.:rec. R.Suppantschitsch, Zarys geometrii dla kl.III gimnazjum, tłum. L.Hordyński, Lwów 1913, Muzeum 29.2(1913), str. 504 - 510.

SPRECHER. J.: rec. T.Gutkowski, Algebra elementarna, cz.I, 1923, Muzeum XXXIX (1925), str.320 - 325.

STRUTYŃSKI, K.: Kilka uwag w sprawie nauki matematyki w szkołach średnich w szczególności w gimnazjum na podstawie planów z roku 1909, Muzeum 27 (1911), str.28 - 58.

SZCZEPAŃSKI, J.: Program arytmetyki dla szkoły średniej ze wskazówkami metodycznymi, Szkoła Polska 25 (1906).

TIMERDING, H.E. (in BRAUNSCHWEIG):Die Verbreitung des mathematischen Wissens und der mathematischen Auffasung, Berlin 1914.

WACHUŁKA, A.: Zarys rozwoju nauczania matematyki, rozdział I książki "Wybrane zagadnienia metodyki matematyki", PZWS, Warszawa 1971.

WACHUŁKA, A.: Józef Brutkowski z Poznania i jego doktorat w Uniwersytecie Berlińskim w roku 1859. Studia i materiały z dziejów nauki polskiej, Seria C, z.22, str.19 - 22, PWN, Warszawa, (1978).

ZABIELSKI, S.: rec. A.Łomnicki, Geometria. Podręcznik dla szkół średnich, cz.I i II. Planimetria. Stereometria dla kl.IV i V, Lwów 1911. Muzeum 28.1 (1912), str. 222 - 229.

ZAREMBA, St.: Pogląd na program naukowy szkół średnich, Wiadomości Matematyczne 24(1920), str.97 - 107.

ZARZECKI, L.: Nauczanie matematyki początkowej, Wyd.III, Warszawa 1919 .

ZARZECKI, L.: W sprawie rachunków tzw. wyższych w szkole średniej, Przegląd Pedagogiczny 40(1921), str. 133 - 138.

Zasady planu nauczania w szkole średniej. Umotywowanie projektu wypracowanego przez Sekcję Szkolnictwa Średniego w roku 1918, Lwów - Warszawa 1921.

II. Cytowane podręczniki i zbiory zadań

ARLITEWICZ, Z.: Tematy matematyczne z rozwiązaniami i objaśnieniami dla klas wyższych szkół średnich, Warszawa 1923.

BARTEL, K.: Geometria wykreślna, wyd.II, Lwów 1922.

BÓBR, St.: Badanie funkcji liniowej oraz trójmianu drugiego stopnia, Warszawa 1920.

GUTKOWSKI, T.: Algebra elementarna, cz.I, Warszawa 1917 a.

GUTKOWSKI, T.: Trygonometria z licznymi ćwiczeniami, Warszawa 1917 b.

GUTKOWSKI, T.: Algebra elementarna, cz.II, Warszawa 1919.

KALICUN - CHODOWICKI, B.: Geometria wykreślna. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich, Lwów 1925.

ŁAZOWSKI, T.: Geometria wykreślna. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich, Warszawa 1917.

ŁOMNICKI, A.: Początki geometrii analitycznej, Lwów 1921.

ŁOMNICKI, A.: Geometrya. Podręcznik dla szkół średnich. Stopień wyższy cz.III i IV, Trygonometrya. Geometrya analityczna, Lwów 1912.

ŁOMNICKI, A.: Geometria. Podręcznik dla szkół średnich, cz.I, Planimetria - Stereometria, Lwów 1930, Wyd.IV.

ŁOMNICKI, A.: Geometria. Podręcznik dla szkół średnich, cz.II, Trygonometria, Lwów 1930, Wyd. IV.

MIHUŁOWICZ, J.: Podręcznik arytmetyki dla kl.IV - V szkół średnich, Lwów 1920, Wyd.II.

MIHUŁOWICZ, J.: Podręcznik arytmetyki i algebry dla V klasy gimnazjalnej, Wyd.VI, Lwów 1929.

MIHUŁOWICZ, J.: Podręcznik arytmetyki dla kl.VI szkół średnich Wyd.II, Lwów 1921.

MIHUŁOWICZ, J.: Podręcznik arytmetyki i algebry dla VI klasy gimnazjalnej, Wyd.V, Lwów 1929.

MIHUŁOWICZ, J.: Podręcznik arytmetyki i algebry na kl.VII gimnazjalną, 1924.

MIHUŁOWICZ, J.: Podręcznik arytmetyki i algebry dla VII klasy gimnazjalnej, Wyd.IV, Lwów 1930.

REBIÈRE , A.: Trygonometria dla szkół średnich, Łódź 1917.

RYBCZYŃSKI, W.: Repetytorium matematyki w zadaniach. Dla uczniów gimnazjum wyższego w szczególności do użytku abiturientów, Lwów 1931.

RUZIEWICZ, St., ŻYLIŃSKI, E.: Algebra. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich, cz.I, Lwów 1926 a.

RUZIEWICZ, St., ŻYLIŃSKI, E.: Algebra. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich, cz.II, Lwów 1926 b.

RUZIEWICZ, St., ŻYLIŃSKI,E.:Algebra. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich, cz.III, Lwów 1928.

RYBKIN, N.: Zbiór zadań geometrycznych, cz.I, Planimetria, Warszawa.

RYBKIN, N.: Zbiór zadań geometrycznych rachunkowych, cz.II, Stereometria, Wyd.VI, Warszawa 1922.

RYBKIN, N.: Zbiór zadań stereometrycznych wymagających zastosowania trygonometrii, Wyd.IV, Warszawa 1923.

SIERZPUTOWSKI, T.: Arytmetyka, cz.II (czwarty rok nauczania) Wyd.III, Lwów 1921.

SIERZPUTOWSKI, T.: Arytmetyka, cz.III (piąty rok nauczania kl.II), Lwów 1922 a.

SIERZPUTOWSKI, T.: Arytmetyka,cz.IV (szósty i siódmy rok nauczania) Wyd.IV, Warszawa 1922 b.

STECKEL, S.: Pojęcie granicy i jego zastosowania. Zbiór zadań i ćwiczeń dla użytku uczniów klas wyższych szkół średnich, Lwów 1929.

STODÓŁKIEWICZ, A.J.: Wykład trygonometrii prostokreślnej wraz z trygonometrią sferyczną, Wyd.II, Płock 1923.

STRASZEWSKI, F.: Trójmian kwadratowy i dyskusja zagadnień drugiego stopnia dla klas wyższych szkół średnich, Wyd.III. Lwów 1933.

SUPPANTSCHITSCH, R.: tłum. L.Hordyński: Podręcznik geometrii na klasę IV i V szkół średnich. Planimetria i stereometria, Lwów 1912.

STRUTYŃSKI, K.: Arytmetyka i geometria. Stopień niższy, cz.III, Wyd.II, Lwów 1928.

SUPPANTSCHITSCH, R.: Podręcznik geometrii dla kl.VI, VII, VIII. Trygonometria, Geometria analityczna, Lwów 1913.

SZAROGRADER, M.: Zbiór zadań konstrukcyjnych z zakresu 8 klas, Warszawa 1925.

SZCZAWIŃSKI, Z., KAMINSKI, S.: Trygonometria ze zbiorem zadań. Podręcznik szkolny, Warszawa 1918.

WITWIŃSKI, R.: Badanie zależności funkcjonalnej dla klas wyższych szkół średnich, Wyd.II, Warszawa 1921.

WITWIŃSKI, R.: Zbiór zadań z geometrii płaskiej wymagających zastosowania algebry. Żadania na wykrycie zależności między wielkościami geometrycznymi, Warszawa 1922.

WOJNICZ - SIANOŻĘCKI, J.: Algebra w zakresie gimnazjum wyższego, cz.I, kl.I(IV), Warszawa 1922.

WOJNICZ - SIANOŻĘCKI, J.: Algebra w zakresie gimnazjum wyższego, cz.II,kl.V(II), Warszawa 1923.

WOJTOWICZ, Wł.: Zarys geometrii elementarnej do użytku szkół średnich,Wyd.VI, Lwów 1926.

WOJTOWICZ, Wł.: Trygonometria płaska do użytku szkół średnich, Wyd.IV, Warszawa 1928.

WYCZAŁKOWSKI, W.J.: Trygonometria. Podręcznik dla szkół średnich, Warszawa 1929.

ZYDLER, J.: Geometria w zakresie szkoły średniej, Wyd.XIV, Warszawa 1925.

ZYDLER, J.: Zarys geometrii analitycznej na płaszczyźnie, Wyd.IV, Warszawa 1928.

SELECTED PROBLEMS ON TEACHING OF MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS AT THE BEGINNING OF THE SECOND REPUBLIC

Summary

The paper describes the influence of the programme, accepted by the Congress in Merano (1905), on teaching of mathematics in Poland in the first thirty years of the XX Century. Sections are entitled: 1.Mathematical curricula; 2.Teaching of functionary thinking; 3. Association of different mathematical branches in text-books.