ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 2 (1982)

dmptm 1982 143

EWA PUCHALSKA
Warszawa

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Liczydła planszowe – analiza struktury matematycznej i propozycja dydaktyczna

WSTĘP

Liczydła planszowe robią w ostatnich 15 latach błyskotliwą karierę w nauczaniu dzieci. Dydaktycy matematyki poświęcają im wiele uwagi, można by rzec, że temat stał się modny. Prowadzone są liczne badania, zmierzające zazwyczaj w jednym z dwóch kierunków: bądź to - opracowywania nowych, coraz bardziej wyrafinowanych w formie, typów liczydeł, bądź to - wynajdowania metod wykonywania skomplikowanych obliczeń (np. pierwiastkowania) lub rozważania wymyślnych problemów arytmetycznych (np. rachunków w systemie pozycyjnym o podstawie -2). Zaniedbywane są natomiast wątki bardziej elementarne, być może uważane - jak sądzę, niesłusznie - za mniej ważne lub matematycznie nieinteresujące.

Podejmując jeden z takich wątków chciałabym na wstępie podkreślić, że - moim zdaniem - najbardziej wartościowe dydaktycznie są liczydła najprostsze, gdyż na nich doskonale uwidaczniają się pewne prawidłowości arytmetyczne, zaciemniane w przypadku bardziej skomplikowanych liczydeł przez ich specjalną strukturę. Z kolei, wśród rozmaitych obliczeń możliwych do wykonania na liczydłach planszowych, za najbardziej istotne z punktu widzenia potrzeb matematycznego kształcenia dzieci uważam proste rachunki

na małych liczbach. Sądzę, że liczydła - wbrew skojarzeniom, jakie budzi ta nazwa - nie powinny być w dydaktyce matematyki traktowane jako przyrząd do ułatwiania liczenia. Trzeba na nie spojrzeć z zupełnie innej strony i to właśnie próbuję zrobić w niniejszym artykule.

Poniżej przedstawiam teoretyczną analizę liczydeł planszowych pewnego typu oraz przykładową propozycję wykorzystania ich w pracy z dziećmi.

Rozważania teoretyczne zawierają:

- opis różnych sposobów przedstawiania liczb i wykonywania czterech działań arytmetycznych na liczydłach wraz z analizą arytmetycznych i algebraicznych aspektów tych obliczeń,
- zmatematyzowany model psychologicznego systemu operacji myślowych odpowiadających obliczeniom wykonywanym przez dzieci na liczydłach,
- interpretację "informatyczną" liczydła jako abstrakcyjnej maszyny wykonującej obliczenia.

Natomiast propozycja dydaktyczna dotyczy pięcioetapowego ciągu ćwiczeń, który wiedzie od uczenia się "zwykłych" obliczeń arytmetycznych na liczydłach, poprzez kodowanie ruchu pionków za pomocą umownych symboli (ustalanych wspólnie z dziećmi) i protokołowanie (w sposób analogiczny do protokołowania partii szachów), do przewidywania i "programowania" przebiegu obliczeń dla konkretnych liczb (np. dodawania 5 + 7) oraz prób układania ogólnego algorytmu dla danego typu obliczeń (np. dodawania dwu dowolnych liczb).

1. ARYTMETYKA LICZB NATURALNYCH NA LICZYDLE PLANSZOWYM "DZIESIĄTKOWYM"

1.1. Liczydło Hasslera Whitneya

Liczydłem nazwiemy każde urządzenie służące do przedstawiania liczb w umowny sposób za pomocą kamieni (kulek, koralików, pionków itp.) oraz do wykonywania działań (co najmniej dodawania i odejmowania) na tak przedstawionych liczbach za pomocą manipulacji tymi kamieniami. Termin liczydło planszowe oznacza liczydło mające postać planszy, na której ustawia się guziczki lub pionki.

Istnieje wiele rodzajów liczydeł planszowych (por. Puchalska, Semadeni 1976). Najpopularniejszym z nich, rozpowszechnionym także w polskiej szkole, jest liczydło opisane przez Papy'ego (1968), znane pod nazwą minikomputera Papy'ego.

100000	10000	1000	100	10
90000	9000	900	90	9
80000	8000	800	80	8
70000	7000	700	70	7
60000	6000	600	60	6
50000	5000	500	50	5
40000	4000	400	40	4
30000	3000	300	30	3
20000	2000	200	20	2
10000	1000	100	10	1
0	0	0	0	0

Rys. 1

Nieco mniej u nas znane, choć niewątpliwie warte rozpropagowania, jest liczydło wprowadzone do nauczania dzieci przez

Hasslera Whitneya (1970), które będę dalej nazywać liczydłem Whitneya. Jego zaletę stanowi matematyczna przejrzystość i prostota budowy planszy, którą jest po prostu pokratkowana kartka papieru (rys. 1).

Liczby wpisane w kratkach, czyli na polach planszy, oznaczają przypisane tym polom wartości. Planszę można w razie potrzeby rozszerzać zarówno w lewo, dodając kolumny: setek tysięcy, milionów itd., jak i w prawo o kolumny ułamkowe: części dziesiątych, części setnych itd. - zależnie od tego, jaki zakres liczbowy chcemy objąć.

Liczydło Whitneya jest typu addytywnego, tzn. pionki ustawiane na planszy reprezentują liczby w następujący sposób:

1° pojedynczy pionek stojący na polu o wartości "i" przedstawia liczbę "i";

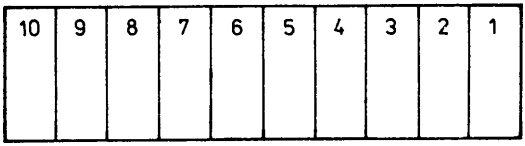
2° jeżeli na planszy stoi więcej niż 1 pionek, to liczbą reprezentowaną przez te wszystkie pionki razem jest suma liczb przedstawianych przez poszczególne pionki.

W pracy tej rozpatruję liczydła planszowe oparte na nieco zmodyfikowanej idei H.Whitneya, a przede wszystkim liczydło zwane umownie liczydłem dziesiątkowym, które stanowi wariant addytywno-pozycyjny liczydła Whitneya.

1.2. Budowa liczydła dziesiątkowego. Przedstawianie liczb na liczydle

Liczydło dziesiątkowe, które dalej będę nazywać po prostu liczydłem, stanowi połączenie idei Papy'ego z ideą Whitneya: z Papy'ego wzięta jest koncepcja oddzielnych tabliczek odpowiadających rzędom systemu dziesiątkowego, a z Whitney - wartości liczbowe przypisane polom na tabliczce.

Pojedyncza tabliczka liczydła dziesiątkowego ma kształt wydłużonego prostokąta podzielonego na dziesięć jednakowych pól oznaczonych liczbami od 1 do 10 (rys. 2). Liczby te, zwane wartościami pól, będę też czasem traktować jako numery, używając określenia "i-te pole" zamiast "pole o wartości i". Pola tabliczki mogą być - tak, jak to jest na minikomputerze Papy'ego



Rys. 2

- pomalowane na kolory klocków Cuisenaire'a odpowiadające przyjętym wartościom liczbowym. Ułatwia to w pewnej mierze orientację, ale nie jest konieczne; zupełnie dobrze pełnią swoją rolę tabliczki jednobarwne. Na każdym polu tabliczki teoretycznie można postawić dowolnie dużo pionków; w praktyce liczba tych pionków jest oczywiście ograniczona rozmiarami planszy. Nie wolno natomiast stawiać pionków na liniach oddzielających poszczególne pola.

Rozstawiając pewną liczbę pionków na tabliczce liczydła z zachowaniem powyższej zasady otrzymujemy układ pionków na tabliczce. Dopuszcza się też układ pusty.

Matematyzacją pojęcia układu pionków jest pojęcie stanu tabliczki, zdefiniowane następująco: Stanem pola nazwiemy liczbę pionków stojących na tym polu. Stan tabliczki jest wyznaczony przez stany jej wszystkich pól i może być rozumiany jako ciąg dziesięciowyrazowy (a_i), $i = 1,\ldots,10$, gdzie a_i oznacza liczbę pionków na i-tym polu. Stan tabliczki przy pustym układzie pionków nazywamy stanem zerowym.

Z każdym stanem tabliczki związana jest liczba zwana zawartością tabliczki lub wartością układu pionków na tej tabliczce. Liczbę tę dla stanu $s = (a_i)$, $i = 1,\ldots,10$, określamy następująco:

1° Zawartością i-tego pola jest iloczyn jego stanu przez jego wartość, tj. liczba $i \cdot a_i$;

2° Zawartością tabliczki jest suma zawartości wszystkich pól, tj. liczba $\Sigma_{i=1}^{10} i a_i$.

Innymi słowy, przyporządkowanie układowi pionków jego wartości odbywa się w następujący sposób:

1° każdy pionek położony na i-tym polu przyjmuje wartość i;

2° wartość układu pionków jest sumą wartości wszystkich pionków należących do układu;

3° wartość układu pustego jest równa zero.

Zamiast "wartość układu pionków" będę też czasem mówić "liczba przedstawiana (lub: reprezentowana) przez układ pionków".

Umawiamy się (podobnie jak w przypadku minikomputera Papy'ego), że wprowadzając drugą tabliczkę liczydła traktujemy ją jako tabliczkę dziesiątek, tzn. pionek na jej i-tym polu przyjmuje wartość 10i (i dziesiątek). Tabliczkę dziesiątek kładzie się na lewo od tabliczki jedności lub nieco powyżej. Analogicznie wprowadza się w razie potrzeby tabliczkę setek, tysięcy itd. Liczydło dziesiątkowe ma więc charakter addytywno-pozycyjny.

Rozszerzając w naturalny sposób pojęcie układu pionków na większą liczbę tabliczek można w ogólnym przypadku zdefiniować stan liczydła, który jest wyznaczony przez stany wszystkich tabliczek i da się opisać macierzą (a_{ij}), $i=1,\ldots,10$, $j=0,\ldots,k-1$, gdzie k oznacza liczbę użytych tabliczek (w teoretycznych rozważaniach liczba k może być dowolnie duża). Wówczas zawartością liczydła jest

$$\sum_{j=0}^{k-1} 10^j \cdot \sum_{i=1}^{10} i \cdot a_{ij} .$$

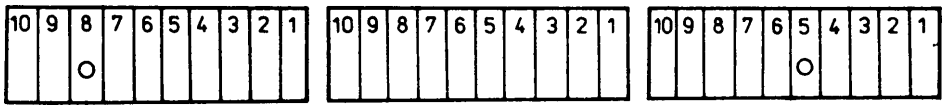
Przedstawieniem (lub reprezentacją) liczby n na liczydle nazwiemy każdy układ pionków, którego wartość jest równa n. Oczywiście, każda liczba naturalna ma swoje przedstawienie na liczydle, i to na ogół więcej niż jedno. Wśród wszystkich możliwych przedstawień liczby n wyróżniamy dwa następujące:

(a) przedstawienie kardynalne - w postaci układu n pionków na polu 1 tabliczki jedności. Odpowiada to sumie $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ razy}}$;

(b) przedstawienie standardowe - w postaci odpowiadającej cyfrowemu zapisowi w systemie dziesiątkowym.

Dla k-cyfrowej liczby n będzie to więc przedstawienie za pomocą układu co najwyżej k pionków ustawionych na k tabliczkach w taki sposób, że na każdej tabliczce stoi co najwyżej jeden pionek i na kolejnych tabliczkach są przedstawione kolejne cyfry liczby n (taki układ pionków nazwiemy układem standardowym).

Przedstawianie standardowe zawsze istnieje i jest jednoznaczne, gdyż każda liczba jednocyfrowa ma jednoznaczne przedstawienie za pomocą co najwyżej jednego pionka. Dla przykładu: rysunek 3 pokazuje standardowe przedstawienie liczby 805 na liczydle (tabliczka dziesiątek jest pusta).



Rys. 3

1.3. Różne metody dodawania i odejmowania na liczydle

Jak już wspomniałem, na liczydle dziesiątkowym można wykonywać cztery działania arytmetyczne za pomocą odpowiednich manipulacji pionkami. Poniżej przedstawię metody dodawania i odejmowania, a w 1.5 - mnożenia i dzielenia.

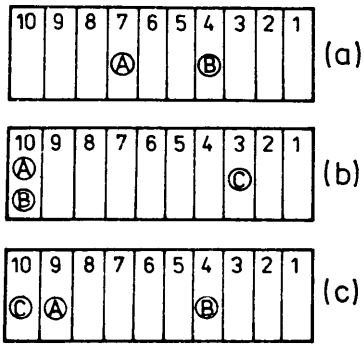
W poniższych opisach przyjmuję, że działanie jest wykonane, gdy zawartość liczydła została zmieniona w odpowiedni sposób (tzn. zwiększyła się lub się zmniejszyła o odpowiednią liczbę). W praktyce na ogół wykonuje się jeszcze czynności dodatkowe, które w określony sposób porządkują układ pionków na liczydle, nie zmieniając przy tym jego zawartości. Czynności te opiszę w paragrafie 1.4.

Istnieją dwie naturalne metody dodawania na liczydle: metoda, którą nazwiemy chińczykową oraz metoda dostawiania pionków.

W praktyce zwykle używa się drugiej z nich, pierwsza jest - jak się wydaje - stosowana mało albo wcale, nie wspomina też o niej literatura. To przeoczenie jest tym dziwniejsze, że metoda chińczykowa jest w pewnym sensie pierwotna i w niektórych przypadkach wygodniejsza.

Nazwa metody chińczykowej pochodzi, oczywiście, od popularnej gry "Człowieku, nie irytuj się!", zwanej też "Chińczykiem", podczas której należy przesuwać pionki na planszy o daną liczbę kroków. Tutaj podobnie.

Dodawanie chińczykowe polega na bezpośrednim wykorzystaniu faktu, że przesunięcie pionka o jedno pole w lewo (na tabliczce jedności) oznacza dodanie do zawartości liczydła liczby 1. Wobec tego działanie "+n" można zrealizować wykonując n kroków w lewo (stale na tabliczce jedności). Istotne jest, że te n kroków nie musi być wykonane jednym pionkiem, można poruszyć dwa lub więcej spośród pionków stojących na tabliczce, a nawet można wprowadzić nowe, traktując przesunięcie pionka spoza tabliczki na pole 1 jako jeden krok (przyjmujemy naturalną umowę, którą będziemy stale stosować, że obszar na zewnątrz wszystkich tabliczek traktujemy jako wspólne pole o wartości zero). Trzeba tylko zachować łączną liczbę n kroków. Na przykład, mając dany układ pionków taki jak na rysunku 4a można wykonać "+12" następująco: 3 kroki pionkiem A (z pola 7 na



Rys. 4

pole 10), 6 kroków pionkiem B (z pola 4 na pole 10), 3 kroki nowo wprowadzonym pionkiem C (z pola 0 na pole 3) -

razem 12 kroków w lewo, co doprowadza do sytuacji takiej jak na rysunku 4b. Inna możliwość to wykonać 10 kroków pionkiem C oraz 2 kroki pionkiem A; otrzymamy wtedy układ pionków taki, jak na rysunku 4c, którego wartość jest równa wartości układu z rysunku 4b i o 12 większa od wartości układu z rysunku 4a.

Mając dany układ pionków na kilku tabliczkach, możemy do wykonania dodawania chińczkowego w rzędach wykorzystać fakt, że na j-tej tabliczce krok w lewo oznacza "$+10^j$", np. "+12" można wykonać za pomocą jednego ruchu w lewo na tabliczce dziesiątek i 2 ruchów na tabliczce jedności.

Dodawanie metodą dostawiania opiera się na tym, że dostawianie pionka na i-tym polu zwiększa o i zawartość liczydła. Dodawanie "+n" wykonuje się więc dostawiając na planszy dowolny układ pionków mający wartość n. Zauważmy, że aby dodać w ten sposób dwie liczby, wystarczy ustawić na liczydle układ pionków przedstawiający pierwszy składnik i dostawić układ przedstawiający drugi składnik. Mając dane przedstawienie obu składników, mamy tym samym dane przedstawienie sumy: wystarczy patrzeć na pionki jak na jeden układ.

Odejmowanie można wykonywać na liczydle co najmniej trzema sposobami. Obok metody chińczykowej oraz metody zdejmowania, będącej odwróceniem dodawania przez dostawianie, metoda trzecia polega na dostawianiu liczby przeciwnej. Powszechnie stosuje się niemal wyłącznie tę ostatnią metodę, choć - pomimo niewątpliwych walorów dydaktycznych - jest ona najmniej naturalna, gdyż wymaga zmiany interpretacji podstawowych pojęć, związanych z liczydłami, takich jak wartość układu pionków, przedstawienie liczby itp. Metody te opiszę w kolejności, w jakiej zostały wymienione.

Odejmowanie chińczykowe polega na wykonaniu na liczydle odpowiedniej liczby kroków w prawo: jeden krok w prawo (na tabliczce jedności) oznacza odjęcie jedynki od zawartości liczydła. Podobnie jak przy dodawaniu, ważna jest łączna liczba kroków, nie muszą być wszystkie wykonane jednym pionkiem. Wprowadzenie nowych pionków nie jest dozwolone (z pola 0), a więc działanie "-n" jest wykonalne tylko wtedy, gdy zawartość liczydła jest nie mniejsza niż n. W razie potrzeby można przenosić pionki z pola 1 tabliczki dziesiątek na pole 10 tabliczki jedności,

lecz przeniesienie takie nie jest uważane za krok w prawo, gdyż nie zmienia zawartości liczydła (podobnie przeniesienie pionka w przeciwnym kierunku nie jest uważane za krok w lewo).

Odejmowanie metodą zdejmowania polega na zdjęciu z planszy układu pionków o odpowiedniej wartości. Wykonanie tą metodą działania "-n" jest oczywiście możliwe tylko przy zawartości liczydła nie mniejszej niż n i wymaga uprzedniego przedstawienia tej zawartości w postaci układu pionków zawierającego podukład o wartości n.

Odejmowanie za pomocą dostawiania liczby przeciwnej wykonuje się następująco: Aby od danej liczby m odjąć liczbę n, dostawiamy (w jakiś umowny sposób) wyróżniony układ pionków o wartości n interpretując całość jako przedstawienie różnicy $m-n$. Tak więc pionki wchodzące w skład odjemnika przyjmują umownie wartości ujemne; dokładniej: pionek na polu i przyjmuje wartość $-i$. Równocześnie pionki odjemnej mają nadal wartości dodatnie (określone tak, jak poprzednio). Dopuszczenie dwóch rodzajów pionków wymaga zmiany sposobu opisu stanu liczydła, gdyż stan pojedynczego pola jest teraz określony przez parę (a_i, b_i) liczb, z których pierwsza określa liczbę pionków "dodatnich", a druga - liczbę pionków "ujemnych" na tym polu. Pociąga to za sobą zmianę sposobu obliczania zawartości liczydła, które teraz wyraża się dla pojedynczej tabliczki liczbą $\Sigma_{i=1}^{10} i \cdot (a_i - b_i)$.

Powyższe teoretyczne rozważania są na szczęście zbędne w praktycznych ćwiczeniach wykonywanych przez dzieci. Uczniowie przedstawiają na liczydle różnicę $m-n$ w taki sposób, że ustawiają liczbę m pionkami jednego koloru (np. białego), liczbę n - pionkami drugiego koloru (np. czarnego) i pamiętają, że obecnie nie należy sumować wartości wszystkich pionków (jak to się robiło uprzednio), lecz wartości pionków białych trzeba dodawać, a wartości pionków czarnych trzeba odejmować. W dalszym ciągu manipulacji, które są przeprowadzane tak, by nie zmienić zawartości liczydła (patrz opis w 1.4), dzieci dążą do wyeliminowania czarnych pionków i przedstawienia liczby $m-n$ za pomocą tylko pionków białych (dobieramy przykłady, w których $m \geq n$).

1.4. Układy i stany równoważne

W dalszym ciągu rozważań używam określeń: układ pionków, stan liczydła itd. w znaczeniu pierwotnie zdefiniowanym, tj. bez wartości ujemnych. Ewentualna zmiana interpretacji będzie każdorazowo sygnalizowana.

Rozpatrujemy liczydło o ustalonej liczbie tabliczek. W zbiorze wszystkich możliwych układów pionków na tym liczydle oraz w zbiorze wszystkich możliwych stanów tego liczydła wprowadzimy następujące relacje równoważności:

Dwa układy pionków są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą wartość.

Dwa stany liczydła są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są wyznaczone przez równoważne układy pionków.

Równoważne układy pionków są przedstawieniami tej samej liczby. Ponieważ czasem jedno przedstawienie liczby może być wygodniejsze niż drugie, interesować nas będzie, jakie manipulacje pionkami pozwalają na przejście od danego układu do układu równoważnego.

Ogólnie biorąc, zmiana stanu liczydła może być dokonana w wyniku następujących manipulacji (zmieniających zawartość lub nie):

(a) stawianie pionków na planszy lub ich zdejmowanie z planszy;
(b) przesuwanie pionków z jednych pól na inne pola tej samej tabliczki;
(c) przenoszenie pionków na inną tabliczkę.

Można przy tym zauważyć, że:

A. Poruszając parą pionków w obrębie jednej tabliczki (dowolnego rzędu) w taki sposób, że jeden z nich przesuwa się o pewną liczbę pól w lewo, a drugi o tę samą liczbę pól w prawo, nie zmieniamy zawartości liczydła. Przesuwanie takie jest dopuszczalne również wtedy, gdy w jego wyniku jeden z pionków przechodzi z pola o wartości 1 w prawo poza tabliczkę, na

obszar umownie przyjęty jako wspólne pole zerowe dla tabliczek wszystkich rzędów, lub - odwrotnie - wchodzi z pola "zero" na pole 1. Nie można natomiast przesuwać w lewo pionka stojącego na polu o wartości 10. Dla tabliczki jedności manipulacje takie odpowiadają równości:

$$a + b = (a + m) + (b - m) \qquad \text{dla} \quad a,b,m \in N,$$

przy oczywistym założeniu, że nie przekraczamy lewego brzegu tabliczki, czyli $a + m \leq 10$ i $b - m \geq 0$ (dla tabliczek wyższych rzędów trzeba w powyższym wzorze pomnożyć m przez odpowiednią potęgę liczby 10).

B. Przenosząc pionek z pola 10 dowolnej tabliczki na pole 1 tabliczki następnego rzędu lub dokonując takiego przeniesienia w odwrotnym kierunku nie zmieniamy zawartości liczydła. Czynność ta odpowiada zamianie dziesięciu jednostek niższego rzędu na jedną jednostkę rzędu wyższego lub odwrotnie.

Zauważmy dla porządku, że bezpośrednie zastąpienie kilku spośród stojących na planszy pionków przez jeden pionek o tej samej wartości także zachowuje zawartość liczydła, lecz manipulacje takie, w których obliczenia wykonuje się w "głowie", a na planszy ustawia tylko gotowe wyniki, wykluczam z dalszych rozważań jako dydaktycznie chybione. Szkoda by było czasu na używanie liczydła w taki sposób. Jeżeli często świadomie proponujemy posłużenie się liczydłem dla wykonania rachunku, który dziecko potrafiłoby przeprowadzić w pamięci, to dlatego właśnie, że interesuje nas nie wynik, lecz sam tok obliczania: badanie występujących związków arytmetycznych i weryfikowanie zaobserwowanych prawidłowości. Takie podejście, w którym wykonanie obliczenia staje się czymś w rodzaju gry z określonymi regułami, jest daleko bardziej kształcące, ponieważ wówczas pytanie "dlaczego to się zgadza?" wyzwala pasję poznawczą dziecka w znacznie większym stopniu niż pytanie "ile to jest?"

Podstawowe znaczenie dla praktycznego posługiwania się liczydłem ma możliwość otrzymania z dowolnego układu pionków rów-

noważnego układu o wygodniejszej postaci. Możliwość ta wynika z następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE. Dowolny układ pionków na liczydle można przeprowadzić w równoważny układ standardowy za pomocą skończonego ciągu manipulacji typu A lub B.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jeżeli na pewnej tabliczce stoją dwa różne pionki, to rozsuwając je w sposób opisany w A o maksymalną możliwą liczbę pól musimy otrzymać co najmniej jedną z następujących sytuacji:

- jeden z pionków dotrze do pola 0, co eliminuje go z tabliczki i z dalszych rozważań; lub
- jeden z pionków dotrze do pola 10, co pozwala go przenieść na pole 1 następnej tabliczki.

Ponieważ rozpatrujemy wyłącznie skończone układy pionków, jest jasne, że po zastosowaniu tego postępowania skończoną ilość razy (być może także do różnych tabliczek) na każdej z tabliczek pozostaje co najwyżej jeden pionek.

WNIOSEK. Od dowolnego przedstawienia liczby naturalnej na liczydle można przejść do każdego innego jej przedstawienia za pomocą skończonego ciągu manipulacji typu A lub B.

Przyjmując manipulacje opisane w A i w B za reguły ustalające dozwolone sposoby poruszania pionkami na planszy liczydła, uzyskujemy możliwość "porządkowania" pionków tak, by po zakończeniu danego obliczenia jego wynik był przedstawiony w najwygodniejszej dla nas postaci. Zazwyczaj dążymy do uzyskania przedstawienia standardowego, gdyż z niego najłatwiej odczytać otrzymaną liczbę.

Rozpatrzmy teraz przypadek liczydła z pionkami "ujemnymi" i "dodatnimi". W tej sytuacji reguły A i B obowiązują nadal, lecz tylko w odniesieniu do każdego rodzaju pionków z osobna. Ponadto można zaobserwować dalsze prawidłowości dotyczące "mieszanych" par pionków:

C. Dostawiając na dowolnym polu dowolnej tabliczki liczydła dwa pionki przeciwnych znaków, lub zdejmując z dowolnego pola taką parę pionków, nie zmieniamy zawartości liczydła. Dzieci mówią, że takie dwa pionki "zbijają się" wzajemnie. Odpowiada to równości:

$$a + (-a) = 0.$$

D. Przesuwając w obrębie jednej tabliczki (dowolnego rzędu) dwa pionki różnych znaków o tę samą liczbę pól w lewo lub w prawo (oba pionki w tym samym kierunku), nie zmieniamy zawartości liczydła. Dla pary (a,b) pionków na tabliczce jedności odpowiada to równościom:

$$a - b = (a + m) - (b + m),$$

$$a - b = (a - n) - (b - n)$$

(dla m,n takich, że liczby $a+m$, $b+m$, $a-n$, $b-n$ są nie większe niż 10 i nie mniejsze niż 0).

Określając krótko układ, w którym występują pionki o wartościach dodatnich i ujemnych, mianem układu mieszanego, a układ składający się z pionków jednakowych znaków mianem układu jednorodnego, możemy sformułować następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. Każdy mieszany układ pionków na liczydle można przeprowadzić w równoważny układ jednorodny za pomocą skończonego ciągu manipulacji typów A, B lub C, a także za pomocą manipulacji typów A, B lub D.

Dla dowodu pierwszej części twierdzenia zauważmy, że wystarczy za pomocą manipulacji typu A i B doprowadzić oddzielnie podukład "dodatni" i oddzielnie podukład "ujemny" do postaci kardynalnej, a następnie "zbijać" kolejno wszystkie mieszane pary.

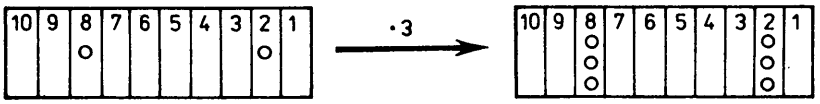
W drugim przypadku, jeżeli na danej tabliczce są dwa pionki różnych znaków, należy przesuwać je w kierunku zera, aż do wyeliminowania jednego z nich. Jeżeli pionki różnych znaków znajdują

się na różnych tabliczkach, należy sprowadzić je na wspólną tabliczkę stosując manipulacje typów A lub B.

Powyższe twierdzenie zapewnia efektywną wykonalność odejmowania metodą dostawiania przeciwnego składnika wraz z możliwością przedstawienia wyniku w postaci standardowej.

1.5. Mnożenie i dzielenie na liczydle

Mnożenie przez liczbę jednocyfrową wykonuje się zazwyczaj jako wielokrotne dodawanie. Posługiwanie się przy tym metodą chińczykową jest możliwe, ale niewygodne (dość żmudne i niezbyt kształcące). Natomiast zastosowanie metody dostawiania daje bardzo sugestywne "rozmnażanie" pionków, np. aby pomnożyć przez 3 liczbę przedstawioną danym układem pionków, zastępujemy każdy pionek trzema pionkami na tym samym polu (rys. 5).



Rys. 5

Druga metoda mnożenia polega na przejściu przez postać kardynalną: najpierw definiujemy mnożenie jedynki przez liczbę jednocyfrową n jako przeniesienie pionka z pola 1 na pole o wartości n. Aby pomnożyć przez n dowolną liczbę, przedstawiamy ją w postaci kardynalnej i wykonujemy mnożenie jedynki odpowiednią liczbę razy. Na przykład, jeżeli liczbę 6 przedstawioną jednym pionkiem na polu 6 chcemy tą metodą pomnożyć przez 7, zamieniamy pionek z pola 6 na 6 pionków na polu 1 i "skaczemy" tymi pionkami na pole 7. Otrzymujemy 6 pionków na polu 7. Metoda "rozmnażania" dałaby 7 pionków na polu 6.

Ogólnie biorąc, postępowanie przy mnożeniu liczby m przez liczbę n metodą rozmnażania można zapisać w postaci:

$$m \xrightarrow{\cdot n} \underbrace{m+m+\ldots+m}_{n \text{ składników}},$$

a metodą skakania poprzez pole 1 w postaci:

$$m \longrightarrow \underbrace{1+1+\ldots+1}_{m \text{ składników}} \xrightarrow{\cdot n} \underbrace{n+n+\ldots+n}_{m \text{ składników}}.$$

Przy pewnej wprawie można zrezygnować z każdorazowego przechodzenia przez pole 1 i mnożąc np. 6 przez 7 wykonywać w myśli zamianę na postać kardynalną, a manipulacyjnie zamieniać od razu 1 szóstkę na 6 siódemek.

Mnożenie przez 10 polega na przeniesieniu każdego pionka danego układu na odpowiednie pole następnej tabliczki. Podobnie: mnożenie przez 100 to przeniesienie o dwa rzędy, przez 1000 - o trzy itd.

Mnożenie przez dowolną liczbę można uzyskać składając powyższe operacje, np. aby pomnożyć przez 37, mnożymy przez 10 i przez 3, oprócz tego mnożymy przez 7 i wyniki dodajemy.

Dzielenie wykonuje się odwracając postępowanie przy rozmnażaniu pionków lub przy skakaniu poprzez pole 1. Wymaga to przygotowawczych czynności polegających na przekształceniu danego układu pionków w układ równoważny tak, aby pionki gromadziły się bądź to na polach o odpowiednich wartościach, bądź to w zbiory o odpowiedniej liczebności.

Można też wykonywać dzielenie (przez małe liczby) za pomocą wielokrotnego odejmowania chińczykowego, zaznaczając pionkiem na oddzielnej tabliczce "wynikowej", ile razy już odjęto. Metoda ta jest najłatwiejsza pod względem wykonywanych manipulacji, a przy tym pogłębia rozumienie sensu dzielenia i -jako taka - wydaje się godna polecenia.

Z wyżej wymienionych metod wykonywania mnożenia i dzielenia na liczydłach, powszechnie znana i stosowana jest metoda mnożenia przez rozmnażanie pionków. H.Whitney (1970) opisuje także dzielenie metodą odwrotną do rozmnażania (tj. za pośrednictwem gromadzenia pionków w zbiory o liczebności równej dzielnikowi) oraz metodę wielokrotnego odejmowania. Druga metoda mnożenia nie była dotąd stosowana (a przynajmniej nie ma o tym wzmianki w dostępnej mi literaturze), odwrotna zaś do niej metoda dzielenia za pośrednictwem gromadzenia pionków na polach o odpowiedniej

wartości została po raz pierwszy opisana w (Puchalska, Semadeni) i (Puchalska, 1977).

2. ARYTMETYCZNE I ALGEBRAICZNE ASPEKTY RACHUNKÓW NA LICZYDLE

Opisane metody wykonywania czterech działań na liczydle przeanalizuję teraz z punktu widzenia ich miejsca w systemie szkolnej nauki o działaniach arytmetycznych.

Podobnie jak pojęcie liczby stanowi syntezę kilku aspektów, tak również pojęcie działania kształtuje się w umyśle dziecka w wyniku syntezy rozmaitych sposobów realizacji i interpretacji procesu wykonywania tego działania. Liczydło jest dobrym przyrządem dla pokazania i porównania różnych sposobów podejścia do działań arytmetycznych, gdyż stosowane tu metody wykorzystują różne możliwości traktowania zarówno samego działania jako operacji, jak też liczb występujących w roli argumentów.

2.1. Działania chińczykowe i aspekt porządkowy liczby

Działania "chińczykowe" uwypuklają najbardziej pierwotny aspekt dodawania i odejmowania, jakim jest doliczanie i odliczanie. W taki właśnie sposób działa na przykład licznik samochodowy oraz licznik obrotów w magnetofonie. Działanie dokonuje się poprzez ruch (do przodu lub wstecz) i jest zakończone dopiero w momencie ustania tego ruchu, po właściwej liczbie kroków.

Rola dwóch składników w chińczykowej interpretacji dodawania $a+b$ jest w oczywisty sposób niejednakowa: pierwszy składnik jest dany przez układ pionków na planszy, natomiast drugi składnik nie ma fizycznej, pionkowej realizacji i nie istnieje jako samodzielna liczba, tylko jest traktowany wraz ze znakiem "plus" jako operacja "+b". Przyporządkowanie liczbom a i b ich sumy następuje w wyniku zastosowania funkcji jednej zmiennej "+b" do argumentu a. Odpowiada to spotykanej w podręcznikach dla dzieci strzałkowej interpretacji dodawania $a \cdot \xrightarrow{+b} \cdot$, w której a jest traktowane jako liczba (punkt na osi liczbowej), a "+b" jako operator ("skok" nad osią liczbową o odpowiednią liczbę jednostek).

Przemienność takiego dodawania jest nieoczywista, gdyż $a \bullet \xrightarrow{+b} \bullet$ oraz $b \bullet \xrightarrow{+a} \bullet$ stanowią jakościowo różne sytuacje i choć po zakończeniu czynności otrzymuje się tę samą zawartość liczydła, nie musi to bynajmniej być oczywiste dla dziecka.

Analogicznie, odejmowanie chińczykowe interpretuje odjemną jako liczbę daną przez układ pionków, a odjemnik jako operator "-b".

W chińczykowym sposobie dodawania i odejmowania można dostrzec analogię do działań na liczbach porządkowych. Czynności doliczania i odliczania mają wyraźny aspekt porządkowy (mówię, że doliczam jeden element, dwa, trzy itd., ale w istocie doliczam pierwszy element, drugi, trzeci itd.), równocześnie widać tu te same kłopoty z przemiennością dodawania (czy trzeci po piątym, to ten sam, co piąty po trzecim?). Aspekt porządkowy rachunków na liczbach jest jawnie zaniedbywany w naszej szkole, a skutkiem tego są powszechne później trudności z prostymi skądinąd obliczeniami typu: "za ile dni upływa termin zwrotu książki" lub "jak długie są wakacje trwające od... do..." (znakomita większość ludzi zagląda w takim przypadku do kalendarza lub, w jego braku, liczy na palcach).

Ponieważ działania chińczykowe są funkcjami jednoargumentowymi, jasno widać na nich związek "+b" i "-b" jako pary działań wzajemnie odwrotnych, co w zapisie strzałkowym przybiera szczególnie sugestywną formę $a \bullet \underset{-b}{\overset{+b}{\rightleftarrows}} \bullet a+b$ (niezależnie od wartości a). Równocześnie jednak ma to tę konsekwencję, że dla dodawania $a+b=c$ traktowanego chińczykowo istnieje tylko jedna operacja odwrotna: pozwalająca obliczyć a jako $c-b$. Z tej procedury nie można natomiast otrzymać realizacji b jako $c-a$ w postaci układu pionków. Liczba b (bez znaku) może być jedynie interpretowana jako odległość liczby a od liczby b mierzona liczbą kroków jednostkowych. Dla przedstawienia standardowego liczb jednocyfrowych jest to dokładny odpowiednik odległości tych liczb na osi liczbowej.

2.2. Wykonywanie działań przez dostawianie (zabieranie) pionków a aspekt mnogościowy liczby

O ile liczydło z działaniami chińczykowymi jest czymś w rodzaju licznika, którego stan może się zmieniać tylko poprzez pojedyncze kroki o 1 do przodu lub do tyłu (cofanie licznika), o tyle liczydło z dodawaniem przez dostawianie i odejmowaniem przez zabieranie pionków stanowi już system bardziej złożony. Przede wszystkim zmienia się całkowicie interpretacja działań.

Przy dodawaniu $a+b$ metodą dostawiania oba składniki są reprezentowane przez układy pionków i ich rola jest całkowicie symetryczna. Oczywista jest zatem przemienność takiego dodawania. Co więcej, po ustawieniu składników sumy $a+b+c$ za pomocą pionków na planszy nie ma możliwości stwierdzenia, w jakiej kolejności były one ustawiane, równie oczywista jest więc łączność. Dodawanie jest tutaj funkcją dwuargumentową, która działa podobnie jak operacja "plus" w półgrupie addytywnej, przyporządkowując parze (a,b) element $a+b$ zwany ich sumą. W praktyce "pionkowej" przyporządkowanie to polega na tym, że po ustawieniu na planszy kolejno dwóch układów przedstawiających składniki, traktujemy wszystkie pionki łącznie, jako jeden układ, którego wartość jest oczywiście sumą wartości poprzednich dwóch układów. Dodawanie wykonuje się więc "samo" z chwilą przedstawienia składników. Ewentualne dalsze manipulacje mają na celu tylko sprowadzenie sumy do wygodniejszej postaci, np. do przedstawienia standardowego.

Naturalnym odwróceniem dodawania przez dostawianie jest odejmowanie metodą zdejmowania pionków. Jeżeli odjemna jest przedstawiona w postaci układu pionków zawierającego podukład reprezentujący odjemnik, można tę operację wykonać od razu. Jeżeli nie, trzeba najpierw - poprzez manipulacje nie zmieniające zawartości liczydła - przejść do układu równoważnego o odpowiedniej postaci. Te czynności przygotowawcze poprzedzające wykonanie odejmowania stanowią odwrócenie czynności porządkowania po wykonaniu dodawania.

Ponieważ rola składników przy dodawaniu $a+b=c$ przez dostawianie jest symetryczna, można otrzymać oba odwrócenia

tego działania, tzn. obliczyć przez zdejmowanie zarówno $a = c - b$, jak i $b = c - a$. Jednakże odejmowanie przez zdejmowanie - choć jest odwrotne do dodawania dwuargumentowego - ma wyraźne cechy działania jednoargumentowego. Chcąc odjąć liczbę b od dowolnego układu (o odpowiednio dużej wartości), zawsze postępujemy w ten sam sposób: wyodrębniamy podukład o wartości b i zabieramy go. Reszta pionków układu wyjściowego właściwie nas nie obchodzi. Taki sposób postępowania jest bliższy interpretowaniu odejmowania jako działania jednoargumentowego (tj. uważaniu odjemnej c za argument działania "-b") niż traktowaniu pary (c,b) jako pary argumentów algebraicznego dwuargumentowego działania "minus".

Działania chińczykowe nawiązywały do porządkowego aspektu liczby naturalnej. Omawiana obecnie metoda dodawania przez dostawianie i odejmowania przez zabieranie pionków wykazuje związki z innymi jej aspektami. Łatwo dostrzec powiązania mnogościowe: dodawanie odpowiada łączeniu (dodawaniu) zbiorów rozłącznych, a odejmowanie - zabieraniu (odejmowaniu) podzbioru. Interpretacja ta byłaby szczególnie jasno widoczna, gdybyśmy wszystkie liczby, na których wykonujemy działania, przedstawiali na liczydle w postaci kardynalnej. Wówczas mielibyśmy do czynienia z dosłownym łączeniem zbiorów pionków lub odejmowaniem odpowiednich ich podzbiorów.

2.3. Inne aspekty liczby w działaniach na liczydle

Jak widać, operacje na liczydle - w zależności od sposobu ich wykonywania - mogą mieć charakter działań na liczbach kardynalnych lub porządkowych. Pokażę za chwilę, że również inne znane aspekty pojęcia liczby naturalnej mają swoje interpretacje na liczydle.

W przypadku przedstawiania liczb w postaci różnej od kardynalnej, mnogościowa interpretacja działań ustępuje miejsca interpretacji traktującej liczbę jako umowną wartość. Przypomina to nieco obliczenia pieniężne: znając sposób przypisywania wartości poszczególnym pionkom w zależności od pola, na jakim się je umieszcza, interpretujemy dostawienie pionka jako dodanie odpowiedniej liczby, a usunięcie pionka - jako jej odjęcie.

Dodawanie przez dostawianie pionków traktowaliśmy jako działanie na liczbach naturalnych. Można je też traktować jako operację na stanach liczydła (tj. na ciągach liczb). Mając stan (a_i) oraz stan (b_i) możemy mówić o stanie $(a_i + b_i)$ otrzymanym przez dodawanie "po współrzędnych", tj. na poszczególnych polach. W tym przypadku uwypukla się kodowy aspekt liczby traktowanej jako formalny ciąg symboli.

Podobnie można mówić o odejmowaniu stanów, które jednak nie zawsze jest wykonalne, nawet gdy wartość układu przedstawiającego odjemną jest większa od wartości układu odjemnika; ten pierwszy trzeba na ogół przekształcić w układ równoważny zawierający odpowiedni podukład. To przekształcenie stanu liczydła wynika bezpośrednio z porównania wyrazów takich formalnych ciągów i nie ma bezpośrednio nic wspólnego z zapisem cyfrowym liczby w systemie dziesiątkowym.

2.4. Odejmowanie przez dostawianie przeciwnego składnika a propedeutyka liczb ujemnych

Najbardziej interesujące z punktu widzenia algebraicznych własności jest odejmowanie wykonywane metodą dostawiania przeciwnego składnika. Daje ono wczesną i niezmiernie łatwo przez dzieci akceptowaną formę propedeutycznego wprowadzenia liczb ujemnych.

Traktowanie pionków odjemnej i odjemnika (ustawionych np. w dwóch kontrastujących kolorach) jako wzajemnie się "zbijających" czy "kompensujących" jest przez dzieci przyjmowane jako całkowicie naturalne, choć faktycznie wykracza poza arytmetykę liczb naturalnych.

Jeżeli chcemy wprowadzić działania na liczbach ujemnych, to mając na liczydle pionki w dwóch kolorach można w gruncie rzeczy nie deklarować, które z nich są dodatnie, a które ujemne, ważne tylko, że są sobie przeciwne, że - jak mówią dzieci - "nie lubią się wzajemnie". Owo "nielubienie" ma takie objawy, że w parze pionków o różnych kolorach nie zbliżają się one do siebie: wolno je przesuwać tylko oba na raz w tym samym kierunku i z zachowaniem odległości (stała odległość to stała różnica); a jeśli przypadkiem dwa pionki różnych kolorów znajdą się na wspólnym

polu, to "zbijają się" i oba usuwa się z placu boju. Operacje te poznają dzieci jeszcze przy okazji działań na liczbach naturalnych.

Odejmowanie metodą dostawiania liczby przeciwnej jest właściwie dodawaniem w zbiorze liczb całkowitych. Zamiast arytmetycznej różnicy $a - b$ mamy algebraiczną sumę $a + (-b)$ w pierścieniu Z. W przeciwieństwie do odejmowania arytmetycznego metodą chińczykową lub przez zabieranie pionków, które było wykonalne tylko przy odpowiednio dużej zawartości liczydła, odejmowanie algebraiczne jest zawsze wykonalne - nic nie stoi na przeszkodzie nawet temu, by w wyniku odejmowania pozostały na planszy wyłącznie pionki "ujemne".

Traktując takie odejmowanie - podobnie jak dodawanie dwuargumentowe - jako operację na stanach liczydła (oczywiście przy zmodyfikowanej definicji stanu) postępujemy jak przy działaniach na wektorach, czy też formalnych wielomianach nad Z. "Zbijanie się" pionków różnych znaków jest wtedy odpowiednikiem redukcji wyrazów podobnych wielomianu.

2.5. Interpretacje mnożenia i dzielenia na liczydle

Jeżeli chodzi o mnożenie na liczydle, to przy obu opisanych metodach działanie "$\cdot n$" (tzn. "pomnożyć przez "n") jest traktowane operatorowo, podobnie jak chińczykowe działania "$+n$" lub "$-n$". Tak więc, chcąc pomnożyć liczbę m (przedstawioną układem pionków na liczydle) przez liczbę n, stosujemy funkcję "$\cdot n$" do argumentu m, przekształcając dany układ pionków w układ reprezentujący odpowiedni iloczyn. Przy tym, zarówno postać tego nowego układu, jak i jego interpretacja liczbowa zależą od wyboru metody postępowania: mnożąc liczbę m przez np. 2 metodą rozmnażania pionków, otrzymujemy podwojoną liczbę m (co odpowiada mnożeniu przez 2 z lewej strony: $2 \cdot m$), stosując zaś skakanie poprzez pole 1 otrzymujemy m dwójek (co odpowiada mnożeniu przez 2 z prawej strony: $m \cdot 2$).

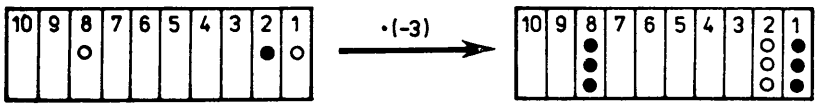
Jak już wspomniałam, rozmnażanie pionków jest to wielokrotne dodawanie tego samego składnika. Natomiast mnożenie za pomocą skakania poprzez pole 1 polega na "rewaluacji" wartości każdego pionka danego układu (a więc i całego układu łącznie).

Na przykład, przy mnożeniu tą metodą przez 7 pionek stojący na polu 5, czyli mający z definicji wartość pięciu ustalonych jednostek (tzn. pięciu pionków na polu 1), zyskuje wartość pięciu nowych, siedmiokrotnie większych jednostek i zostaje zastąpiony przez 5 pionków na polu 7.

Formalnie biorąc, w przypadku jednej tabliczki wartość danego układu pionków można interpretować jako iloczyn skalarny $\Sigma_{i=1}^{10} a_i \cdot i$ wektora stanu liczydła $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ przez wektor wartości pól $(1,2,\ldots,10)$. Wówczas na mnożenie liczby $\Sigma_{i=1}^{10} a_i \cdot i$ (przedstawionej tym układem pionków) przez liczbę naturalną n można patrzeć trojako:

$$(1) \qquad n \cdot \sum_{i=1}^{10} a_i i = \sum_{i=1}^{10} (n a_i) \cdot i \ .$$

Odpowiada to mnożeniu wektora stanu przez skalar n i daje metodę rozmnażania pionków. Jeżeli dopuszczamy stany określone przez układy pionków w dwóch kolorach ("dodatnie" i "ujemne"), to możemy też zdefiniować mnożenie przez liczbę ujemną jako rozmnażanie pionków z zamianą koloru (por. rysunek 6 poniżej).



Rys. 6

Zbiór stanów z dodawaniem po współrzędnych i z tak określonym mnożeniem przez liczbę całkowitą tworzy moduł nad pierścieniem Z. W przypadku liczydła bez "ujemnych" stanów i z mnożeniem tylko przez liczbę naturalną nie uzyskujemy pełnej struktury modułu (byłoby to coś w rodzaju półmodułu nad półpierścieniem):

$$(2) \qquad n \cdot \sum_{i=1}^{10} a_i i = \sum_{i=1}^{10} a_i (ni).$$

To oznaczałoby "przeskalowanie" tabliczki liczydła, czyli n-krotne powiększenie wartości pól. Metoda ta w zasadzie nie ma praktycznego zastosowania w przypadku liczydeł typu Whitneya, na

których wartości pól są z góry ustalone. Wyjątek stanowi mnożenie przez 10 (100, 1000 itd.), które można wykonywać za pomocą dołożenia z prawej strony nowej tabliczki (dwu tabliczek, trzech tabliczek itd.) jako tabliczki jedności (odpowiednio jako tabliczek jedności i dziesiątek lub jedności, dziesiątek i setek itd.), co automatycznie powoduje dziesięciokrotne (100-krotne, 1000-krotne itd.) zwiększenie faktycznej wartości każdego pola poprzez zmianę współczynnika rzędu.

Stosowanie tej metody dla mnożenia przez dowolną liczbę naturalną n byłoby teoretycznie możliwe na liczydle o nieskończonej planszy zawierającej pola o wartościach: $1,2,\ldots,10,\ldots$ Mnożenie liczby $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i i$ przez liczbę n mogłoby wówczas polegać na przekształceniu stanu $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ w stan $(b_j)_{j=1}^{\infty}$, gdzie

$$b_j = \begin{cases} a_i & \text{dla } j = ni, \\ 0 & \text{dla } j \neq ni, \quad i = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Odpowiada to wydłużeniu jednostki na osi liczbowej. Na planszy oznaczałoby to przeniesienie każdego pionka danego układu na pole o wartości n razy większej:

$$(3) \qquad n \cdot \sum_{i=1}^{10} a_i i = \left(\sum_{i=1}^{10} a_i i\right) \cdot n \qquad (\text{dla } n \leq 10).$$

To z kolei oznacza przekształcenie liczby $\Sigma_{i=1}^{10} a_i i$ rozumianej jako $\Sigma_{i=1}^{10} a_i i$ <u>jedności</u> w liczbę $(\Sigma_{i=1}^{10} a_i i) \cdot n$, czyli $\Sigma_{i=1}^{10} a_i i$ "<u>n-tek</u>". Na liczydle wszystkie pionki gromadzą się na polu o wartości n. Widać tu wyraźną analogię do rozliczeń pieniężnych: kwotę $n \cdot \Sigma_{i=1}^{10} a_i i$ złotych można wypłacić w postaci $\Sigma_{i=1}^{10} a_i i$ monet n-złotowych.

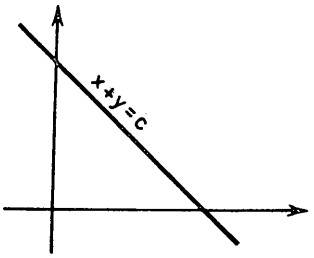
Odwrócenie procedury opisanej w (1), tj. rozmnażania pionków, prowadzi do <u>dzielenia rozumianego jako równy podział</u>, natomiast odwrócenie procedury (3) - do <u>dzielenia jako mieszczenia</u>. Dzielenie za pomocą wielokrotnego odejmowania chińczykowe-

go również odpowiada mieszczeniu - rozumuje się tu podobnie jak przy algorytmicznej metodzie dzielenia pisemnego.

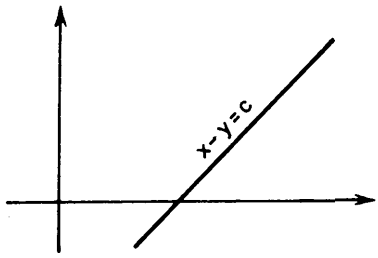
2.6. Interpretacje przekształceń równoważnościowych

Na osobne omówienie zasługują operacje przesuwania wykorzystywane do przekształcania układów pionków w układy równoważne.

Przesuwanie pary pionków jednakowego znaku w przeciwnych kierunkach stanowi odpowiednik tego, że w prostokątnym układzie współrzędnych równanie $x + y = \text{const}$ przedstawia prostą: przyrost zmiennej x jest kompensowany przez taki sam ubytek zmiennej y (rys. 7).



Rys. 7



Rys. 8

Znacznie ważniejszy z dydaktycznego punktu widzenia jest fakt, że przesuwanie pary pionków różnych znaków w tym samym kierunku wykorzystuje interpretację różnicy $b - a$ $(b \geq a)$ jako odległości na osi liczbowej i przygotowuje w ten sposób zarówno rozumienie pojęcia odległości na prostej, jak i pojęcia wektora. Przesunięcie wzdłuż osi zachowuje odległość, a po sprowadzeniu w ten sposób odjemnika do zera, możemy bezpośrednio odczytać wartość różnicy. Natomiast w układzie współrzędnych na płaszczyźnie równanie $x - y = \text{const}$ przedstawia prostą, na której przyrosty zmiennej x są równe przyrostom zmiennej y (rys. 8).

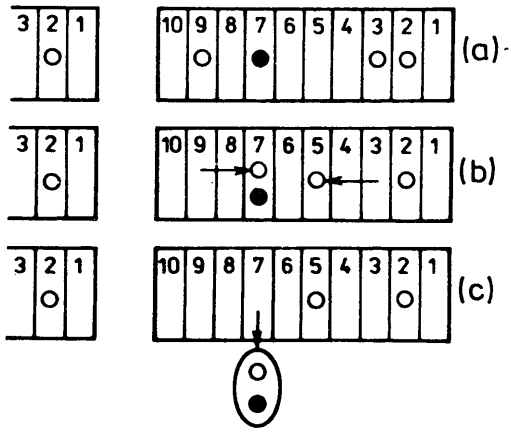
2.7. Modularność działań na liczydle

Jedną z najbardziej charakterystycznych cech obliczeń na liczydle jest ich "modularność" rozumiana jako możliwość rozbicia całego rachunku na małe, łatwe kawałki, w których biorą udział najwyżej dwa pionki na raz. Podczas takiej manipulacji cząstkowej można nie pamiętać o pozostałych pionkach na planszy, pełnią one jak gdyby rolę parametru, którego wartość jest nieistotna w danej części obliczenia (a czasami nawet w całym obliczeniu). Tym samym nie ma tu podstawowej trudności występującej przy cyfrowym zapisie przekształcenia formuły nawiasowej, tj. konieczności równoczesnego myślenia o wszystkich występujących liczbach i przepisywania członów, z którymi się nic nie robi.

Na przykład, mając dany układ pionków taki, jak na rysunku 9a i chcąc wyeliminować czarny pionek z pola 7 (tzn. odjąć liczbę 7), możemy wykonać następujące kroki:

(1) przesuwamy pionki z pól 9 i 3 "do siebie" tak jak na rysunku 9b, czyli zgodnie z równością:

$$9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5,$$



Rys. 9

(2) redukujemy parę pionków na polu 7, zgodnie z równością $7 - 7 = 0$ (rys. 9c).

Pełny zapis cyfrowy tych manipulacji (z uwzględnieniem pozostałych pionków) musiałby wyglądać następująco:

$$20 + 9 - 7 + 3 + 2 = 20 + 8 - 7 + 4 + 2 = 20 + 7 - 7 + 5 + 2 = 20 + 5 + 2.$$

Jak widać na rysunkach, pionki z pola 2 tabliczki dziesiątek i pola 2 tabliczki jedności w ogóle nie biorą udziału w manipulacjach i uczeń nie musi o nich myśleć. Natomiast w zapisie cyfrowym składniki 20 i 2 muszą być stale przepisywane, mimo iż nic się z nimi nie dzieje. Dla uproszczenia zapisu można by oznaczyć sumę $20 + 2$ symbolem t:

$$t + 9 - 7 + 3 = t + 8 - 7 + 4 = t + 7 - 7 + 5 = t + 5.$$

Obserwowanie takich prawidłowości może stanowić przygotowanie do rozumienia roli parametru jako dowolnej stałej w symbolicznym zapisie różnych związków i praw arytmetycznych oraz algebraicznych.

3. OPERACJE NA LICZYDLE DZIESIĄTKOWYM JAKO UGRUPOWANIE W SENSIE PIAGETA

W rozdziale tym przedstawię pewne propozycje zinterpretowania liczydła wraz z wybranymi operacjami jako ugrupowania w sensie Piageta. Wykorzystuję tu pewne idee H.G.Steinera (1973), który zaproponował zdefiniowanie ugrupowania w terminach zbioru częściowo uporządkowanego z dodatkowym działaniem półgrupowym i pokazał, że minikomputer Papy'ego można traktować jako takie ugrupowanie. Jednakże bardziej trafne niż Steinera wydaje się podejście E.Wittmanna (1973 a,b), który zamiast języka relacyjno-funkcyjnego proponuje dla zdefiniowania ugrupowania język teorii kategorii, co też poniżej zastosowałam.

Zaproponowane tutaj ujęcie obliczeń pewnego typu (przekształceń jednych stanów liczydła w inne) jako ugrupowania okazuje się adekwatne do opisu manipulacji pionkami wykonywanych przez dzieci, a przedstawienie tych czynności jako ciągu kolejno

składanych operacji elementarnych (co pozwala na ich jednoznaczne odtwarzanie przez inne osoby) może być traktowane jako zapis programu odpowiedniego obliczenia (por. rozdział 4).

3.1. Pojęcie ugrupowania

Pojęcie ugrupowania zostało wprowadzone przez J.Piageta (1947) dla opisania pewnego rodzaju systemów czynności (fizycznych lub umysłowych), charakterystycznych dla myślenia operacyjnego, którego umiejętność stopniowo zyskują dzieci poczynając od wieku około 6-7 lat, gdy wkraczają w fazę rozwoju zwaną stadium operacji konkretnych (w odróżnieniu od wcześniejszej fazy przedoperacyjnej i późniejszej - operacji formalnych).

Jest to faza rozwoju umysłowego (por. Piaget, 1947; Piaget, Inhelder, 1970) charakteryzująca się tym, że

1° dziecko jest już zdolne myśleć operacyjnie w sytuacjach konkretnych,

2° dziecko nie jest jeszcze zdolne do formalnych rozumowań hipotetyczno-dedukcyjnych, np. nie rozumie implikacji formalnej i nie potrafi wyciągać wniosków tylko na podstawie danych przesłanek (jeśli nie może odwołać się do konkretnych czynności).

Operacjami konkretnymi nazywa Piaget operacje umysłowe stanowiące zinterioryzowany odpowiednik konkretnych czynności wraz z ich odwróceniami (np. wyobrażenie sobie rozgniatania i ponownego formowania kulki z plasteliny), przy czym uważa on, że dziecko myśli operacyjnie wówczas, gdy potrafi ono odwracać i składać w myśli takie operacje (por. Szemińska, 1981; Aebli, 1959).

Z matematycznego punktu widzenia, wśród operacji konkretnych w sensie Piageta najważniejsze są operacje typu funkcyjnego, odpowiadające działaniom takim, jak np. "dodać 3", oraz operacje typu relacyjnego, odpowiadające związkom takim, jak np. "$2 < 7$".

W zetknięciu się z sytuacją problemową nowego typu (np. zagadnieniem klasyfikacji przedmiotów) dziecko początkowo potrafi wykonywać tylko bardzo proste czynności, a następnie łączy je z sobą tworząc coraz dłuższe ciągi (w których mogą też - w razie potrzeby - występować odwrócenia czynności poprzednio wykonanych).

W ten sposób stopniowo powstaje w umyśle dziecka cała struktura operacji składających się (zarówno w sensie potocznym, jak i funkcyjnym) z pewnych podstawowych "cegiełek", zwana ugrupowaniem.

Wyodrębniając w każdym ugrupowaniu zbiór operacji zwanych elementarnymi, Piaget podkreśla, że z punktu widzenia tworzenia się struktur umysłowych nie jest ważne, by był to zbiór minimalny, tj. najmniejszy generujący wszystkie operacje ugrupowania, natomiast musi on zawierać te operacje, które dla dziecka są podstawowe, elementarne w naturalnym sensie (dziecko nie czuje potrzeby dalszego ich rozkładania).

Sam Piaget, obok niezbyt precyzyjnych definicji słownych (Oléron, Piaget, 1967), proponuje (Piaget, 1947) następującą aksjomatykę ugrupowania rozumianego jako system operacji stosowanych do pewnych jednorodnych obiektów - cytuję za Steinerem (1973):

1. $x + y = z;$
2. $z - y = x, \quad z - x = y;$
3. $(x + y) + z = x + (y + z);$
4. $x - x = 0;$
5. $x + x = x,$

gdzie: x, y, z są operacjami, 0 oznacza identyczność, + oznacza działanie składania, -x, -y są operacjami odwrotnymi odpowiednio do x, y, a znak - pomiędzy operacjami należy interpretować jako złożenie z operacją odwrotną.

Aksjomat 1 zapewnia istnienie złożenia operacji, aksjomat 2 - ich odwracalność, aksjomat 3 żąda łączności działania składania, aksjomat 4 mówi, że złożenie operacji z operacją odwrotną daje identyczność, a aksjomat 5, że złożenie operacji ze sobą jest równoznaczne z jej pojedynczym wykonaniem.

Tę definicję Steiner słusznie nazywa złą matematyzacją dobrej skądinąd idei, aksjomaty 1-4 wyznaczają bowiem grupę abelową, aksjomat 5 zaś redukuje ją do trywialnej grupy jednoelementowej.

Analizując podawane przez Piageta przykłady ugrupowań, Steiner proponuje przyjęcie następującej definicji:

Ugrupowaniem nazywa się parę (S, R), gdzie S jest zbiorem niepustym, a $R \subset S \times S$ ma tę własność, że generowana przez nią relacja zwrotna i przechodnia wprowadza na S strukturę kraty.

Na zbiorze R, zwanym zbiorem operacji elementarnych, określa się działanie (częściowe) składania $\circ$. Dwie operacje można złożyć, jeżeli następnik pierwszej jest poprzednikiem drugiej.

Z tej definicji wynikają następujące własności odpowiadające aksjomatom Piageta $(a, b, c, d \in S)$:

(1) $(a,b) \circ (b,c) = (a,c)$;

(2) $[(a,b) \circ (b,c)] \circ (c,b) = (a,b)$;

(3) $[(a,b) \circ (b,c)] \circ (c,d) = (a,b) \circ [(b,c) \circ (c,d)]$;

(4) $(a,b) \circ (b,a) = (a,a)$;

(5) $\sup(a,a) = a$.

Znak równości w (1)-(4) należy rozumieć w taki sposób, że jeśli obie strony są określone, to zachodzi równość.

Steiner pokazuje dalej, że dla dowolnej liczby co najwyżej dwucyfrowej n da się tak określić zbiór R_n operacji elementarnych na minikomputerze Papy'ego o dwu tabliczkach, by wraz ze zbiorem S_n wszystkich możliwych przedstawień liczby n stanowił ugrupowanie w sensie powyższej definicji.

3.2. Kategoryjne ujęcie ugrupowania

Modyfikując nieco definicję Wittmanna (1973b), ugrupowaniem będziemy nazywać każdą piątkę $(S, T, W, \circ, i)$, gdzie:

- S jest zbiorem niepustym, którego elementy są zwane stanami,
- T jest zbiorem, którego elementy są zwane operacjami,

- o jest działaniem częściowym na T zwanym złożeniem operacji,
- i jest przyporządkowaniem, które każdemu stanowi $s \in S$ przyporządkowuje operację $i_s \in T$, zwaną operacją tożsamościową lub identycznością na s,
- $W \subset T$ jest podzbiorem, którego elementy są zwane operacjami elementarnymi.

Zakładamy przy tym, że (S, T, o, i) jest kategorią, tzn. spełnione są następujące aksjomaty:

(a) Jeżeli i_s jest operacją tożsamościową, $\alpha, \beta \in T$ i złożenie $\alpha \circ i_s$ jest określone, to $\alpha \circ i_s = \alpha$; jeżeli złożenie $i_s \circ \beta$ jest określone, to $i_s \circ \beta = \beta$.

(b) Dla każdej operacji $\alpha \in T$ istnieją jednoznacznie wyznaczone stany s i s' zwane odpowiednio jej dziedziną i kodziedziną, takie że złożenia $\alpha \circ i_s$ oraz $i_{s'} \circ \alpha$ są określone. Zapisujemy wówczas $\alpha : s \longrightarrow s'$ i nazywamy α operacją z s w s'.

(c) Dla $\alpha, \beta \in T$ złożenie $\beta \circ \alpha$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dziedzina operacji β jest kodziedziną operacji α, tzn. np. $\alpha : s_0 \longrightarrow s_1$ i $\beta : s_1 \longrightarrow s_2$.

(d) Działanie złożenia jest łączne w tym sensie, że jeżeli $s_0, s_1, s_2, s_3 \in S$, a $\alpha, \beta, \gamma \in T$ są takimi operacjami, że $\alpha : s_0 \longrightarrow s_1$, $\beta : s_1 \longrightarrow s_2$, $\gamma : s_2 \longrightarrow s_3$, to $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ (złożenia te istnieją na mocy warunku (c)).

Aksjomaty powyższe zapewniają nam to, że (S, T, o, i) jest kategorią małą, gdyż S i T są zbiorami (porównaj Semadeni, Wiweger, 1978). Zakładamy dalej, że kategoria ta jest grupoidem, tzn. spełniony jest dodatkowy aksjomat:

(e) Każda operacja $\alpha \in T$ jest odwracalna, tzn. jeżeli $\alpha : s \longrightarrow s'$, to istnieje $\beta : s' \longrightarrow s$ takie, że

$\beta \circ \alpha = i_s$ oraz $\alpha \circ \beta = i_{s'}$. Operację β, która jest przez te warunki wyznaczona jednoznacznie, nazywamy operacją odwrotną do operacji α i oznaczamy symbolem α^{-1}.

W szczególności, dla każdej operacji elementarnej ze zbioru W istnieje operacja odwrotna. Oznaczmy zbiór tych wszystkich operacji odwrotnych przez W^{-1}. Ostatnie z założeń mówi, że $W \cup W^{-1}$ generuje T, tzn. spełniony jest warunek:

(f) Każdą operację $\alpha \in T$ da się przedstawić jako złożenie skończonej liczby operacji elementarnych i ich odwrotności.

Poszczególne aksjomaty tej definicji ugrupowania oddają jasno własności, które Piaget intuicyjnie określił jako:

- składalność operacji,
- łączność składania,
- odwracalność wszystkich operacji,
- wyróżnienie operacji tożsamościowych,
- możliwość rozłożenia każdej operacji na operacje elementarne i ich odwrotności.

3.3. Najważniejsze ugrupowania opisujące operacje na liczydle

Poniżej przedstawię kilka możliwości określenia ugrupowania dla liczydła dziesiątkowego.

Rozpatrujemy liczydło o ustalonej liczbie tabliczek. Oznaczmy przez S zbiór stanów liczydła. Ogólnie biorąc, wyróżnimy trzy rodzaje operacji:

1. operacje zewnętrzne,
2. operacje wewnątrztabliczkowe,
3. operacje międzytabliczkowe.

Do operacji zewnętrznych zaliczamy:

typ A - operacje stawiania pionka na planszy, np. stawianie pionka na polu 5 tabliczki dziesiątek;

typ A^{-1} - operacje zdejmowania pionka z planszy.

Operacje typu A^{-1} są odwrotne do operacji typu A w tym sensie, że jeżeli do dowolnego stanu s liczydła zastosujemy operację stawiania pionka na i-tym polu j-tej tabliczki, a następnie operację zdejmowania pionka z i-tego pola j-tej tabliczki, to otrzymamy identyczność na s. Operacje typu A są określone dla każdego stanu liczydła, natomiast operacje typu A^{-1} tylko dla tych stanów, w których odpowiednie pola nie są puste.

Do operacji międzytabliczkowych zaliczamy:

typ B - operacje przenoszenia pionka z pola 10 pewnej tabliczki na pole 1 następnej tabliczki, np. przenoszenie z pola 10 tabliczki jedności na pole 1 tabliczki dziesiątek;

typ B^{-1} - operacje odwrotne do operacji typu B, tzn. przenoszenia pionka na poprzednią tabliczkę.

Operacje powyższe odpowiadają zamianie dziesięciu danych jednostek na jedną jednostkę następnego rzędu i zamianie odwrotnej.

Liczniejszy jest zbiór operacji wewnątrztabliczkowych: charakteryzujących się tym, że ich wykonanie wpływa na stan tylko jednej tabliczki (określamy te operacje dla każdej tabliczki w taki sam sposób). Należą tutaj:

typ C - operacje przesuwania pionka o 1 pole w lewo, np. przesuwanie pionka z pola 5 na pole 6 (na określonej tabliczce);

typ C^{-1} - odwrotne do nich operacje przesuwania pionka o 1 pole w prawo;

typ D - operacje odsuwania, stosowane do pary pionków, polegające na przesunięciu każdego z tych pionków o jedno pole tak, by oddaliły się od siebie; np. odsuwanie od siebie pionków z pól 5 i 3 (na określonej tabliczce) oznacza przesunięcie jednego pionka z 5 na 6, a drugiego z 3 na 2;

typ D^{-1} - odwrotne do typu D operacje dosuwania polegające na odpowiednim zbliżaniu dwóch pionków do siebie.

Aby być w zgodzie z aksjomatyką kategorii, musimy przyjąć, że np. stawianie pionka na i-tym polu j-tej tabliczki (i, j ustalone) nie jest jedną operacją, lecz całą rodziną operacji zależnych od stanu, na który działają. Pojedyncza operacja jest zatem określona nie tylko przez podanie jej typu, numeru tabliczki i numerów pól, na których należy ją wykonać, lecz również przez stan liczydła przed i po wykonaniu operacji. Formalnie biorąc, operacja $\alpha : s_1 \longrightarrow s_2$, to trójka (α, s_1, s_2), dopiero wówczas bowiem mamy zapewnioną jednoznaczność dziedziny i kodziedziny. Z tego punktu widzenia np. przesunięcie pionka z pola 1 na pole 2 tabliczki jedności jest inną operacją przy stanie tabliczki $s = (a_i)_{i=1,\ldots,10}$, gdzie $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{10} = 0$, a inną przy stanie $s' = (b_i)_{i=1,\ldots,10}$, gdzie $b_1 = b_2 = \ldots = b_{10} = 1$. Jest to jednak rozróżnienie czysto formalne. Ponieważ w praktyce zawsze wiadomo do jakiego stanu stosuje się daną operację, używanie określenia np. "operacja przesunięcia pionka z pola 1 na pole 2" (ustalonej tabliczki) nie prowadzi do nieporozumień.

Biorąc pod uwagę powyższe operacje można zdefiniować wiele ugrupowań. Oto kilka przykładów:

Przykład I. Za zbiór S stanów ugrupowania przyjmujemy zbiór S wszystkich stanów liczydła.

Do zbioru W operacji elementarnych zaliczymy wszystkie operacje typu A.

Zatem operacją elementarną jest stawianie pojedynczego pionka na określonym polu. Za pomocą składania tych operacji i operacji do nich odwrotnych można uzyskać dowolne przedstawienie dowolnej liczby naturalnej na liczydle.

Teoretycznie biorąc, można składać dowolnie wiele operacji elementarnych (tzn. dopuszczać dowolnie wiele pionków na każdym polu, jedyne ograniczenie stanowi wówczas liczba tabliczek); w praktyce chodzi o złożenie kilku lub kilkunastu operacji.

Przykład II. S - jak w przykładzie I, W - operacje typów A, B i C. Jest to ugrupowanie opisujące dodawanie i odejmowanie "chińczykowe", które wykonuje się ustawiając za pomocą pionków pierwszy składnik lub odjemną i przesuwając te pionki

w lewo lub w prawo z ewentualnym przenoszeniem pomiędzy rzędami.

Przykład III. S - jak wyżej, W - operacje typów B i C.

To ugrupowanie również opisuje działania "chińczykowe", jednakże tutaj wszystkie liczby są traktowane operatorowo (por. Turnau, 1975). Na przykład, aby wykonać dodawanie 5+3 wykonujemy, startując od zera, najpierw 5 kroków w lewo, a potem jeszcze 3. Dla wykonania 5 - 3 robimy 5 kroków w lewo, a potem 3 w prawo.

Przykład IV. S - jak wyżej, W - operacje typów: A, B, D.

W tym ugrupowaniu daje się opisać wszystkie operacje występujące podczas dodawania liczb metodą dostawiania pionków i odejmowania metodą zdejmowania pionków.

Przykład V. Dla liczby naturalnej n oznaczamy przez S_n zbiór wszystkich przedstawień liczby n na liczydle (za pomocą pionków jednego koloru).

Przyjmując: $S = S_n$, W - operacje typów B i D, otrzymujemy dla każdej liczby n ugrupowanie opisujące przejścia pomiędzy stanami równoważnymi o wartości n.

Oznaczmy teraz przez Z zbiór stanów liczydła wyznaczonych przez wszystkie układy pionków w dwóch kolorach (np. białe - "dodatnie", czarne - "ujemne").

Poprzednio zdefiniowane operacje są nadal wykonalne, ale tylko dla pionków każdego koloru oddzielnie. Mamy więc teraz następujące typy operacji (kolor kółeczka u góry mówi, do jakiego koloru pionków odnoszą się operacje, np. $\mathring{A}$ - typ A dla pionków białych, $\mathring{A}$ - typ A dla pionków czarnych):

$$\mathring{A},\ \mathring{A}^{-1},\quad \mathring{A},\ \mathring{A}^{-1},\quad \mathring{B},\ \mathring{B}^{-1},\quad \mathring{B},\ \mathring{B}^{-1},$$
$$\mathring{C},\ \mathring{C}^{-1},\quad \mathring{C},\ \mathring{C}^{-1},\quad \mathring{D},\ \mathring{D}^{-1},\quad \mathring{D},\ \mathring{D}^{-1}.$$

Zdefiniujemy ponadto dalsze typy operacji:

typ E - operacje "zbijania", tj. zdejmowania z tabliczki pary pionków o różnych kolorach, stojących na tym samym polu,

typ E^{-1} - operacje dostawiania takiej pary,

typ $\vec{F}$ - operacje przesuwania w prawo (o jedno pole) pary pionków o różnych kolorach, tzn. każdy z tych pionków przesuwa się o jedno pole w prawo,

typ F^{-1} - przesuwanie takiej pary pionków w lewo (o jedno pole).

Pozwala to nam podać dalsze przykłady ugrupowań:

Przykład VI. Za zbiór stanów S przyjmujemy zbiór Z, W - operacje typów: Å, Ǻ, B̊, B̥, D̊, D̥, E, F.

Jest to ugrupowanie opisujące odejmowanie za pomocą dostawiania liczby przeciwnej, przy którym dopuszcza się zarówno "zbijanie" pionków, jak i ich eliminowanie przez przesuwanie w kierunku zera. W praktyce dzieci na ogół stosują jedno i drugie, zależnie od tego, jak jest w danym momencie wygodniej. Jednakże, jak to pokazano w 1.3, można przyjąć, że dozwolone jest tylko zbijanie (bez przesuwania "mieszanych" par w kierunku zera), albo tylko przesuwanie (bez zbijania). Daje to nam dwa dalsze ugrupowania:

Przykład VII. S - jak w przykładzie VI, W - jak w przykładzie VI bez operacji typu F.

Przykład VIII. S - jak w przykładzie VI, W - jak w przykładzie VI bez operacji typu E.

Przykład IX. Dla każdej liczby całkowitej c oznaczmy przez Z_c zbiór wszystkich przedstawień tej liczby na liczydle za pomocą pionków w dwóch kolorach. Przyjmując: $S = Z_c$ oraz W - operacje typów B̊, B̥, D̊, D̥, E, F, otrzymujemy dla każdej liczby c ugrupowanie opisujące przejścia pomiędzy stanami równoważnymi o wartości c.

4. LICZYDŁO DZIESIĄTKOWE JAKO "MASZYNA MATEMATYCZNA"

Dość powszechnie panuje opinia, że różnego rodzaju liczydła planszowe są dla uczniów prymitywną, zabawkową wersją komputerów. Pogląd ten znajduje odbicie chociażby w tym, że liczydła takie często nazywa się minikomputerami. Używa się tej nazwy zarówno w szkole, jak i w opracowniach teoretycznych z zakresu dydaktyki matematyki (por. Papy, 1968; Whitney, 1970; Cwirko-Godycki, 1980). Nasuwa się więc pytanie, do jakiego stopnia jest to uzasadnione.

Poniżej pokażę, że formalnie biorąc, można zinterpretować liczydło planszowe jako abstrakcyjną maszynę matematyczną (wykorzystuję w tym celu uproszczoną definicję maszyny używaną przez Pawlaka (1971)). Oczywiście, jest to zgodność matematyczna i na jej podstawie trudno rozstrzygnąć, czy liczydła w jakiejś mierze przyczyniają się do zrozumienia tego, czym komputer jest w rzeczywistości[1]. Zbadanie tego ostatniego zagadnienia wykracza poza ramy niniejszej pracy.

W poniższych rozważaniach przyjęłam dla liczydła "pamięć" i "zbiór instrukcji" takie, by w tym systemie można było wykonywać obliczenia wszystkimi opisanymi w paragrafie 1.3 metodami. Naturalnie, można by przyjąć inny "zbiór stanów" (np. tylko jednokolorowe układy pionków) i mniej liczny zbiór "instrukcji"; otrzymalibyśmy wtedy inną "maszynę", na której dałoby się wykonywać tylko niektóre typy obliczeń.

---

[1] Warto wspomnieć o pracy E.Cohorsa-Fresenborga (1976), której celem było kształtowanie u dzieci pojęcia automatu abstrakcyjnego za pomocą odpowiednio dobranego zestawu mechanicznych "modułów".

4.1. Określenie pamięci liczydła. Pojęcie obliczenia

Za Pawlakiem (1971) przyjmuję, że aby zdefiniować maszynę, wystarczy określić jej pamięć oraz zbiór instrukcji. Poniżej definiuję "pamięć" liczydła, zaś "zbiór instrukcji" podam w 4.2.

Rozważamy liczydło o ustalonej liczbie tabliczek.

Pamięcią (zbiorem stanów) liczydła nazwiemy zbiór S stanów wyznaczonych przez wszystkie układy pionków w dwóch kolorach (np. białych i czarnych, które mogą być interpretowane jako "dodatnie" i "ujemne"). Stanem pola liczydła nazwiemy parę liczb określających, ile jest na tym polu pionków każdego koloru. Para liczb, z których pierwsza określa numer tabliczki (rząd w systemie dziesiątkowym), a druga numer pola na tej tabliczce, może być traktowana jako adres w pamięci liczydła. Podobnie jak w rozdziale 1, obszar na zewnątrz tabliczek traktujemy jako wspólne pole zerowe dla wszystkich rzędów.

Przejście z jednego stanu do drugiego dokonuje się poprzez operacje, które maszyna "potrafi" wykonać. Przyjmijmy, że na liczydle wykonalne są następujące operacje:

0 - operacja tożsamościowa;
1 - operacja stawiania pionka białego;
$\bar{1}$ - operacja stawiania pionka czarnego;
2 [$\bar{2}$] - operacja zdejmowania pionka białego [czarnego];
3 [$\bar{3}$] - operacja przesuwania pionka białego [czarnego] na sąsiednie pole w lewo;
4 [$\bar{4}$] - operacja przesuwania pionka białego [czarnego] na sąsiednie pole w prawo;
5 [$\bar{5}$] - operacja pojedynczego odsuwania od siebie dwóch pionków białych [czarnych] czyli przesuwania jednego w lewo, a drugiego w prawo (każdego na sąsiednie pole) tak, by były dalej od siebie;
6 [$\bar{6}$] - operacja pojedynczego dosuwania do siebie dwóch pionków białych [czarnych], czyli przesuwanie jednego w lewo, a drugiego w prawo (każdego na sąsiednie pole) tak, by były bliżej siebie;
7 [$\bar{7}$] - operacja przenoszenia pionka białego [czarnego] z pola 10 którejś z tabliczek na pole 1 następnej tabliczki;

8 [$\bar{8}$] - operacja przenoszenia pionka białego [czarnego] z pola 1 którejś z tabliczek na pole 10 poprzedniej tabliczki;

9 - operacja "zbijania" czyli zdejmowania pary pionków różnych kolorów stojących na tym samym polu;

10 - operacja przesuwania pary pionków różnych kolorów o jedno pole w prawo (każdego z nich na sąsiednie pole);

11 - operacja przesuwania pary pionków różnych kolorów o jedno pole w lewo.

Łącznie wyróżnionych jest tu 20 operacji (numerowanych od -8 do 11).

Dla każdego stanu $s \in S$ można zdefiniować otoczenie stanu s jako zbiór wszystkich stanów, do których maszyna może przejść przez jednokrotne wykonanie którejkolwiek operacji. Jest to więc zbiór potencjalnych stanów "następnych" dla stanu s.

Obliczeniem w pamięci S nazwiemy każdy skończony ciąg stanów tej pamięci: $s_0, s_1, \ldots, s_n$ taki, że stan s_i należy do otoczenia stanu s_{i-1} (dla $i = 1, \ldots, n$). W szczególności, każde obliczenie arytmetyczne na liczydle, np. dodawanie 5 + 8 (wykonywane metodą chińczykową lub przez dostawienie pionków), jest obliczeniem w sensie wyżej podanej definicji.

4.2. "Instrukcje" i "programy"

Instrukcją liczydła (lub rozkazem) nazwiemy polecenie wykonania określonej operacji dla określonych argumentów. Polecenie to musi być sformułowane w języku zrozumiałym dla maszyny, tj. w przypadku liczydła - dla dziecka wykonującego manipulacje (dziecko to staje się jak gdyby częścią "operacyjną" maszyny). Instrukcja musi więc podawać operację, jaką należy wykonać, oraz adresy pionków, które mają wziąć udział w tej operacji.

Przyjmujemy dla naszej "maszyny" następujący zbiór "instrukcji" (numery odpowiadają operacjom):

0. id - "nic nie rób", tzn. instrukcja tożsamościowa;

1. po_i^j - postaw biały pionek na i-tym polu j-tej tabliczki ($i = 0,1,\ldots,10$; $j = 0,1,\ldots,z-1$; gdzie z oznacza liczbę tabliczek);

   $\overline{po}_i^j$ - postaw czarny pionek na i-tym polu j-tej tabliczki.

W dalszym ciągu dla numerów 2-8 instrukcje z kreską u góry odnoszą się do pionków czarnych, a bez kreski - do białych. Wskaźnik j wskazuje numer tabliczki, na której stoi pionek (lub pionki) przed wykonaniem operacji.

2. zd_i^j , $\overline{zd}_i^j$ - zdejmij pionek z i-tego pola;

3. pl_i^j , $\overline{pl}_i^j$ - przesuń w lewo (o jedno pole) pionek z i-tego pola;

4. pp_i^j , $\overline{pp}_i^j$ - przesuń w prawo pionek z i-tego pola;

5. $od_{i,k}^j$, $\overline{od}_{i,k}^j$ - odsuń od siebie (oddal) pionki z pól i, k;

6. $do_{i,k}^j$, $\overline{do}_{i,k}^j$ - dosuń do siebie (zbliż) pionki z pól i, k;

7. tn^j , $\overline{tn}^j$ - przenieś pionek z pola 10 na pole 1 tabliczki następnej;

8. tp^j , $\overline{tp}^j$ - przenieś pionek z pola 1 na pole 10 tabliczki poprzedniej;

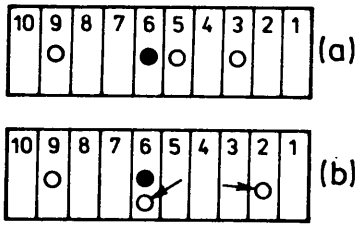
9. ZD_i^j - zdejmij ("zbij") parę pionków różnych kolorów z i-tego pola;

10. $PP_{i,k}^j$ - przesuń w prawo (o jedno pole) parę pionków różnych kolorów z pól i,k;

11. $PL_{i,k}^j$ - przesuń w lewo parę pionków różnych kolorów z pól i,k.

Każda instrukcja jest funkcją częściową na S, która danemu stanowi s_i przyporządkowuje stan następny s_{i+1} (należący do otoczenia stanu s_i), np. zastosowanie instrukcji $od_{5,3}^1$

przy stanie przedstawionym na rysunku 10a, powoduje przejście do stanu przedstawionego na rysunku 10b.



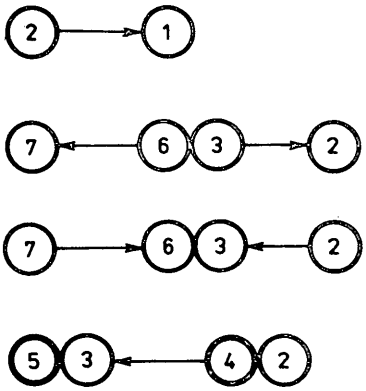
Rys. 10

Wobec tego dla każdego obliczenia $s_0, s_1, \ldots, s_n$ istnieje jednoznacznie wyznaczony ciąg instrukcji $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ taki, że $\alpha_i(s_i) = s_{i+1}$ (dla $i = 0,1,\ldots,n-1$). Ten ciąg instrukcji będziemy nazywać programem obliczenia $s_0, s_1, \ldots, s_n$.

Ciąg instrukcji $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ nazwiemy programem, jeżeli istnieje obliczenie na liczydle takie, że $\beta_0, \ldots, \beta_n$ jest programem tego obliczenia. Wówczas takie obliczenie będziemy nazywać obliczeniem programu $\beta_0, \ldots, \beta_n$.

Jeżeli dla każdej instrukcji mamy ustalony symbol (np. literowy lub graficzny), możemy zapisać program w postaci ciągu takich symboli. W informatyce odróżnia się program od jego zapisu, a zapis instrukcji w jakimś ustalonym języku programowania nazywa się instrukcją programową (w odróżnieniu od instrukcji maszyny). Dla naszych potrzeb to rozróżnianie jest niepotrzebne.

Podczas zajęć z dziećmi zamiast przedstawionych powyżej literowych symboli instrukcji wygodnie jest stosować bardzo sugestywne symbole graficzne stanowiące rysunkowe odpowiedniki rzeczywistych manipulacji (por. przykłady na rysunku 11).



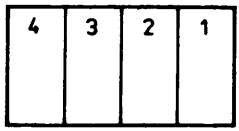
Rys. 11

- przesuń pionek z pola 2 na pole 1
- odsuń od siebie pionki z pól 6 i 3 (przesuwając je odpowiednio na pola 7 i 2)
- dosuń do siebie pionki z pól 7 i 2 (przesuwając je odpowiednio na pola 6 i 3)
- przesuń w lewo czarno-białą parę pionków z pól 4 i 2 (odpowiednio na pola 5 i 3)

5. INNE LICZYDŁA PLANSZOWE

5.1. Liczydło czwórkowe

Jedną z odmian liczydeł typu Whitneya jest liczydło czwórkowe (por. Puchalska, 1977), którego plansza powstaje przez obcięcie planszy liczydła dziesiątkowego do pierwszych czterech pól (rys. 12)



Rys. 12

Sposoby wykonywania działań są analogiczne jak na liczydle dziesiątkowym, z tą różnicą, że

1° inaczej definiuje się przedstawienie standardowe liczby;

2^{o} inny jest sposób przekraczania progu dziesiątkowego.

Różnice te omówię po kolei.

Pojedynczym pionkiem na tabliczce liczydła czwórkowego da się przedstawić tylko liczby: 1,2,3 i 4. Dla liczby 5 potrzebne są już dwa pionki (na polach 4 i 1 lub na 2 i 3), podobnie dla liczb 6 i 7. Liczbę 8 można przedstawić jako $4+4$, albo jako $4+3+1$. To drugie przedstawienie, choć wymaga większej liczby pionków, jest z pewnych względów wygodniejsze, gdyż nie stawia się dwóch pionków na tym samym polu. Liczbę 9 da się przedstawić jako $4+3+2$, a 10 jako $4+3+2+1$. A więc dla każdej z liczb $0,1,2,\ldots,10$ istnieje przedstawienie na pojedynczej tabliczce liczydła czwórkowego za pomocą takiego układu pionków, że na każdym polu tabliczki stoi co najwyżej jeden pionek.

Przedstawieniem standardowym liczby jednocyfrowej n na liczydle czwórkowym nazwiemy każdy układ P_n co najwyżej trzech pionków na tabliczce spełniający poniższe warunki:

(1) wartość układu P_n jest równa n,

(2) na każdym polu tabliczki stoi nie więcej niż 1 pionek,

(3) każdy układ Q spełniający warunki (1) i (2) składa się z nie mniejszej liczby pionków niż układ P_n.

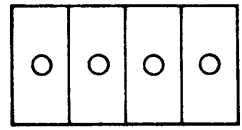
Warunki te wyznaczają jednoznacznie przedstawienie standardowe dla wszystkich liczb jednocyfrowych z wyjątkiem 5. Dla tej ostatniej liczby istnieją dwa układy pionków spełniające powyższą definicję. Można przyjąć, że liczba 5 ma dwa przedstawienia standardowe (w postaci $4+1$ oraz $2+3$) lub też - jeżeli chcemy mieć pełną jednoznaczność - wybrać jedno z nich.

Przedstawieniem standardowym k-cyfrowej liczby naturalnej n na liczydle czwórkowym nazwiemy jej przedstawienie w postaci takiego układu pionków na k tabliczkach, że na kolejnych tabliczkach są przedstawione (w postaci standardowej) kolejne cyfry liczby n.

Przekraczanie progu dziesiątkowego na liczydle czwórkowym opiera się na prostym związku liczbowym wyrażonym równością:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Zatem charakterystyczny układ czterech pionków na danej tabliczce, taki jak na rysunku 13, można zastąpić jednym pionkiem na



Rys. 13

polu 1 tabliczki następnego rzędu; można też dokonać zamiany odwrotnej.

Zaletą liczydła czwórkowego, w porównaniu z liczydłem dziesiątkowym, jest krótsza plansza, łatwiejsza do wykonania i wygodniejsza w użyciu. Małe rozmiary pozwalają zmieścić na stoliku ucznia nawet 5 lub 6 tabliczek obok siebie, podczas gdy w przypadku liczydła dziesiątkowego bywają kłopoty już z trzecią tabliczką. Ponadto, dzięki temu, że tabliczka zawiera tylko cztery pola, można zrezygnować z zapisywania na nich liczb oznaczających wartości, bo da się je łatwo zapamiętać.

Krótsza tabliczka ma jednakże tę wadę, że trudniej jest na niej zaobserwować prawidłowości arytmetyczne, jak np. zachowanie sumy lub różnicy liczb przy odpowiednim przesuwaniu pary pionków (por. 1.4), gdyż manipulacje wewnątrz jednej tabliczki ograniczają się do dwóch lub trzech ruchów.

5.2. Ogólna charakterystyka liczydeł addytywno-pozycyjnych

Do rodziny tej należą liczydła planszowe mające następujące cechy charakterystyczne:

1. Plansza składa się z wielu jednakowych tabliczek (teoretycznie ich liczba jest nieograniczona, w praktyce używa się kilku).

2. Każda tabliczka jest podzielona na q pól $(1 \leq q \leq 10)$, z których każde ma przypisaną inną wartość i $(1 \leq i \leq 10)$, w tym musi być pole o wartości 1.

3. Pojedyncza tabliczka ma strukturę addytywną, tzn. pionek postawiony na danym polu przyjmuje wartość tego pola, a wartość układu pionków na danej tabliczce oblicza się jako sumę wartości poszczególnych pionków.

4. Układ kilku tabliczek ma z założenia strukturę pozycyjną odpowiadającą systemowi dziesiątkowemu, tzn. każda kolejna tabliczka jest odpowiednikiem kolejnego rzędu dziesiątkowego. Pionek postawiony na polu o wartości i tabliczki j-tego rzędu reprezentuje liczbę $i \cdot 10^j$, a więc jego wartość zależy nie tylko od wartości pola, na którym stoi, lecz także od miejsca (pozycji) tabliczki.

5. Wartość układów pionków na k tabliczkach oblicza się sumując wartości wszystkich pionków.

Oprócz opisanych w niniejszej pracy liczydeł: dziesiątkowego i czwórkowego, liczydłami addytywno-pozycyjnymi są również np.: liczydło piątkowe (wariant liczydła dziesiątkowego, por. Puchalska, Semadeni, 1976), minikomputer Papy'ego (nazywany też liczydłem potęgowym dwójkowym ze względu na to, że wartości pól na pojedynczej tabliczce tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2), inne liczydła potęgowe, np. trójkowe (ibidem).

Wymienione powyżej liczydła addytywno-pozycyjne dzielą się w naturalny sposób na dwa rodzaje:

(a) arytmetyczne, tj. takie, na których wartości pól w obrębie tabliczki tworzą ciąg arytmetyczny (liczydło dziesiątkowe, czwórkowe, piątkowe),

(b) potęgowe, tj. takie, na których wartości pól w obrębie tabliczki tworzą ciąg geometryczny (minikomputer Papy'ego, liczydło potęgowe trójkowe).

Zauważmy, że na liczydłach pierwszego rodzaju można w oczywisty sposób dołączyć pole o wartości zero, natomiast dołączenie

takiego pola do liczydeł drugiego rodzaju byłoby nienaturalne, zaburzałoby bowiem strukturę ciągu geometrycznego.

Ogólnie biorąc, każde liczydło addytywno-pozycyjne jest wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do zewnętrznego wyglądu tabliczki) przez ciąg q-wyrazowy:

$$1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leq 10.$$

Liczydeł takich jest więc tyle, ile jest podzbiorów zbioru $\{2,\ldots,10\}$, tzn. 2^9. Każde z nich można by próbować wykorzystać zarówno do analizy teoretycznej, jak i do ćwiczeń z dziećmi.

Dodam jeszcze, że wszystkie rozpatrywane w tej pracy liczydła biorą za podstawę system dziesiątkowy. Bez większych trudności można by w analogiczny sposób zdefiniować i opisać liczydła oparte na innych systemach pozycyjnych.

6. KONCEPCJA PRAKTYCZNEGO WYKORZYSTANIA LICZYDŁA DZIESIĄTKOWEGO W NAUCZANIU DZIECI

Biorąc pod uwagę to, że liczydła planszowe są coraz szerzej stosowane w szkole jako pomoc w nauczaniu arytmetyki, warto zastanowić się nad możliwością dodatkowego ich wykorzystania do wyrabiania pewnych intuicji związanych z początkami myślenia algorytmicznego.

Efektywne wykonywanie każdego obliczenia arytmetycznego na liczydle da się przedstawić w postaci skończonego ciągu pojedynczych operacji, które można zapisać za pomocą ustalonych z uczniami symboli kodowych. Patrząc na taki zapis jak na ciąg "instrukcji" (poleceń), możemy go traktować jako "program" danego obliczenia (por. 4.2). Jakkolwiek liczydło planszowe jest bardzo odległe od rzeczywistych komputerów, pisanie przez dzieci takich "programów" oraz przeprowadzanie manipulacji według zapisanych "instrukcji" ma pewne cechy prawdziwych programów (sekwencyjność rozkazów, konieczność jednoznaczności ich interpretacji, "bezmyślność" wykonania itp.), toteż może okazać się pożyteczne dla rozwoju matematycznego dzieci.

W przeciwieństwie do informatyki, gdzie stosowana jest kolejność: od ogólnego algorytmu poprzez jego zapis w postaci programu do testowania i wykonywania tego programu dla konkretnych danych, przedstawiona poniżej koncepcja proponuje kolejność odwrotną, w większym stopniu uwzględniającą psychologiczne uwarunkowania myślenia dziecka w konkretno-operacyjnym okresie rozwoju. Dopiero po serii obliczeń na konkretnych liczbach następują próby uchwycenia ogólnych prawidłowości.

6.1. Etapy prowadzące od manipulacyjnego rachowania na liczydle do układania schematów obliczeń

Ćwiczenia prowadzące od "zwykłych" rachunków na liczydle, poprzez zapisywanie konkretnych obliczeń za pomocą umownych symboli, do całościowego ujmowania pewnych typów obliczeń w postaci schematów czynności, można podzielić na następujące etapy:

1. Zapoznawanie z liczydłem. Jest to etap obejmujący całokształt ćwiczeń arytmetycznych z wykorzystaniem liczydła, wykonywanych dla celów czysto matematycznych.

2. Kodowanie ruchu pionków na liczydle za pomocą umownych symboli. Symbole te powinny być proste i sugestywne, w miarę możliwości zaproponowane przez dzieci. Ustalenie ich pozwoli zapisywać wykonywane manipulacje.

3. Protokołowanie przebiegu obliczeń "krok po kroku" oraz odtwarzanie ich z protokołu. Przeprowadzając manipulacje, dziecko notuje każdy krok za pomocą odpowiedniego symbolu. Następnie inne dziecko próbuje odtworzyć z zapisanych symboli przebieg obliczenia za pomocą pionków, sprawdzając w ten sposób, czy zapis jest poprawny i jednoznaczny.

4. Pisanie "programów" obliczeń bez manipulacji pionkami i wykonywanie obliczeń na podstawie zapisu. Znając zasady poruszania się pionków po planszy dziecko zapisuje możliwy przebieg obliczenia (bez jego faktycznego wykonywania na liczydle) w postaci ciągu odpowiednich symboli. Następnie, interpretując te symbole jako "instrukcje", dzieci przystępują do "testowania" tak otrzymanego "programu" (lub jego fragmentu, jeżeli czują

potrzebę przyjrzenia się przebiegowi manipulacji). Najlepiej jeśli wykonują to dwie osoby, z których pierwsza odczytuje polecenia, a druga wykonuje je "automatycznie" (tzn. bez zastanawiania się nad ich sensem), o ile tylko dają się wykonać; jeżeli nie można wykonać "instrukcji", oznacza to błąd w zapisanym "programie". Następuje tutaj wyraźne rozdzielenie roli "programisty", który pisze "program", i roli "maszyny", która ten "program" wykonuje.

5. Próby układania ogólnego schematu czynności dla pewnych typów obliczeń. Analizując "programy" konkretnych obliczeń jakiegoś typu (np. dodawania dwu konkretnych liczb jednocyfrowych), dzieci zauważają, że wszystkie one mają podobną budowę. Stawiamy problem: czy można znaleźć ogólny algorytm wykonywania tego typu obliczeń (np. dodawania dwu dowolnych liczb jednocyfrowych). Wspólnie z dziećmi próbujemy ułożyć schemat postępowania uwzględniający wszystkie sytuacje mogące wystąpić w takim przypadku. Po jego ułożeniu dzieci przeprowadzają szereg prób prześledzenia drogi konkretnych obliczeń na schemacie.

Kolejnym etapem mogłyby być próby pisania programu dla ogólnego algorytmu. Jest to jednak istotnie trudniejsze i prawdopodobnie wykracza poza możliwości dzieci w tym okresie rozwojowym.

6.2. Uwagi o realizacji etapów

Podczas wykonywania ćwiczeń należy umiejętnie uwypuklać elementy, które uważamy za najbardziej istotne, aby w ten sposób zwracać na nie uwagę dzieci. Omówię teraz krótko poszczególne etapy z tego punktu widzenia.

Etap 2. Ustalając wraz z dziećmi sposób kodowania ruchu pionków na planszy rozpatrujemy różne propozycje dzieci, podkreślając tym samym umowność tego rodzaju notacji. Ponadto zwracamy uwagę na takie cechy istotne dla dobrego systemu kodowania, jak: łatwość zapisu i odczytu oraz jednoznaczność interpretacji.

Etap 3. Przy każdym obliczeniu można sporządzić protokół, tj. zapis kodowy ciągu operacji, które zostały wykonane. Zapis ten powinien spełniać warunki:

(a) każdy krok obliczenia powinien być zanotowany,

(b) powinna być zachowana kolejność kroków,

(c) mogą być przy tym używane wyłącznie symbole wcześniej ustalone.

Jeżeli zachodzi konieczność dołączenia nowego symbolu, bez którego nie da się zapisać jakiejś czynności, trzeba ten symbol ustalić wspólnie, tak aby był dla wszystkich zrozumiały.

Porządny protokół musi być więc taki, aby każda osoba znająca ten system kodowania mogła z niego odtworzyć wszystko, co się działo na planszy, i to we właściwej kolejności.

Protokół wykonanych operacji jest prototypem "programu" obliczenia. Przy odtwarzaniu czynności z protokołu sprawdza się, czy jest on właściwie sporządzony. Najlepiej, jeżeli robi to osoba, która nie widziała przebiegu wykonywanych operacji. Jest to przygotowanie do wykonywania "programów" obliczeń.

Etap 4. "Program" obliczenia różni się od protokołu przede wszystkim tym, że dotyczy czynności, które dopiero mają się odbyć. Jest to więc szczegółowy plan przyszłego obliczenia. Aby go napisać, trzeba ustalić sposób wykonywania obliczenia, a tym samym kolejność czynności. Podobnie jak przy protokołowaniu, nie wolno wprowadzać symboli obcych ani używać np. skrótów (podkreślenie jednoznaczności). "Program" musi być napisany tak, aby jednoznacznie wyznaczał kolejność wykonywania czynności i moment ich zakończenia.

Można też rozpatrywać różne "programy" dla tego samego obliczenia arytmetycznego i badać, który z nich jest najkrótszy, najwygodniejszy itp.

Przy wykonywaniu "programu" kładziemy nacisk na precyzję odczytania i wykonania każdego rozkazu po kolei. Ani osobie, która odczytuje, ani tej, która manipuluje pionkami, nie wolno tutaj niczego się domyślać, ani samorzutnie korygować ewentual-

nych błędów. Traktując liczydło jako automat wykonujący obliczenie, staramy się zwrócić w ten sposób uwagę dzieci na tak charakterystyczną cechę, jak dosłowne i bezkrytyczne interpretowanie "instrukcji" niezależnie od sensowności jej użycia w danej sytuacji, jeśli tylko istnieje formalna możliwość jej wykonania. "Maszyna" może wykryć wyłącznie błąd formalny w "programie" (tj. niemożność wykonania zapisanej "instrukcji"), natomiast nie potrafi stwierdzić, czy "program" jest merytorycznie poprawny (tj. czy oblicza to, co trzeba).

Etap 5. Zbudowanie ogólnego algorytmu wymaga całościowego ujęcia wszystkich możliwych przypadków danego typu obliczeń. Może to być dla dzieci trudne, podobnie jak rozpatrywanie dwu równoległych "ścieżek" po rozgałęzieniu zależnym od spełnienia lub nie spełnienia określonego warunku. Pewną pomoc przy tego typu rozumowaniach może stanowić przypomnienie schematu drzewa, wielokrotnie stosowanego do rozmaitych ćwiczeń na lekcjach matematyki.

Na koniec chciałabym dodać jeszcze dwie uwagi:

1° Powyższych pięciu etapów nie należy traktować jako następujących po sobie oddzielnych jednostek metodycznych, z których każdą następną można rozpocząć dopiero po całkowitym zakończeniu poprzedniej. W istocie mamy tu do czynienia z układem spiralnym: po zapoznaniu się z działaniami jakiegoś typu można pisać dla nich "programy"[2], a dopiero potem poznawać następne działania itd.

2° Nie jest też konieczne ujmowanie tego systemu jako całości, którą należy realizować albo od początku do końca, albo wcale. Sądzę, że każdy kolejny etap sam w sobie stanowi istotny krok na drodze do przybliżenia dziecku pewnych cennych idei;

---

[2] M.Minsky (1970, str.205), wysunął kontrowersyjną hipotezę, że w przyszłości nauczanie szeroko rozumianego programowania może być ważniejsze nawet niż nauczanie matematyki, szczególnie w początkach nauki szkolnej.

nawet jeżeli zrezygnujemy (np. z powodu braku czasu) z realizacji dalszych etapów, wykonane ćwiczenia na pewno nie będą stratą czasu. To, do jakiego etapu możemy dojść, zależy w szczególności od wieku dziecka: można się spodziewać, że więcej zrobią uczniowie kl. V niż uczniowie kl. III. Nic też nie przeszkadza nam zaczynać od łatwiejszych ćwiczeń możliwie wcześnie i powracać do tego tematu w kolejnych latach, za każdym razem posuwając się nieco dalej.

6.3. Krótkie omówienie badań pilotażowych

Pod koniec 1979 r. prowadziłam w jednej ze szkół warszawskich krótką serię zajęć z uczniami w wieku 9-11 lat. Zajęcia te miały służyć wstępnej weryfikacji koncepcji. W istocie stanowiły dla mnie również inspirację, poddając nowe pomysły, niekiedy pochodzące wprost od dzieci (np. działania chińczykowe). Zajęcia były prowadzone w trzech 6-8-osobowych grupach odpowiadających poziomom wiekowym (klasy III, IV i V) i obejmowały po 8 półgodzinnych spotkań z każdą grupą. Grupy z klas III i IV przeszły w tym czasie (na wybranych zagadnieniach) etapy 1-4, a grupa z klasy V etapy 1-5. Nie opisując tutaj przebiegu badań, opisanych dokładniej w mej pracy doktorskiej (Puchalska, 1980), ograniczę się do kilku uwag końcowych.

Przedstawiona powyżej propozycja dydaktyczna idzie w kierunku "przedłużenia" ćwiczeń arytmetycznych wykonywanych przy użyciu liczydła planszowego o pewne dodatkowe czynności mające na celu przybliżenie dzieciom niektórych intuicji związanych z pojęciem algorytmu i programu obliczenia. Liczydło nadaje się do tego szczególnie, dzięki łatwo zauważalnej modularności obliczeń rozumianej jako możność wyróżnienia dla każdego typu obliczeń kilku manipulacji podstawowych, z których składa się każde obliczenie danego typu. Oznaczenie takich pojedynczych manipulacji umownymi symbolami pozwala na kodowanie ruchu pionków na liczydle i zapisywanie przebiegu każdego obliczenia tak, jak się zapisuje np. partię szachów. Dzięki temu można później odtworzyć przebieg obliczenia i przeanalizować ewentualne błędy. Wobec dzieci można argumentować, że znajomość takiego zapisu pozwala przesłać koledze w liście informację o przebiegu obli-

czenia lub opowiedzieć to przez telefon krótko i jednoznacznie. Praktyczna wyższość takiego kodowania nad np. rysowaniem tabliczek z pionkami lub słownym opisem wykonywanych czynności nie ulega dla dzieci wątpliwości.

Z drugiej strony, takie zapisywanie wykonywanych manipulacji pozwala zaobserwować pewne regularności występujące przy konkretnych obliczeniach danego typu, a to z kolei daje możliwość budowania schematów postępowania dla przypadku ogólnego. W ten sposób dzieci dochodzą do opisu ogólnego algorytmu dla danego typu obliczeń.

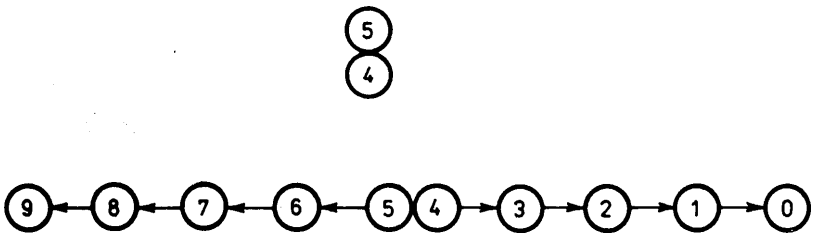
Na szczególne podkreślenie zasługuje to, że droga taka jak powyżej opisana, odpowiednia dla dzieci, u których dominuje myślenie konkretne, stanowi całkowite odwrócenie drogi stosownej dla dorosłych (a ściślej, dla osób zdolnych do rozumowań formalnych), dla których punktem wyjścia jest zazwyczaj ogólny algorytm.

Wspomniana powyżej próba "wdrożenia" przedstawionej koncepcji upoważnia do optymistycznego przypuszczenia, że dzieci bardzo interesują się tą problematyką. Wszyscy uczniowie biorący udział w zajęciach byli aktywni, żywo dyskutowali, proponowali własne rozwiązania i ulepszenia oraz zastanawiali się nad interpretacją wykonywanych czynności.

Obserwacje potwierdziły ponadto, iż kategoryjny model ugrupowania (por. 3.2) jest szczególnie adekwatny do opisu aktywności dzieci związanej z rachowaniem na liczydłach planszowych, bowiem ruchy pionków są w naturalny sposób reprezentowane przez strzałki (naturalności tej dowodzi całkowita jednomyślność dzieci przy ustalaniu symboli graficznych dla zakodowania ruchów pionków, por. rys. 11), a każda taka strzałka może być interpretowana jako pewien morfizm.

Wykonanie kolejno kilku lub kilkunastu ruchów pionkami, zapisywane w postaci ciągu strzałek, odpowiada składaniu operacji w ugrupowaniu, tj. składaniu morfizmów w modelu kategoryjnym. U uczniów biorących udział w zajęciach wyraźnie dało się zaobserwować spontaniczne łączenie poszczególnych operacji w większe całości, co znalazło odbicie podczas protokołowania obliczeń w przejściu od początkowego zapisywania każdego ruchu oddzielnie

do ujmowania całych sekwencji w jednym zapisie (por. przykład na rysunku 14). Z kolei w modelu "maszynowym" (por. rozdział 4)



Rys.14

odpowiada to łączeniu "instrukcji" w jeden "makrorozkaz" lub "procedurę". Traktowanie liczydła jako pewnego rodzaju maszyny matematycznej daje dzieciom dobrą motywację do analizowania przebiegu wykonywanych czynności, chodzi bowiem o możność "automatycznego" i wielokrotnego ich powtarzania. Ten model staje się najodpowiedniejszy wówczas, gdy od protokołowania czynności równolegle z ich wykonywaniem przechodzimy do "programowania", tj. planowania przebiegu przyszłych obliczeń.

Strzałkowy zapis czynności daje również obrazową interpretację zarówno odwracania pojedynczego ruchu (strzałka przeciwnie skierowana), jak i odwracania całej procedury obliczenia. W tym ostatnim przypadku przestawienie kolejności morfizmów odwrotnych zgodnie z równością $(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, wynika wprost z oczywistej zasady poruszania się zawsze w kierunku wskazanym strzałką. Widoczne jest, że po odwróceniu każdej strzałki danego ciągu naturalnemu odwróceniu ulega także kolejność tych strzałek. Podczas pisania programów dla obliczeń wzajemnie odwrotnych (np. 5 + 7 i 12 - 7) wszystkie dzieci korzystały w praktyce z tej zależności, choć nie wszystkie potrafiły świadomie ją sformułować. Potwierdza to znaną skądinąd dydaktykom tezę, że dziecko na ogół dużo wcześniej stosuje pewne rozumowania w działaniu niż potrafi je sprecyzować w mowie.

Podsumowując rozważania dotyczące opisanych wyżej ćwiczeń z liczydłem dziesiątkowym, chciałabym stwierdzić, że z tego typu

zajęć uczniowie mogą - oprócz wstępnego ukształtowania pre-informatycznych intuicji związanych z pojęciem algorytmu i programu obliczenia - wynieść korzyści w zakresie samej matematyki. Zaliczam do nich m.in.:

(a) poznanie, a właściwie odkrycie i dzięki temu pełniejsze uświadomienie sobie pewnych dodatkowych zależności liczbowych, co pogłębia rozumienie arytmetyki. Przykładem takiej zależności jest

$$(a+1) + (b-1) = a+b;$$

(b) spojrzenie na działania arytmetyczne z innej niż zazwyczaj strony, uprzytomnienie możliwości różnorakiej interpretacji tych działań (por. rozdział 2);

(c) zrozumienie zasad łączenia pojedynczych operacji w dłuższe sekwencje oraz wyróżniania podstawowych "cegiełek" w operacjach złożonych;

(d) lepsze zrozumienie sensu działań wzajemnie odwrotnych przez uświadomienie sobie związku między odwracaniem operacji a odwracaniem procedury (wspomniana już odpowiedniość $(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$);

(e) oswojenie z umownością różnych stosowanych zapisów symbolicznych przez samodzielne stworzenie prostego języka symboli kodowych, posługiwanie się tym językiem przy zapisywaniu wykonywanych obliczeń oraz "przekładanie" z tego języka zarówno na język manipulacji pionkami, jak i na zwykły zapis arytmetyczny.

Nie od rzeczy będzie dodać, że treść i forma tak ułożonych zajęć przyczyniają się z jednej strony do aktywizacji dzieci, a z drugiej strony narzucają pewną dyscyplinę myślenia (konieczność podporządkowania się wspólnie ustalonym regułom w imię "bezmyślności" maszyny) - jedno i drugie bardzo pożądane na lekcjach matematyki.

7. ROLA LICZYDEŁ PLANSZOWYCH W NAUCZANIU

7.1. Zalety dydaktyczne liczydeł

Liczydła planszowe jako środek do nauczania matematyki mają wiele niewątpliwych zalet: są atrakcyjnym urozmaiceniem lekcji, pozwalają dziecku na samodzielne wykonywanie czynności ułatwiających kształtowanie się pojęć matematycznych, dają okazję do wielkiej liczby prostych obliczeń pamięciowych, wyrabiają umiejętność upraszczania rachunków w przypadku konkretnych danych, rozwijają inwencję dziecka, a umożliwiając bardziej różnorodne rozpatrywanie zagadnień arytmetycznych - pogłębiają ich rozumienie. Wykonywanie obliczeń opiera się na pewnych prostych związkach liczbowych, które mogą być zaobserwowane przez samych uczniów (przy pewnej pomocy nauczyciela). Sprawdzanie praktycznego działania odkrytych reguł manipulacji pionkami poprzez porównywanie uzyskanych w ten sposób wyników z wynikami rachunku pamięciowego, a także próby uogólniania swoich obserwacji mogą również przyczynić się do kształtowania podstaw myślenia algorytmicznego,

Praktyczną zaletę rozpatrywanych liczydeł stanowi możność samodzielnego i stosunkowo łatwego wykonania planszy. Jako pionków można użyć guzików, kasztanów lub kapsli od butelek. Do wnętrza kapsli można włożyć kolorowe kawałki papieru; można też np. umówić się, że gdy mamy przedstawić na liczydle dwie liczby, jedną z nich przedstawiamy za pomocą kapsli odwróconych "do góry dnem". Łatwość wykonania opisanych powyżej liczydeł jest ich poważnym atutem: dzięki temu da się bez większych trudności zamieniać jedno liczydło na drugie, stosownie do aktualnych potrzeb i możliwości dzieci.

Liczydła planszowe stanowią więc cenne uzupełnienie pomocy dydaktycznych produkowanych dla klas początkowych, z tym jednym wszakże zastrzeżeniem, że nie powinny być traktowane jako jeszcze jedna maszynka do liczenia, lecz jako instrument stymulujący matematyczną wyobraźnię dziecka i umożliwiający mu poznanie ciekawych zależności arytmetycznych, które inaczej pozostałyby, być może, nie zauważone.

7.2. Kwestia biegłości w rachowaniu na liczydłach planszowych

Na zakończenie ogólnych rozważań dotyczących liczydeł planszowych chciałabym poruszyć sprawę, która wydaje się ważna ze względu na jej konsekwencje dla nauczania. Zacznę od pewnych reminiscencji.

W roku 1975, krótko po opracowaniu teoretycznej koncepcji liczydła czwórkowego, małam możliwość obserwować w Szkole Podstawowej nr 25 w Warszawie pierwsze próby jego stosowania w nauczaniu arytmetyki. Obserwowałam zajęcia (prowadzone przez tę samą osobę) w dwu równoległych klasach, z których jedna miała za sobą wiele ćwiczeń w liczeniu na minikomputerze Papy'ego, a druga minikomputera nie znała. Z pewnym wówczas zdziwieniem zauważyłam, że dzieci z tej drugiej klasy lepiej radziły sobie z liczydłem czwórkowym. Dzieci przyzwyczajone do minikomputera i liczące na nim z dużą biegłością robiły na liczydle czwórkowym bezsensowne błędy pochodzące z mechanicznego przenoszenia posiadanych nawyków, np. aby pomnożyć daną liczbę przez 2 przesuwały pionek na następne pole (tutaj o wartości o 1 większej).

Ta prawidłowość zaobserwowana wówczas na małej próbce potwierdziła się jeszcze przy innych okazjach: dzieci, które dobrze znały minikomputer, z trudnością przestawiały się na inny typ liczydła. Zachęcane przez nauczycielkę próbowały porównać nowe liczydło z minikomputerem analizując podobieństwa i różnice, jednakże, gdy przechodziły do rachowania, wciąż popełniały pomyłki chcąc liczyć "minikomputerowo".

Utwierdziło mnie to w przekonaniu, że teza H.Moroza (1978, str. 116) głosząca, iż w toku nauczania powinniśmy dążyć do tego, by uczeń zautomatyzował wykonywanie operacji na minikomputerze, jest niesłuszna. Uważam, że rachowanie na minikomputerze, a także na każdym innym liczydle, jest kształcące tak długo, jak długo uczeń wykonuje je świadomie, zastanawiając się nad sensem każdego kroku. Dalsze ćwiczenia dążące do zyskania biegłości przez zautomatyzowanie rachunku mogą przynieść więcej szkody niż pożytku, gdyż pochłaniając wiele czasu dają efekty bezużyteczne, zarówno z punktu widzenia potrzeb dalszego nauczania matematyki, jak i z punktu widzenia zastosowań praktycznych. Sądzę, że tego

samego zdania był Papy (1975): "Minikomputer nie jest maszyną do liczenia. Jego celem nie jest konkurowanie z komputerami, maszynami liczącymi, abakami rosyjskimi czy japońskimi, rachunkiem pisemnym. Jest on pomocą dydaktyczną dla uczenia się liczenia, dla zrozumienia świata liczb, dla intuicyjnego, lecz równocześnie klarownego rozumienia operacji elementarnych".

Czuję się również w obowiązku polemizować ze stwierdzeniem H.Moroza (1978, str. 125), że "zastosowanie w szybkim mechanicznym rachunku oraz możliwość operowania dużymi liczbami już w klasie I, to niewątpliwie zalety minikomputera". Na podstawie kilkuletnich doświadczeń z dziećmi, a także z nauczycielami, mogę stwierdzić, że w rzeczywistości liczenie na minikomputerze (a także na innych liczydłach) jest i wolniejsze, i trudniejsze od innych metod (np. od rachowania pisemnego), zwłaszcza na dużych liczbach. Przy manipulacjach przeprowadzanych dużą liczbą pionków łatwo jest się pomylić, zapomnieć o przesunięciu jakiegoś pionka lub przesunąć inny dwa razy, a wykrycie takiej pomyłki jest, praktycznie biorąc, niemożliwe, gdyż po wykonaniu ruchu poprzednia sytuacja "znika" z planszy. Nie można więc być pewnym poprawności uzyskanego wyniku. Co gorsza, nawet gdy wiadomo, że wynik jest zły, na ogół ani sam uczeń, ani nikt inny nie jest w stanie powiedzieć, w którym miejscu nastąpił błąd. Dla weryfikacji wyniku skomplikowanego obliczenia należałoby przeprowadzić je kilkakrotnie i porównać otrzymane rezultaty (tak jak to się często czyni przy posługiwaniu się elektronicznym kalkulatorem).

Powyższe uwagi nie oznaczają bynajmniej, że chciałabym usunąć minikomputer Papy'ego z lekcji matematyki w klasach początkowych. Przeciwnie, uważam, że zarówno minikomputer, jak i inne typy liczydeł planszowych są cennym środkiem dydaktycznym w nauczaniu matematyki, lecz z zupełnie innych powodów niż możność zautomatyzowania lub przyspieszenia rachunku. Zamiast tracić czas na dążenie do biegłości rachunkowej, lepiej przeznaczyć go na coś, co wydaje mi się szczególnie ważne i potrzebne, a mianowicie na zapoznanie dzieci z kilkoma (co najmniej dwoma) rodzajami liczydeł. Zmienianie liczydeł w nauczaniu, bez nadmiernego eksponowania któregoś z nich, wzmocni efekty pozytywne (np. lepsze rozumienie działań arytmetycznych), a osłabi negatywne (np. nabieranie nawyków nieistotnych z punktu widzenia celów kształcenia).

Podsumowanie

Rozważania teoretyczne oraz przeprowadzone obserwacje i badania pilotażowe skłaniają mnie do sformułowania następujących ogólnych wniosków podsumowujących i uzupełniających uwagi szczegółowe poczynione w treści pracy.

1. Liczydła planszowe (a w szczególności liczydło dziesiątkowe) mają znacznie bogatszą strukturę matematyczną niż to by wynikało z dotychczasowych opracowań.

2. Liczydła planszowe (które będę dalej nazywać po prostu liczydłami) nadają się szczególnie do stosowania w nauczaniu dzieci 7-12-letnich ze względu na pokazaną zgodność systemu operacji wykonywanych na liczydle z systemem ugrupowania w sensie Piageta, charakterystycznym dla myślenia dzieci w konkretno-operacyjnym okresie rozwoju.

3. Analizowanie różnych sposobów wykonywania obliczeń na liczydłach może się przyczynić do lepszego rozumienia czterech działań arytmetycznych i ich własności.

4. Najcenniejszą dla procesu matematycznego kształcenia dzieci zaletę liczydeł stanowi nie tyle sama możność rachowania na nich, ile możność samodzielnego odkrywania prostych prawidłowości arytmetycznych związanych z ruchem pionków. Z tego punktu widzenia nie ma sensu dążenie do biegłości w wykonywaniu obliczeń na liczydłach, a tym bardziej - dążenie do zautomatyzowania występujących przy tym czynności.

5. Obok niewątpliwej przydatności w nauczaniu arytmetyki, liczydła mogą być pomocne przy kształtowaniu pewnych intuicji związanych z myśleniem algorytmicznym (modularność algorytmu, jego skończoność, jednoznaczność itp.).

6. Pokazywanie związków liczydeł z innymi środkami dydaktycznymi wzbogaca nauczanie o nowe aspekty, a w szczególności przyzwyczaja dzieci do "przekładania" idei matematycznych z jednego języka na drugi (np. z języka manipulacji pionkowych na język strzałek).

PUBLIKACJE CYTOWANE

AEBLI, H.: Dydaktyka psychologiczna, PWN, Warszawa 1959.

COHORS-FRESENBORG, E.: Dynamische Labyrinthe, Didaktik der Mathematik 1 (1976), str. 1-21.

CWIRKO-GODYCKI, J.: Minikomputery, WSiP, Warszawa 1980.

MINSKY, M.: Form and content in computer science, Journal Association for Computing Machinery 17(1970), str. 197-215.

MOROZ, H.: Z doświadczeń nad modernizacją nauczania początkowego matematyki, WSiP, Warszawa 1978.

OLÉRON, P., J.PIAGET: Inteligencja, PWN, Warszawa 1967.

PAPY, G.: Minicomputer, Didier, Bruxelles 1968.

PAPY, G.: Heureux vingtième anniversaire, minicomputer, Nico 19(1975), str. 3-37.

PAWLAK, Z.: Maszyny matematyczne, PZWS, Warszawa 1971.

PIAGET, J.: La psychologie de l'intelligence, Paris 1947.

PIAGET, J., B.INHELDER: Od logiki dziecka do logiki młodzieży, PWN, Warszawa 1970.

PUCHALSKA, E.: Liczydło czwórkowe, Oświata i Wychowanie 11/1977, wersja D, str. 25-32.

PUCHALSKA, E.: Analiza dydaktyczna liczydła typu Hasslera Withneya jako środka w matematycznym kształceniu dzieci, praca doktorska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, 1980.

PUCHALSKA, E., Z.SEMADENI: Liczydła planszowe, Oświata i Wychowanie, wkładka Studium Nauczania Początkowego Matematyki NURT, nr 36-38, str. 909-952 (1976); por.rozdział 7.14 książki "Nauczanie początkowe matematyki" tom 3, WSiP, w druku.

SEMADENI, Z., A.WIWEGER: Wstęp do teorii kategorii i funktorów, PWN, Warszawa 1978.

STEINER, H.G.: Analyse mathématique du concept de groupement de Piaget. Le minicomputer de Papy comme groupement, Nico 15(1973), str. 77-94.

SZEMIŃSKA, A.: Rozwój pojęć matematycznych u dziecka, w: Nauczanie początkowe matematyki, t.I, WSiP, Warszawa 1981.

TURNAU, S.: Kształtowanie pojęcia sumy liczb u dziecka, Oświata i Wychowanie, wkładka Studium Nauczania Początkowego Matematyki NURT, nr 11(1975).

WHITNEY, H.: A mini-computer for Primary Schools, Mathematics Teaching, nr 52, str. 1-7, nr 53, str. 14-18 (1970).

WITTMANN, E.: The concept of grouping in J.Piaget psychology, Educational Studies in Mathematics 5 (1973a), str.125-146.

WITTMANN, E.: Natural numbers and groupings, Educational Studies in Mathematics 6 (1973b), str. 53-75.

MATHEMATICAL AND DYDACTICAL ANALYSIS OF CERTAIN ABACI

Summary

The paper is concerned with arithmetical, algebraical, categorical and automaton-theoretical aspects of computations with the abacus of Hassler Whitney or a similar one (like Papy's minicomputer). The author believes that a suitable sequence of activities with such an abacus may help children of age 9-12 to grasp some computer-theoretical intuitions. She suggests the following steps:

(i) exploring the abacus,

(ii) proposing ways of coding movements of stones during the computations,

(iii) writing a protocole of computations (akin to that of chess game) and performing actions coded in a protocole written by another child,

(iv) writing programs for single computations, e.g., 19 + 5, executing with the abacus, and making corrections,

(v) designing general schemes of actions for some types of computations.