DYDAKTYKA MATEMATYKI 1 (1981)

dm ptm 1982

PETER HILTON (Seattle, Washington)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Fałszywe dychotomie w aktualnych poglądach na nauczanie matematyki i nauk przyrodniczych*

0. WSTĘP

Teoria i praktyka kształcenia przeżywają obecnie burzliwy okres, tak w Stanach Zjednoczonych, jak i w wielu innych krajach. Na wszystkich szczeblach nauczania, od przedszkola po uniwersytet, poddaje się krytyce tradycyjne pojęcia. Tradycyjne sposoby nauczania są krytykowane szczególnie przez zwolenników podejścia mniej formalnego i silniejszej aktywizacji uczniów. Tradycyjne normy wykształcenia są poddawane w wątpliwość przez tych, którzy utrzymują, że przyjęte kryteria powodują nadmierne uprzywilejowanie wykształcenia akademickiego kosztem praktycznego, oraz że wprowadzają do naszego systemu społecznego niezdrowy snobizm wykształcenia. Następnie, tradycyjne treści są atakowane przez tych, którzy uważają je za niedostosowane do potrzeb i zainteresowań współczesnego społeczeństwa, twierdząc przy tym, że ważne i pobudzające nowe dziedziny zainteresowań człowieka są przez tradycyjny system zaniedbane, gdyż nie weszły w jego skład wówczas, gdy system ten powstawał.

Referat wygłoszony na sesji plenarnej III Międzynarodowego Kongresu Nauczania Matematyki w Karlsruhe /RFN/ w sierpniu 1976 pod tytułem "Education in mathematics and science today: The spread of false dichotomies" /przypisek tłum./

Na olbrzymie koszty kształcenia czuli są zarówno podatnicy, jak i rządy; różne kręgi społeczne dają też wyraz swemu niezadowoleniu z niskiej sprawności kształcenia, proponując różne środki zaradcze. Z tego powodu te same kręgi nalegają na wypracowanie realnych kryteriów osiągnięć, dających się łatwo w każdej chwili zastosować, tak by niepowodzenie mogło być szybko wykrywane, a błędne postępowanie, czy to w stosunku do pojedynczego ucznia, czy w realizacji całego programu, mogło być szybko skorygowane, zamiast zatruwać cały proces dydaktyczny.

W Stanach Zjednoczonych wielu zdaje sobie sprawę z tego, że ks. ałcenie nie odpowiada potrzebom pewnych grup społecznych. Przekonujące jest żądanie, by system szkolny przystosował się do potrzeb grup nieuprzywilejowanych, ludzi, których rodzimy język jest różny od języka dominującego, a także członków innych grup mniejszościowych tego społeczeństwa[1]. Uważa się dalej, że doświadczenie zdobywane przez ucznia w okresie nauki szkolnej nie powinno tak silnie jak w modelu tradycyjnym różnić się od sytuacji napotykanych w życiu dorosłym. Z tezy tej wyciąga się wnioski, dotyczące zarówno treści nauczania jak i kontekstu społecznego, w którym ten proces przebiega. Dalszą konsekwencją tego postulatu jest zdecydowane poparcie dla kierunku określanego jako "career education" /kształcenie dla sukcesu zawodowego/.

Trzeba uznać za naturalne i zdrowe zjawisko różnorodności poglądów wypowiadanych w wyniku analiz teoretycznych i przeprowadzonych eksperymentów. Są tacy, którzy utrzymują, niekiedy z mesjanistycznym patosem, że odkryli błędy i wady panującego systemu i są w stanie zarekomendować uniwersalną receptę na sukces pedagogiczny. Niestety, wiele poważnych błędów, zarówno teoretycznych jak i praktycznych, popełnia się przy okazji niewątpliwie cennych prób poprawienia jakości nauczania. Jest prawdziwym

---

[1] Wyrażenie "grupa mniejszościowa" jest tu użyte w sensie specyficznie amerykańskim, tj. na oznaczenie upośledzonej części dopełniania zbioru "waspów rodzaju męskiego", gdzie "wasp" - to W h i t e A n g l o - S a x o n P r o t e s t a n t /biały Anglosas wyznania protestanckiego - przypisek tłum./.

nieszczęściem, że nauczanie jest dziedziną, w której o błędy szczególnie łatwo i gdzie błędy niosą poważne i długotrwałe konsekwencje.

W artykule tym dokonano próby zanalizowania niektórych z tych błędów, posługując się schematem "fałszywej dychotomii". Wydaje się bowiem, że umysł ludzki jest szczególnie skłonny do ulegania złudzeniu dychotomii, gdy usiłuje znaleźć panacea na ciężkie choroby społeczeństwa: stwierdzając, że dany system czy zasada są błędne, wyciąga wniosek, że dla poprawy sytuacji trzeba zastąpić je ich przeciwieństwami /2/. Postaramy się pokazać, że wiele rozpowszechnionych dychotomii jest fałszywych, tj. że dwie przeciwstawiane sobie koncepcje nie stanowią sytuacji "albo-albo": choć różne, zachodzą na siebie w sposób istotny, a właściwie rozumiane i stosowane mogą nawet wzmacniać się wzajemnie. Trzeba przyznać, że jest to punkt widzenia przyjęty przez autorów cennego sprawozdania NACOME, cytowanego w notce /2/.

Nie będziemy dążyć do stworzenia kompletnej listy takich fałszywych dychotomii; zachęcamy nawet czytelnika do samodzielnego wykrywania dalszych. Ponadto nie wszystkie wymienione tu dychotomie zostaną dogłębnie przedyskutowane. Tym niemniej baczne zwrócenie na nie uwagi powinno doprowadzić do ujawnienia pewnych zasad pedagogicznych, pomocnych dla poprawy jakości nauczania i uczenia się w naszych szkołach.

Ponieważ jestem matematykiem i w dodatku przemawiam na kongresie poświęconym problemom kształcenia matematycznego, wolę

/2/ Przewaga fałszywych dychotomii została już wskazana przez autora w referacie na szóstym dorocznym spotkaniu Open Court Editorial Advisory Board /maj 1974/. Zob. też zalecenie 1, str. 136 "Overview and Analysis of School Mathematics, Grades K-12", National Advisory Committee on Mathematical Education /1975/. Publikacja ta jest na ogół cytowana jako sprawozdanie NACOME /przypisek autora/.

Część sprawozdania NACOME została omówiona w pracy Z.KRYGOWSKIEJ: Nauczanie matematyki uczniów w wieku 10-16 lat -

czerpać przykłady z nauczania matematyki. Ale znowu zachęcam czytelnika do uogólnień na inne przedmioty. Jestem jednak dostatecznie staroświecki, by zamierzając lepiej niż powierzchownie zbadać ważne zagadnienie, koncentrować się na tych jego aspektach, w których mogę się poczuwać do posiadania skromnych choćby kompetencji. Jestem głęboko przekonany, że gdyby specjaliści w różnych dyscyplinach zeszli się i porównali swe doświadczenia, to mogliby dojść do doniosłych, szerokich i ogólnych prawd. Nie wierzę natomiast, by były właściwe lub dla kogokolwiek użyteczne na własną rękę i bez konsultowania się ze specjalistami dokonywane próby tworzenia własnych sądów na podstawie cudzych hipotetycznych doświadczeń. Jestem naprawdę przerażony dążeniem specjalistów poszczególnych dziedzin do uroczystego wygłaszania sądów na temat nauczania różnorodnych dyscyplin, niewiele wspólnego mających z ich własną. Uważam więc, że ograniczenie się w mojej analizie do matematyki i nauk przyrodniczych jest usprawiedliwione, choć z drugiej strony wyrażam nadzieję, że czytelnicy będą sami badać adekwatność tych obserwacji do innych dyscyplin i zakresu ich koniecznych modyfikacji w tych nowych kontekstach[3].

Tak więc moja lista dychotomii zawiera takie, których ogólność jest od razu widoczna i takie, których samo sformułowanie umieszcza je w kontekście nauczania matematyki i przedmiotów przyrodniczych. Powtarzam jednak, że omawiając którekolwiek z dychotomii będę się ograniczał do tych dwu dziedzin, niezależnie od sformułowania dychotomii.

Oto więc niekompletna lista fałszywych dychotomii, bardzo obecnie rozpowszechniona w nauczaniu matematyki i nauk przyrodniczych:

---

stan aktualny i tendencje, Wiadomości Matematyczne 21 /1979/, str. 193–211 /przypisek tłum./.

[3] Naturalnie, opieram się na moim doświadczeniu w zakresie nauczania matematyki w Stanach Zjednoczonych. To ograniczenie wolałem w wielu miejscach przemilczeć.

Dawna matematyka a Nowa matematyka
Kształcenie a Wyuczanie
Sprawność a Rozumienie
Kształcenie użyteczne a Kształcenie przez rozrywkę
Elitaryzm a Egalitaryzm
Budowanie struktur a Rozwiązywanie zadań
Aksjomatyka a Konstrukcja
Sztuka a Nauka
Matematyka czysta a Matematyka stosowana

Zamierzam omówić tych dziewięć dychotomii. Oczywiście ich treści nie są rozłączne, toteż ich analizy będą na siebie zachodziły. W niektórych przypadkach treści te są tak do siebie zbliżone, że dychotomie będziemy omawiać łącznie. W toku dyskusji, jak już powiedziałem, pojawiać się będą konstruktywne wnioski dotyczące programów i metod nauczania.

Wydaje mi się ponadto, że zalecenia te są w gruncie rzeczy zgodne z zasadami, leżącymi u podstaw niektórych eksperymentalnych programów szczebla podstawowego i średniego /w oryginale - precollege/ w Stanach Zjednoczonych; np. program elementarny CSMP, program USMES, program szkół półśrednich / j u n i o r h i g h s c h o o l / BUMP i elementarny program eksperymentalny matematyki i przedmiotów przyrodniczych utworzonych pod auspicjami Open Court Publishing Company. Jednakowoż, znowu wedle mej staroświeckiej zasady mówienia o tym, na czym znam się najlepiej, pozwolę sobie czerpać przykłady nie tylko z nauczania matematyki na szczeblu podstawowym i średnim / p r e c o l l e g e /, ale także z jej nauczania na wyższych szczeblach, aż po zaawansowany uniwersytecki / g r a d u a t e /. Zachęcam, rzecz jasna, czytelnika do szukania przykładów na tym szczeblu nauczania matematyki, który jest mu najbliższy.

Formalnie biorąc, dychotomia jest podziałem pewnego zbioru S na dwa rozłączne podzbiory P, Q; zatem

$P \cup Q = S$ /suma zbiorów P i Q jest zbiorem S/,

$P \cap Q = \emptyset$ /przekrój zbiorów P i Q jest zbiorem pustym $\emptyset$ /.

/Na przykład zbiór S istot ludzkich jest sumą rozłączną podzbioru P istot żeńskich i podzbioru Q istot męskich/. Aby więc pokazać, że dychotomia jest fałszywa, trzeba pokazać, albo że $P \cup Q$ jest ściśle mniejsza od S, tj. że wymienione koncepcje nie wyczerpują możliwości /jest to np. oczywiste w przypadku pierwszej dychotomii z naszej listy/, albo że $P \cap Q$ jest niepuste, tj. że wymienione koncepcje nie wykluczają się. Będziemy dowodzić fałszywości dychotomii za pomocą tej właśnie drugiej procedury. Bowiem w przypadku nie wyczerpywania możliwości można zawsze znaleźć wyjście przez o k r e ś l e n i e S jako sumy zbiorów P i Q. Żadnym podobnym zabiegiem nie uda się odeprzeć zarzutu, że P i Q mają niepustą część wspólną.

1. DAWNA MATEMATYKA A NOWA MATEMATYKA

Powstaje bardzo silny ruch, szczególnie w Stanach Zjednoczonych, przeciw nowej matematyce. Ruch znalazł poparcie wielu różnych środowisk; wśród matematyków głośny był atak profesora Morrisa Kline'a na nową matematykę, w szczególności w jego książce "Why Johnny can't add" /St. Martin's Press, 1973/, a także ostra krytyka pewnych aspektów matematyki współczesnej dokonana np. przez profesora René Thoma w jego odczycie na Kongresie Nauczania Matematyki w Exeter i w jego artykule "Modern mathematics: An Educational and Philosophical error ?" /American Scientist 59 /1971/, str. 695-699/[4]/.

Atak przyszedł także z kręgów gorzej poinformowanych. Nowa matematyka stworzyła sobie wielu wrogów, gdyż spowodowała wprowadzenie nowego języka do rozumowań matematycznych, języka niezrozumiałego dla rodziców i władz. Wprowadzenie nowej matematyki szło też w parze z obniżeniem się sprawności rachunkowych u dzieci i

---

/4/ Zob. R.Thom: Matematyka "nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna ?, Wiadomości Matematyczne 18 /1974/, str. 113-129; Czy istnieje matematyka nowoczesna ?, tamże str. 130-142 /przypisek tłum./.

wielu obarczało reformę odpowiedzialnością za to zjawisko. Cytowano wyniki testów standaryzowanych, uzyskane przez National Assessment of Educational Progress i Educational Testing Service, co zaalarmowało społeczeństwo Stanów Zjednoczonych; ale wielu przeoczyło fakt, że obniżenie sprawności rachunkowej przyszło równocześnie z ogólnym obniżeniem wyników wykształcenia podstawowego. Na przykład spadek wyników testów umiejętności czytania ze zrozumieniem był równie sensacyjny, równie alarmujący.

Choć więc krytyka nowej matematyki jest w pełni uzasadniona, nie można przypisywać jej całej winy za niepowodzenia nauczania matematyki. Przegrana nowej matematyki nie jest też usprawiedliwieniem dla odwrotu ku dawnemu, co bardzo stanowczo wyraził Dieudonné w swej odpowiedzi na artykuł Thoma. W gruncie rzeczy nowa matematyka nigdy nie miała być w jakimkolwiek sensie konkurencyjna dla dawnej; jej rola miała polegać na wzbogaceniu dawnej matematyki i zastąpieniu pewnych jej archaicznych fragmentów materiałem lepiej odpowiadającym współczesnym poglądom i potrzebom. Nie można powiedzieć, by te cele nowej matematyki w praktyce zostały osiągnięte. Różnie to można tłumaczyć; byłoby też niewątpliwie dobrze rozważyć tę kwestię dokładnie i szczegółowo. Tu zwrócimy jedynie uwagę na to, że dawna matematyka i nowa matematyka mają bardzo istotną część wspólną. Powinniśmy brać to, co najlepsze z dawnej, to co najlepsze z nowej, dodając do ich sumy materiał, który nigdy nie stanowił integralnej części żadnej z nich; w szczególności mam na myśli konieczność kształcenia naszych uczniów w technikach rachunku przybliżonego, szacowania i użycia kalkulatorów kieszonkowych. Kalkulatory sprawiły, że tradycyjne algorytmy dzielenia i mnożenia stały się naprawdę bezużyteczne. Tego, że s ą takie algorytmy, uczniowie niewątpliwie powinni się dowiedzieć na lekcjach matematyki; lecz same algorytmy powinny być jedynie oparciem, a uczniowie muszą umieć obywać się bez nich.

Omówienie tego tematu byłoby niezupełne, gdyby nie wspomnieć o silnym ruchu, którego celem jest przywrócenie tego, co uważa się tu za najlepsze w dawnej matematyce. Ruch ten występuje pod hasłem "powrotu do podstaw" / b a c k t o b a s i c s /.

Bez względu na intencje[5], ruch ten opiera się na błędnych założeniach i jest niefortunny. Bowiem wiele z tego, co się w nim uważa za podstawowe, nie jest już podstawowe w żadnej ważnej dziedzinie, zarówno w matematyce, jak i w jej zastosowaniach do otaczającego nas świata; to zaś czego za podstawowe nie uznano, zawiera wiele rzeczy istotnych dla wykształconego obywatela. Ruch ten jest dobrym przykładem niebezpieczeństwa, o którym już spomnieliśmy: jego entuzjaści dążą usilnie do zastąpienia systemu, w którym dostrzega się pewne niepożądane cechy, przez jego zupełne przeciwieństwo. Doprawdy, nie zdarza się, by takie odrzucenie hurtem całego systemu było najlepszą strategią. Wierzę, że gdybyśmy zaprzestali myśleć w terminach dychotomii i zamiast tego zaczęli myśleć w terminach wzajemnego uzupełniania się, to ryzyko takich prymitywnie reakcyjnych tendencji, grających ważną rolę w rozważaniach dotyczących nauczania matematyki, zostałoby całkowicie wyeliminowane.

2. KSZTAŁCENIE A WYUCZANIE; SPRAWNOŚĆ A ROZUMIENIE

Te dwie rzekome dychotomie zostały scharakteryzowane w moim niedawnym przemówieniu na zebraniu pedagogów[6]. W tym przemówieniu skupiłem się jednak na pokazaniu, że kształcenie różni się od wyuczania i że sprawność jest czymś innym niż rozumienie. Teraz uświadamiam sobie, że równie konieczne jest przekonanie, iż kształcenie i wyuczanie oraz sprawność i rozumienie mają istotną część wspólną. W tamtym przemówieniu także próbowałem to pokazać, jednak był to aspekt, który nie wystąpił dość wyraźnie. Tymczasem mówi się obecnie, że nauczanie powinno nabrać większego znaczenia dla ucznia, a więc, że na przykład trzeba tworzyć na wszystkich

---

[5] W roku dwuchsetlecia Stanów Zjednoczonych nie można się dziwić temu, że pojawili się tradycjonaliści, którzy chcieliby przywrócić styl i treści nauczania matematyki według mody roku 1776.

[6] Some Problems of Contemporary Education, Papers on Educational Reform, vol. IV, Open Court Publishing Company /1974/, str. 77-104.

szczeblach pewien rodzaj "kształcenia dla sukcesu zawodowego" / c a r e r e d u c a t i o n /. Odwołanie się do nauczania w szkołach zawodowych nie może ukryć ubóstwa zawartości intelektualnej nauczania, jakie ciągle utrzymuje się w szkołach półśrednich / j u n i o r h i g h s c h o o l / i średnich / h i g h s c h o o l /, a nastawionego po prostu na przygotowanie uczniów do wyspecjalizowanych zawodów, podejmowanych natychmiast po ukończeniu szkoły. Gwałtownie zmieniająca się technologia - symptom naszych czasów - ogromnie utrudnia dokładne przewidywanie, jaka wiedza będzie potrzebna młodemu człowiekowi, aby jako dorosły mógł produktywnie i skutecznie wykonywać swoje zadania. Zatem gdy chodzi o przyszłe perspektywy zawodowe dla uczniów, system nauczania powinien wyposażyć ich w konieczną umiejętność przystosowania się i elastyczność, które umożliwią im adaptację do zmian, a w dalszym ciągu pozwolą na docenianie postępu i przyjmowanie go z nastawieniem pozytywnym, ufnym i optymistycznym. Wydaje się więc, że potrzeby współczesne wskazują na doniosłość kształcenia w sensie bardziej klasycznym, dającego uczniowi możliwość wnoszenia swego wkładu do systemu społecznego, w jakim przyjdzie mu żyć, i czerpania zeń korzyści dla siebie. Samo przyswojenie tradycyjnych umiejętności jest nieprzydatne nawet w najbardziej praktycznym sensie, gdyż najpewniej będą one bardzo szybko wychodziły z użycia. Natomiast zdolność do przyswojenia sobie nowej umiejętności będzie zawsze potrzebna, a zdolność ta zależy z kolei od tego, czy uczniowie nauczyli się naprawdę rozumieć przekazywaną im wiedzę, a nie tylko zapamiętywać niektóre jej aspekty i reprodukować je w formalnych tekstach.

Dla egzemplifikacji tych zasad rozważmy typowy sposób nauczania rachunku różniczkowego w uniwersytecie. Rachunek różniczkowy studenci odbierają jako zbiór umiejętności rachunkowych - można by nawet powiedzieć sztuczek - których się stopniowo uczą, a gdy są one dostatecznie wyćwiczone, uważają, że osiągnęli wymagany stopień opanowania tego przedmiotu. Werbalizm dominuje w prezentacji zastosowań rachunku różniczkowego, gdyż pokazuje się tylko przykłady przykrojone dla zilustrowania tego algorytmu rachunkowego, którego studenci aktualnie się uczą. Ujęcie naprawdę użyteczne musiałoby uwzględniać cały proces dobierania modelu

matematycznego dla zaatakowania problemu realnego, rozumowania w ramach tego modelu matematycznego, sprawdzania wyników rozumowania w sytuacji wyjściowej dla weryfikacji adekwatności modelu i modyfikacji modelu wobec braku pełnej zgodności teorii i praktyki. Wszystkie te aspekty prawdziwego zastosowania matematyki mają wartości kształcące w bardzo szerokim sensie i prowadzą do autentycznego rozumienia matematyki i jej znaczenia.

Będziemy pamiętać o tym przykładzie później, gdy przejdziemy do omawiania dalszych dychotomii. Tu jednak pożyteczne będzie zauważyć, że konieczność autentycznego kształcenia uczniów jest najpilniejsza na szczeblu elementarnym. Uczeń jest najbardziej wrażliwy na wielką naturalną atrakcyjność nauki i najpełniej uradowany swą umiejętnością zrozumienia, gdy jest jeszcze małym dzieckiem, nie zepsutym nierozważnymi próbami dorosłych uformowania go na ich własną modłę.

Na poziomie elementarnym dziecko ma piękną, pełną swobodną wyobraźnię, którą nauczyciel może podsycać i wzbogacać, dostarczając mu różnorodnych doświadczeń, wykorzystując naturalną ciekawość dziecka dla środowiska, w którym żyje. Dobry program dla tego poziomu powinien prezentować matematykę jako metodę organizowania tych doświadczeń. Tak więc skoordynowany program matematyki i nauk przyrodniczych wyłania się jako naturalna koncepcja dobrze zapowiadającego się eksperymentu pedagogicznego. Jednak bez wątpienia wymagałoby to pewnego poziomu rozumienia matematyki i nauk przyrodniczych u nauczyciela. Myśląc realistycznie, nie można na to liczyć, ze względu na stan wykształcenia i ogólnej kultury większości nauczycieli klas początkowych.

Być może, należałoby też dodać parę słów ostrzeżenia. Słyszy się ostatnio wiele o *zintegrowanym* programie matematyki i nauk przyrodniczych. Chcę jasno powiedzieć, że - przeciwnie - to, co bym popierał, można by określić jako *skoordynowany* program matematyki i nauk przyrodniczych. Różnica jest, według mnie, istotna. Program zintegrowany, tak jak ja go rozumiem i jaki zaleca wielu przedstawicieli nauk przyrodniczych, zacierałby różnicę między aktywnością matematyczną a badaniem przyrodniczym. Uważam, że zachowanie tej różnicy jest bardzo ważne. Innymi słowy, uczeń musi wiedzieć, kiedy zajmuje się

matematycznego dla zaatakowania problemu realnego, rozumowania w ramach tego modelu matematycznego, sprawdzania wyników rozumowania w sytuacji wyjściowej dla weryfikacji adekwatności modelu i modyfikacji modelu wobec braku pełnej zgodności teorii i praktyki. Wszystkie te aspekty prawdziwego zastosowania matematyki mają wartości kształcące w bardzo szerokim sensie i prowadzą do autentycznego rozumienia matematyki i jej znaczenia.

Będziemy pamiętać o tym przykładzie później, gdy przejdziemy do omawiania dalszych dychotomii. Tu jednak pożyteczne będzie zauważyć, że konieczność autentycznego kształcenia uczniów jest najpilniejsza na szczeblu elementarnym. Uczeń jest najbardziej wrażliwy na wielką naturalną atrakcyjność nauki i najpełniej uradowany swą umiejętnością zrozumienia, gdy jest jeszcze małym dzieckiem, nie zepsutym nierozważnymi próbami dorosłych uformowania go na ich własną modłę.

Na poziomie elementarnym dziecko ma piękną, pełną swobodną wyobraźnię, którą nauczyciel może podsycać i wzbogacać, dostarczając mu różnorodnych doświadczeń, wykorzystując naturalną ciekawość dziecka dla środowiska, w którym żyje. Dobry program dla tego poziomu powinien prezentować matematykę jako metodę organizowania tych doświadczeń. Tak więc skoordynowany program matematyki i nauk przyrodniczych wyłania się jako naturalna koncepcja dobrze zapowiadającego się eksperymentu pedagogicznego. Jednak bez wątpienia wymagałoby to pewnego poziomu rozumienia matematyki i nauk przyrodniczych u nauczyciela. Myśląc realistycznie, nie można na to liczyć, ze względu na stan wykształcenia i ogólnej kultury większości nauczycieli klas początkowych.

Być może, należałoby też dodać parę słów ostrzeżenia. Słyszy się ostatnio wiele o *zintegrowanym* programie matematyki i nauk przyrodniczych. Chcę jasno powiedzieć, że - przeciwnie - to, co bym popierał, można by określić jako *skoordynowany* program matematyki i nauk przyrodniczych. Różnica jest, według mnie, istotna. Program zintegrowany, tak jak ja go rozumiem i jaki zaleca wielu przedstawicieli nauk przyrodniczych, zacierałby różnicę między aktywnością matematyczną a badaniem przyrodniczym. Uważam, że zachowanie tej różnicy jest bardzo ważne. Innymi słowy, uczeń musi wiedzieć, kiedy zajmuje się

matematyką. Powinien rozumieć, że matematyka może być sztuką samą w sobie, a także że może być użyta w służbie nauki. Powinien docenić to, że są takie aktywności matematyczne - na przykład dowodzenie twierdzeń, które nie mają odpowiedników w żadnej innej działalności człowieka. Ale w tym miejscu zahaczam już o inne fałszywe dychotomie !

Podsumowuję ten paragraf stwierdzeniem, że w nowoczesnym świecie wyuczanie i sprawność stają się produktami ubocznymi dobrego kształcenia i prawdziwego rozumienia. Próba wyrobienia sprawności czy wyuczenia czegoś naprawdę użytecznego byłaby działaniem daremnym, gdyby nie towarzyszyło jej autentyczne kształcenie całej osobowości ucznia. Tak więc kształcenie, które zawsze było prawdziwym zadaniem szkoły, można motywować nie tylko prawem każdego członka oświeconego społeczeństwa do autentycznego wykształcenia, ale także powodami najzupełniej praktycznymi: jest to najlepsza droga przygotowania go do udziału w działalności społeczeństwa i ... zarabiania tym na życie !

3. KSZTAŁCENIE UŻYTECZNE A KSZTAŁCENIE PRZEZ ZABAWĘ

Zacznę od wyjaśnienia, jak rozumiem kształcenie przez zabawę / d i v e r t i n g e d u c a t i o n , f u n e d u c a t i o n /. W odniesieniu do poziomu elementarnego mam na myśli problemy w formie opowiadań, tego typu jak występujące licznie w cytowanym już programie Open Court. W opowiadaniach tych przedstawiana jest sytuacja prawie na pewno nierealna. Tym niemniej sytuacja ta jest interesująca dla dziecka, bawi je i cieszy, kusi do zastanowienia się nad postawionymi w opowiadaniu problemami. Na poziomie bardziej zaawansowanym można tu użyć jako przykładów problemów postawionych przez Lewisa Carrolla czy Calibana oraz takich, jakie często można znaleźć w brytyjskich gazetach niedzielnych.

Chcę jednak rozszerzyć jeszcze pojęcie kształcenia przez zabawę. A więc mam na myśli wykorzystywanie nie tylko fikcyjnych sytuacji ilustrujących matematykę, ale także sytuacji zaczerpniętych z samej matematyki, mogących pobudzać i cieszyć ucznia, wprowadzać umysł w stan intelektualnego zaciekawienia domagającego się

zaspokojenia. Nie jest to więc ten sam kontrast co między matematyką czystą a stosowaną.

Pozorną dychotomię stanowi tu przekonanie, że uwaga dziecka powinna być kierowana wyłącznie na użyteczne umiejętności i techniki oraz użyteczne zastosowania przyswojonej wiedzy, i przekonanie, że naturalne zamiłowanie dziecka do fantazji i jego naturalna, pełna swobody wyobraźnia powinny być wykorzystane dla skierowania go w rejony myślenia nie odnoszące się bezpośrednio do konkretnego doświadczenia. Dychotomia ta jest fałszywa, jasne jest bowiem, że bez względu na źródło problemu, jeżeli zawładnie on rzeczywiście umysłem dziecka, dostarczy mu prawdziwie kształcącego doświadczenia. A doświadczenie to może być następnie wykorzystane dla wzbogacenia wiedzy dziecka o otaczającym świecie. Problemy w formie opowiadań zawarte w programie Open Court są, według mnie, znakomite i one same wystarczą, by postawić ten program wyżej od niemal wszystkich innych. Ale pokażę, na nieco innym przykładzie, że kształcenie użyteczne i kształcenie przez zabawę nie są pojęciami wzajemnie się wykluczającymi. Przykład ten zresztą także odzwierciedla pewną cechę programu O p e n C o u r t.

Jedną z najpoważniejszych dziedzin matematyki stosowanej, ze względu na jej wszechobecność, jest teoria prawdopodobieństwa i statystyka. Poprzez te właśnie dwie dyscypliny matematyczne potrafimy bowiem inteligentnie patrzeć na to, co nas otacza, i podejmować racjonalne decyzje. Jak powinno się uczyć rachunku prawdopodobieństwa i statystyki na poziomie elementarnym ? Sądzę, że oczywistą drogą są gry. Naturalne zainteresowanie dziecka grami, a nawet jego naturalne pragnienie wygranej, mogą być wykorzystane w celu wywołania chęci zrozumienia elementarnych praw prawdopodobieństwa i statystyki. Poprzez gry wyrobione zostaną więc umiejętności i wzmocniona intelektualna ciekawość. Te umiejętności będą następnie stosowane do sytuacji, gdzie wiedza jest niepełna, jakich wiele w otaczającym nas świecie. Są oczywiste racje wyboru takiej drogi wpajania rozumienia omawianych dziedzin matematyki; racje te są tak oczywiste, że zbędne byłoby mówić o nich tutaj. Ale warto chyba podkreślić, że argumentem na rzecz tej drogi, nadrzędnym względem już sformułowa-

nych, explicite czy implicite, jest fakt, że w końcu chcemy stosować statystykę do sytuacji, w których występuje eksperyment przyrodniczy o nie znanym wyniku i życzylibyśmy sobie sprawdzenia wartości naszej metody w warunkach kontrolnych, takich jakich dostarczają właśnie gry.

U podstaw tej dychotomii jest też nieco inne fałszywe rozumowanie, które - zgodnie z moim doświadczeniem - odnosi się szczególnie do Stanów Zjednoczonych, choć jest bardzo prawdopodobne, że można je spotkać także w niektórych krajach socjalistycznych. Mam na myśli purytańskie przekonanie, że najwartościowszej aktywności człowieka nie powinny towarzyszyć doznania intensywnej przyjemności. Prowadzi ono do poglądu, że nic prawdziwie doniosłego nie może zachodzić w procesie kształcenia, ani też w jakiejkolwiek innej działalności, jeżeli zaangażowane w niej osoby znajdują w tym dużą przyjemność. Smutne jest , że przekonanie to kształtuje nasz stosunek do zarabiania na życie. Ale podwójnie smutne byłoby wzorowanie na nim naszego podejścia do kształcenia. Ludzie światli uznają, że kształcenie elementarne często powi..no być zabawne. Panuje jednak nieszczęsne przekonanie, że w miarę przechodzenia z klasy do klasy uczeń powinien coraz poważniej myśleć n a l e k c j i, pozwalając sobie na odprężenie jedynie na zajęciach pozalekcyjnych. W efekcie dzieje się to, czego powinniśmy unikać i czego wielu nauczycieli chciałoby uniknąć: izolacja zajęć na lekcji od całej reszty życia. A skutki dla późniejszego życia i pracy zawodowej ucznia są naprawdę niedobre: to fałszywa dychotomia pracy i zabawy oraz instytucjonalizacja tej dychotomii.

W dużej części nauczanie powinno być zabawne[7]; na niższym poziomie powinno ono być bardzo przyjemne. A ponieważ przyjemność w nauczaniu nie kłóci się bynajmniej z jego późniejszą użytecznością, jest to nawet konieczne, jeśli nauczanie ma wywierać po-

---

[7] Postaram się pokazać, że można znaleźć wiele zabawy, wiele przyjemności, badając na lekcji sytuacje życiowe. Oczywiście ! Byłoby absurdem twierdzić, że zabawę można znaleźć tylko w sytuacjach fikcyjnych; jest to jeszcze jedna fałszywa dychotomia.

zytywny wpływ na dalsze życie obywatela. Na pewno nie chcielibyśmy, by nauczanie matematyki odciągało ucznia od zainteresowania dla wszystkiego, co ważne poza matematyką. Jednak skojarzenie matematyki z przyjemnością, ze swobodną grą wyobraźni i fantazją, może dać jedynie dobre wyniki.

4. ELITARYZM A EGALITARYZM

Stany Zjednoczone są państwem słusznie szczycącym się tym, że zawsze starało się zapewnić równość szans dla swych obywateli, bez względu na ich pochodzenie społeczne. Chodzi przy tym raczej o pozytywne usiłowania niż osiągnięcia, gdyż wiadomo dobrze, że szanse wykształcenia są dla obywateli amerykańskich bardzo nierówne. Tym niemniej piękna jest zasada, że każde dziecko powinno mieć tę samą szansę zdobycia dobrego wykształcenia. Zasada ta prowadzi jednak w praktyce do absurdu, kiedy przyjmuje się, że kształcenie powinno być tak zorganizowane, by wykluczyć korzyści pochodzące z uprzywilejowanej przeszłości lub wrodzonych cech ucznia. Uważa się nawet niekiedy, że takie nauczanie, gdzie niektórzy korzystają wyraźnie więcej niż inni, jest edukacją elitarną ! Wprowadza się też do programów lekcje o wątpliwej wartości kształcącej, mające stworzyć uczniom upośledzonym kulturalnie czy materialnie taką samą szansę uzyskania dobrych ocen. Nie da się wyeliminować podstawowych nierówności udawaniem, że one nie istnieją.

Trzeba powiedzieć jasno, że kształcenie przez samą swą naturę stwarza zróżnicowania; jeżeli ich nie stwarza - nie jest skuteczne. Nawet gdyby udało się jakoś wyeliminować nierówności społeczno-ekonomiczne, zawsze będzie tak, że jeden uczeń będzie bardziej korzystał z nauczania niż inny. Tego prostego faktu nie można ukryć żadnym zabiegiem, dyktowanym najlepszymi choćby intencjami. Jeżeli kształcenie jest skuteczne, to korzyści z niego wynosi możliwie wielu uczniów, ale korzyści te nie są dla poszczególnych uczniów takie same. Jeżeli ponadto uczeń rozpoczyna naukę z obciążeniem spowodowanym pochodzeniem, to należy oczekiwać, że tym mniejsze korzyści będzie on wynosił z tego nauczania.

Jako odpowiedzialni obywatele musimy zawsze starać się wyeliminować, lub przynajmniej wciąż redukować różnice w społeczno-

ekonomicznej sytuacji naszych uczniów. Ale nawet w całkowicie egalitarnym społeczeństwie nie osiągniemy jednakowego wyzyskiwania szansy kształcenia. Tak więc możemy i powinniśmy być motywowani zasadą egalitaryzmu w tworzeniu całego systemu kształcenia; lecz z pewnością zasada ta nie usprawiedliwia zupełnego wyjałowienia programu. Należy oczekiwać i życzliwie przyjmować wyłanianie przez system kształcenia uczniów, którzy dzięki swej zdolności do korzystania z nauki zasługują na to, by stać się członkami pewnej elity. Przynależność do tej elity nie powinna dawać żadnych przywilejów społecznych; ale z pewnością nakłada obowiązki i odpowiedzialność, które - miejmy nadzieję - ci wybitni obywatele chętnie podejmą. Wśród najważniejszych z tych obowiązków jest zapewnienie szansy możliwie najlepszego wykształcenia upośledzonym.

5. BUDOWANIE STRUKTUR A ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ; AKSJOMATYKA A KONSTRUKCJA

Te dwie fałszywe antytezy są ściśle z sobą związane. Oskarżono "nową matematykę" o to, że zbytnio akcentuje rolę struktury matematycznej i zaniedbuje kształcenie dziecka w umiejętności rozwiązywania zadań. Jest bardzo możliwe, że jest to słuszna krytyka sporej części praktycznej realizacji szkolnej tego, co występowało pod banderą nowej matematyki; lecz jeżeli tak jest w istocie, to powodem jest niezrozumienie celów ruchu reformy nauczania matematyki, a z pewnością nie odpowiada intencjom twórców filozofii tego ruchu.

Uczący się matematyki musi na pewno rozwiązywać zadania. Są to jednak z założenia zadania, których rozwiązania wymagają użycia matematyki; a zatem matematykę trzeba dobrze rozumieć, jeżeli ma ona być skutecznie zastosowana. Wszyscy zgadzamy się z tym, że konfrontacja z zadaniem i próba rozwiązania go jest dla ucznia ważnym i kształcącym doświadczeniem. Ale nie pozwalając mu na użycie dostępnej teorii przy poszukiwaniu rozwiązania, stawiamy go w bardzo niekorzystnej sytuacji i ogromnie zaniejszamy prawdopodobieństwo znalezienia dobrego rozwiązania w rozsądnym czasie. Tak jak koncentrowanie się wyłącznie na budowaniu struktur mate-

matycznych jest skrzywieniem podstawowych zasad nowej matematyki, tak samo koncentrowanie się wyłącznie na rozwiązywaniu zadań jest skrzywieniem podstawowych zasad problemowej metody nauczania. Problemy rozwiązuje się najskuteczniej przez zastosowanie właściwej teorii; a zamiłowanie dla teorii najłatwiej rozbudzić z chęci rozwiązywania interesujących problemów. Tak więc aktywność budowania struktur i rozwiązywania zadań w dużym stopniu uzupełniają się wzajemnie.

W samej matematyce te dwie strony medalu noszą nazwy m e t o d y a k s j o m a t y c z n e j i m e t o d y k o n s t r u k c y j n e j . Wrogowie metody aksjomatycznej przedstawiają ją jako nieumotywowane i bezduszne tworzenie aksjomatów dla abstrakcyjnej teorii, bez jakiegokolwiek odwołania się do możliwości jej zastosowań. Na przykład profesor Feynman, laureat nagrody Nobla w fizyce, w swoich ekscytujących wykładach w Cornell University w roku 1964, sportretował matematyka jako tego, który zaczyna od sztywno, ale dowolnie wybranego zbioru aksjomatów, aby następnie cedzić z zimną krwią wszystkie ich konsekwencje. Skontrastował tę odhumanizowaną działalność z działalnością fizyka, który lekko przemieszcza się z jednego kontekstu w inny subtelnymi skokami wyobraźni i nieustannie penetruje Nieznane jasnymi, podniecającymi snopami światła ! W gruncie rzeczy ten opis naturalnego m o d u s o p e r a n d i fizyka bardzo dobrze pasuje do m o d u s o p e r a n d i dobrego matematyka. Jednak przede wszystkim interesuje nas tutaj fałszywa dychotomia między metodą aksjomatyczną w matematyce a metodą konstrukcyjną, gdzie rzeczywiście wykonuje się "konkretne" operacje na "konkretnych" obiektach, wyciągając na tej drodze wnioski.

Niewątpliwie jest prawdą, że są takie dwie metody. Jest też prawdą, że istnieje kierunek filozoficzny - intuicjonizm, który utrzymuje, że tylko konstrukcyjne dowody w matematyce mają rzeczywistą wartość. Ten punkt widzenia przyjmuje jednak tylko bardzo niewielu matematyków; przy tym ten punkt widzenia nie wyklucza całkowicie aksjomatyki, odrzuca jedynie wartość dowodów niewprost. Metoda aksjomatyczna została zastosowana przez Euklidesa dla ustalenia własności elementarnych figur geometrycznych, co bez wątpienia stanowiło ogromny krok naprzód myśli ludzkiej. Niestety, w

dzisiejszym nauczaniu geometrii zdarza się często, że dowodzone twierdzenia są oczywiste i mało interesujące, a dowody wyraźnie trącą pedanterią. Gdyby jednak dowody geometryczne służyły dokonywaniu odkryć, do czego służyć mogą i powinny, to ten sprzeciw wobec aksjomatyki z pewnością by zaniknął.

Twórcą nowoczesnej metody aksjomatycznej w matematyce był Dawid Hilbert. U Hilberta znajdujemy po raz pierwszy jasno sformułowany pogląd, że system aksjomatyczny nie zobowiązuje do żadnego stanowiska ontologicznego. Aksjomaty są postulatami dotyczącymi obiektów niezdefiniowanych, a także nieoczywistymi prawdami o obiektach realnych.

Hilbert stosował metodę aksjomatyczną z ogromnym powodzeniem. Jednym z jego najwcześniejszych triumfów było rozwiązanie problemu skończonej bazy dla układu niezmienników form algebraicznych. Niemiecki matematyki Gordan udowodnił metodą konstrukcyjną, że istnieje skończona baza dla form binarnych. W roku 1888 Hilbert znalazł nowy, nie rachunkowy dowód twierdzenia Gordana, a we wrześniu tegoż roku ogłosił pełne rozwiązanie. Atakując ten bardzo "konkretny" problem matematyczny, Hilbert w istocie wynalazł metodę aksjomatyczną. Hilbert nie konstruował bowiem skończonej bazy dla układu niezmienników, ale udowodnił, że układ niezmienników musi mieć skończoną bazę. Reakcja współczesnych Hilbertowi jest bardzo interesująca w świetle przesądów, w jakie obfituje teraźniejszość. Lindemann, jeden z wielkich twórców podstaw współczesnej teorii liczb, scharakteryzował ten dowód jako "unheimlich" /niesamowity/. Sam Gordan powiedział "Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie" /to nie jest matematyka, to teologia/. Kronecker, którego można uważać za prekursora intuicjonizmu i który był najbardziej zdecydowanym oponentem Cantora w zakresie stworzonej przez niego teorii mnogości, z miejsca odrzucił dowód Hilberta. Interesujące jest, że w roku 1890 Hilbert znalazł metodę konstrukcji bazy skończonej, której istnienie wcześniej udowodnił. Napisał jednak: "odrzucenie dowodów istnienia ... jest równoznaczne z całkowitym wyrzeczeniem się matematyki". Metoda aksjomatyczna w zastosowaniu do rozwiązywania problemów jest bardzo cenna i użyteczna. Samo budowanie struktury matematycznej, nie umotywowane problemem, do którego ta struktura mogłaby znaleźć zastosowanie, nie da się ob-

ronić jako wartościowa działalność matematyczna; jest karykaturą metody aksjomatycznej.

Niedawno René Thom, wielki matematyk francuski, stworzył nową teorię matematyczną, zwaną kobordyzmem i otrzymał medal Fieldsa za to odkrycie. Nowy pomysł Thoma służy unifikacji i systematyzacji znacznej części topologii, a także do rozwiązywania ważnych problemów. Olbrzymia ilość literatury, jaka powstała po pionierskiej pracy Thoma, jest dostatecznym świadectwem jej doniosłości.

Dla wyprowadzenia z błędu tych, którzy sądzą, że budowanie struktur i rozumowanie aksjomatyczne - to po prostu rezerwat dla samowystarczalnego plemienia "czystych" matematyków, wystarczy zacytować uwagi Richarda Couranta, jednego z największych specjalistów matematyki stosowanej naszego stulecia, w jego wystąpieniu z okazji stulecia urodzin Hilberta. W roku 1962 Courant powiedział: "Żywa matematyka opiera się na fluktuacji między przeciwstawnymi siłami intuicji a logiki, idywidualnego charakteru konkretnych problemów i ogólności dalekosiężnych abstrakcji. My sami musimy nie dopuścić do tego, by jej rozwój został siłą skierowany ku jednemu z biegunów tej życiodajnej antytezy. Matematyka musi być pielęgnowana i umacniania jako jednolita i żywotna odnoga szerokiej rzeki nauki. Nie wolno pozwolić jej wyciekać w piasek. Hilbert pokazał nam ..., że nie ma przepaści między matematyką czystą a stosowaną, i że między matematyką a naukami przyrodniczymi można stworzyć owocną wspólnotę".

Metoda aksjomatyczna wyrobiła sobie pozyję potężnego narzędzia rozumowania abstrakcyjnego. Jeżeli uczniowie mają poznać to narzędzie, jest bardzo ważne, żeby i nauczyciele i uczniowie rozumieli rolę struktury w matematyce.

Jest rzeczą niepokojącą, że w okresie nowej fali reform programów matematyki tak silnie akcentuje się rozwiązywanie zadań, jakby było ono konkurencyjne w stosunku do rozwijania samej matematyki. Nie tylko nie jest ono bynajmniej konkurencyjne, ale jest istotnym czynnikiem sprzyjającym rozumieniu matematyki i może być efektywne tylko w kontekście bogatego kształcenia matematycznego. Pragnienie rozwiązania problemu jest silną motywacją dla tworzenia matematyki; tak samo w procesie nauczania jest ono motywacją dla rozumienia i przyswajania matematyki. Absurdem jest próbować

rozwiązać problemy, dla których właściwe jest zastosowanie środków matematycznych, w nieświadomości odpowiednich teorii matematycznych, a więc z góry skazując się na przegraną.

Morris Kline w swej prowokującej książce "Why Johnny can't add" /Dlaczego Johnny nie umie dodawać/ zaatakował posługiwanie się metodą aksjomatyczną jako podstawę elementarnego nauczania matematyki. Poglądy Kline'a są bezdyskusyjne poza jednym: rzekomym wykryciem przez niego głównej przyczyny naszych niepowodzeń w kształceniu matematycznym dzieci. Metoda aksjomatyczna powinna występować jawnie dopiero w późniejszym okresie procesu kształcenia. Ale badanie prawdziwej struktury systemu liczbowego, którym się posługujemy, jest z pewnością odpowiednie dla szczebla elementarnego. Pod warunkiem jednak, że badanie to nie będzie celem samym w sobie, ale drogą do lepszego stosowania matematyki jako narzędzia zrozumienia otaczającego nas świata. W programach, na które już się powoływałem, można znaleźć troskę o sprawności rachunkowe, połączoną ze świadomością faktu, że system liczbowy ma pewne własności strukturalne mogące znacznie uprościć rachunek, a także umożliwić uczniowi lepsze zrozumienie naturalnego rozwoju samej matematyki.

Innym przykładem ważnego pojęcia strukturalnego jest pojęcie liniowości. Głupotą byłoby spędzać godziny, dni czy tygodnie na rozwiązywaniu prostych równań. Ale ogromną wartość kształcącą ma właściwe zrozumienie zalet modelu liniowego. Celem każdego dobrego programu nauczania musi być kształcenie przyszłych obywateli niezależnie od ich specjalności. Kształcenie to musi zawierać zrozumienie istoty metody matematycznej. Wyrzeczenie się badania struktur matematycznych jako takich - nieuniknione, gdy chodzi o większość uczniów - nie jest równoznaczne niedocenianiu struktur w rozumowaniach odnoszących się do świata rzeczywistego.

6. SZTUKA A NAUKA: MATEMATYKA CZYSTA A MATEMATYKA STOSOWANA

Kontrast między sztuką a nauką często odczuwa się jako podstawową cechę kształcenia i - w gruncie rzeczy - całego życia jednostki. Zazwyczaj nauka jest w odwrocie wobec ataku tych,

którzy utrzymują, że uczeni objawiają brak zainteresowania, a nawet pogardę, dla dobra rasy ludzkiej i uprawiają swoją naukę z pełnym lekceważeniem jej społecznych, politycznych i moralnych konsekwencji. Identyfikując naukę z techniką, krytycy zwracają uwagę na rozszerzające się zanieczyszczenie atmosfery i mnożenie coraz bardziej wymyślnych broni, traktując to jako świadectwo braku ludzkich uczuć u uczonych i wnioskując stąd o odhumanizowaniu nauczania przedmiotów przyrodniczych. Wpływ tej propagandy przeciw nauce znalazł już swój wyraz w obieraniu przez studentów naszych uniwersytetów wykładów z handlu i nauk społecznych kosztem wykładów z nauk przyrodniczych, mających aktualnie zaniżoną frekwencję. Zdolni młodzi ludzie odwracają się nawet od studiów uniwersyteckich w ogóle, uważając uniwersytety za cząstkę systemu obojętnego dla zagadnień moralnych.

Jak na ironię, ten atak na nauki przyrodnicze pojawił się równocześnie z atakiem na nadmierną "czystość", abstrakcyjny charakter matematyki i jej lekceważenie dla zastosowań. Oczywiście, ten drugi atak nie pochodzi od tych samych osób co pierwszy. Ale fakt, że oba zjawiły się równocześnie, ilustruje ważną zasadę, że nigdy nie należy starać się zadowolić wszystkich ludzi na raz.

Wkraczanie w rozległe zagadnienia społeczne powstałe w wyniku ataku na naukę nie jest celem tego artykułu[8]. Ograniczę się jedynie do pokazania dwu rzeczy: po pierwsze, że nie ma prawdziwej dychotomii między matematyką czystą a stosowaną, i po drugie, że stosowanie matematyki do badania otaczającego nas świata angażuje sporo "sztuki matematycznej".

Co do pierwszej tezy, chciałbym zacząć od przedyskutowania kwestii, co należy rozumieć pod nazwą "matematyka stosowana". Według mnie byłoby lepiej, gdyby nazwa ta była używana tylko w dosłownym sensie, a więc na oznaczenie tej matematyki, która została zastosowana do problemów pozamatematycznych i gdybyśmy używali terminów "matematyka stosowalna" i "zastosowania matema-

---

[8] Interesujące omówienie tych zagadnień wraz z wyczerpującą bibliografią można znaleźć w artykule "The soluble in pawn to the possible" R.Williamsa, Encounter, styczeń, 1974.

tyki" tam gdzie są one w oczywisty sposób najwłaściwsze. Oczywiście, znaczenia terminu "matematyka stosowana" nie należy ograniczać do tej matematyki, która została stworzona z perspektywą jej zastosowań, a tym bardziej nie należy ograniczać do tych działów matematyki, które występują w tradycyjnych wykładach matematyki stosowanej. Dzisiaj, gdy matematyka jest stosowana w tak wielu nowych dziedzinach, w szczególności w naukach społecznych, jest oczywiście niemożliwe przewidzieć naprzód, jakie działy matematyki okażą się użyteczne w zastosowaniach.

Na przykład teoria kodów autokorekcyjnych, mająca ogromne znaczenie w teorii automatów i informatyce, jest oparta na pewnych badaniach dodatnio określonych form kwadratowych nad ciałem dwuelementowym i do jej twierdzeń zalicza się twierdzenie, że każda funkcja określona na ciele skończonym o wartościach w tym ciele jest funkcją wielomianową. Z pewnością gdy rozwijała się teoria form kwadratowych i teoria ciał skończonych, nikt nie myślał o ich zastosowaniach. Zostały one obecnie zaadoptowane przez matematykę stosowaną, gdyż odkryto ich zastosowania.

Tak więc jest jasne, że rozróżnienie między matematyką czystą a stosowaną jest przypadkowe. O wiele lepiej jest mówić po prostu o matematyce, a tam, gdzie jest to właściwe, o zastosowaniach matematyki. Ponieważ cała matematyka potencjalnie nadaje się do stosowania, musimy odrzucić herezję głoszącą, że są pewne działy matematyki, np. algebra, geometria, topologia, teoria liczb, które przyszły matematyk pracujący w zastosowaniach będzie mógł spokojnie zignorować. Trzeba też odrzucić pogląd, że na studiach uniwersyteckich, czy nawet wcześniej, jak mogliby się domagać nierozważni, należy ściśle rozgraniczyć tych studentów, którzy zajmą się stosowaniem matematyki jako narzędzia i tych którzy studiują ją dla niej samej. Wszyscy studenci matematyki powinni uczyć się matematyki i powinni też uczyć się nieco metod jej stosowania. Choć bowiem matematyk zajmujący się matematyką czystą różni się od tego, który pracuje w zastosowaniach, pod względem charakterystycznych motywacji, ich metodologie znacznie na siebie zachodzą. W obydwu dziedzinach występuje bardzo silny komponent eksperymentalny, jakie spotykamy w wielu podręcznikach. Obie dysponują przyzwoitym wyborem problemów nadających się do zaatakowania środkami matematycznymi. Problemy te mogą leżeć w samej matema-

tyce lub poza nią; a to, czy dana jednostka znajdzie inspirację dla swojej matematyki w matematyce czy poza nią, stanowi najdobitniejszy wyróżnik typu jej zainteresowań; matematyką czystą czy stosowaną.

Analizując schemat stosowania matematyki, na przykład schemat wypracowany przez Henry Pollaka, znajdujemy kluczowe momenty, gdzie sztuka gra decydującą rolę. Zaliczymy tu, na przykład, już wspomniane zagadnienie wyboru odpowiedniego problemu. Jest to bez wątpienia sztuka, gdyż nie jest możliwa algorytmizacja tego wyboru. Następnym przykładem jest sprawa wyboru odpowiedniego modelu matematycznego. Tu znowu kryteria są złożone. Muszą obejmować zakres kompetencji matematyka, jego ocenę stopnia dokładności, z jaką model ma przybliżać sytuację, do której odnosi się problem i wiele innych ograniczeń, takich jak oczekiwany koszt w terminach czasu, wysiłku, czy nawet pieniędzy, zebrania niezbędnych danych numerycznych dla realizacji i sprawdzenia rozwiązania. Jeżeli uda mu się znaleźć rozwiązanie przez rozumowanie w modelu i wykonanie stosowanych rachunków, a następnie, sprawdzając rozwiązanie w pierwotnej sytuacji niematematycznej stwierdzi, że zgodność nie jest zadowalająca, to staje wobec problemu modyfikacji modelu matematycznego albo zebrania dodatkowych danych. Tu znowu decydująca jest swobodna ocena, gdyż żadne systematyczne postępowanie algorytmiczne nie będzie adekwatne.

Jest więc wiele przykładów sztuki w matematyce stosowanej. Widać też, że wyrażamy się całkowicie poprawnie, gdy mówimy o matematyce-nauce i o sztuce matematyki stosowanej. Matematyka zawiera w sobie trzon systematycznej wiedzy, systematyczne rozumowania i pojęcia, i w tym zakresie jest nauką. Natomiast matematyka stosowana wymaga dokonywania wyborów na podstawie doświadczenia, intuicji, a nawet inspiracji - ma więc jakościowe cechy sztuki. Tak więc w matematyce można znaleźć zarówno naukę jak i sztukę, a nauka jak i sztuka jest zarówno w matematyce czystej j[a] i stosowanej. Jednym uderzeniem zburzyliśmy obie dychotomie nara[z]

Nauki przyrodnicze żywią się matematyką; jest to, według mn[ie] podstawowe kryterium dojrzałości nauki. Matematyka jest zdolna d[o] życia bez nauk przyrodniczych, ale byłaby to zła praktyka dydak-

tyczna; nauki przyrodnicze bez matematyki są nawet niezdolne do życia[9]. Dobry program nauczania musi w pełni uwzględniać te dwa fakty. Nauczanie przyrody powinno bowiem kłaść nacisk na inteligentną obserwację; i trzeba dostarczyć wielu okazji dla przekształcenia zwykłego patrzenia, zwykłego uświadomienia sobie elementów składowych otoczenia - w źródło spekulacji i rozumnej ciekawości. Włączenie do nauki wyników inteligentnej obserwacji i eksperymentu wymaga zaangażowania matematyki. Feynman powiedział, że "przyroda mówi do nas językiem matematyki". Peter Medawar, laureat nagrody Nobla z biologii, określił nauki przyrodnicze jako "the art of the soluble". Rozwiązujemy problemy stosując rozumowanie symboliczne i to jest przedmiot matematyki.

WNIOSKI

Artykuł ten został poświęcony zburzeniu pewnych fałszywych dychotomii. Dominacja tych fałszywych dychotomii jest przeszkodą dla jasnego spojrzenia na problemy nauczania matematyki. W przypadku tych jałowych i mylących antytez, zarówno omówionych w tym artykule jak i w wielu innych, potrzebujemy obydwu członów tych sztucznych przeciwstawień i możemy je mieć. Nie uzyskamy obydwu, a nawet ryzykujemy nieuzyskanie żadnego z nich, jeżeli damy posłuch grupom o zainteresowaniach merkantylnych, reklamującym swoje towary i rozgłaszającym o swych wypieszczonych panaceach. Dobre nauczanie charakteryzuje się różnorodnością właściwości oraz cech jakościowych; jego powodzenie zależy od wielostronnego podejścia, a zatem od współpracy wszystkich zainteresowanych nim stron: specjalistów od programu, pedagogów, psychologów, rodziców, administracji. Pochwalam szczególnie program O p e n C o u r t za wprowadzenie do praktyki tej zasady i żywię nadzieję, że inni potraktują go jako godny naśladowania wzór.

Z oryginału angielskiego przełożył Stefan Turnau

---

[9] Nie myślę tu o naukach przyrodniczych bez matematyków ! Twierdzenie, że bez nich są niezdolne do życia, byłoby bardziej sporne.

EDUCATION IN MATHEMATICS AND SCIENCE TODAY: THE SPREAD OF FALSE DICHOTOMIES

Summary

In this article /being one of the main lectures at the Third International Congress on Mathematical Education, 1976/ some errors in mathematics education are analysed using the schema of "false dichotomy", i.e. two systems, principles, etc. wrongly put in opposition to each other. The author argues that while the two concepts under scrutiny are different, they have an essential overlap, and that, when properly understood and applied, they can in fact mutually reinforce each other. The dichotomies analysed are the following: Old Mathematics vs. New Mathematics, Education vs. Training, Skill vs. Understanding, Useful Education vs. Diverting Education, Elitism vs. Egalitarianism, Structure Building vs. Problem Solving, Axiomatics vs. Constructiveness, Art vs. Science, Pure Mathematics vs. Applied Mathematics.