∫dmptm 1982

DYDAKTYKA MATEMATYKI 1 (1981)

ZBIGNIEW SEMADENI (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Reprezentacje enaktywne i reprezentacje ikoniczne w sensie Brunera na przykładzie reprezentacji pojęć mnogościowych

Jednym z najbardziej rzucających się w oczy zjawisk związanych z reformami nauczania matematyki w ostatnim dziesięcioleciu są doniosłe przeobrażenia dotyczące środków upoglądowionego przedstawiania abstrakcyjnych pojęć matematycznych.

Sztandarowym przykładem jest tu diagram Venna - pętla symbolizująca zbiór - środek dydaktyczny, który początkowo zrobił olśniewającą karierę, a następnie, wskutek nagminnego nadużywania go zaczął wzbudzać reakcje negatywne. We Francji pętle Venna zaczęto lekceważąco nazywać p a t a t e s /kartofle/. Doszło do tego, że niektórzy dydaktycy ujrzawszy takie pętle w czytanym tekście od razu nastawiają się doń negatywnie.

Głęboką analizę roli diagramów Venna daje H.Freudenthal /1973, Chapter XV/. Odbiciem przemian, jakie zaszły w ostatnich latach, są dwie analizy znaczenia dydaktycznego diagramów Venna dokonane w odstępie 8 lat w kolejnych wydaniach "Zarysu dydaktyki matematyki" Zofii Krygowskiej /1969,, str. 67; 1977, str. 50/.

Dziś jest jasne, że dla należytego wykorzystania zalet graficznych środków poglądowych konieczne są głębsze badania i analizy, zarówno teoretyczne jak i eksperymentalne, konieczne jest też wprowadzenie do nauczania innych - oprócz diagramów Venna - schematów graficznych. Szczególnie użyteczne okazują się diagramy Carolla używane w szkole pod nazwą schematy c k i e n k o - w e /Caroll, 1897; por. Semadeni, 1982, część 5/.

Celem tego artykułu jest zaproponowanie pewnych teoretycznych kryteriów klasyfikowania czynnościowych i obrazowych sposobów przedstawiania pojęć mnogościowych. Inaczej mówiąc, chodzi o klasyfikowanie sposobów reprezentowania przez dziecko pojęć związanych z klasyfikowaniem przedmiotów. Będzie to egzemplifikacja koncepcji Brunera /1964 a, 1946 b, 1966; por. Wittman, 1976/ reprezentacji enaktywnej /przez odtwarzanie czynnościowe/ i reprezentacji ikonicznej /obrazowej/. Koncepcja ta - jak to pokażemy - wymaga pewnych uzupełnień nie podanych przez autora explicite. Nie będziemy natomiast zajmować się reprezentacjami symbolicznymi pojęć mnogościowych /słownych lub operujących znakami $\in$, $\cup$, $\setminus$ itp./

Czytając ten artykuł trzeba mieć na uwadze, że reprezentacja może służyć różnym celom: raz może chodzić nam o przedstawienie o b i e k t ó w /zbiorów itp./, innym razem o przedstawienie c z y n n o ś c i wykonywanych n a o b i e k t a c h /np. przesuwanie klasyfikowanych przedmiotów/, a jeszcze kiedy indziej o przedstawienie z d a ń o tych o b i e k t a c h /np. relacji zachodzących między zbiorami: rozłączności, inkluzji itp./

Wbrew rozpowszechnionym tendencjom, w artykule tym nacisk położony będzie na p r o c e s k l a s y f i k o w a n i a przedmiotów; z tego punktu widzenia pojęcie zbioru ma charakter służebny, podporządkowany głównemu celowi, jakim powinno być /we wczesnym okresie nauczania matematyki/ praktyczne zrozumienie procesu klasyfikacji przez ucznia.

1. POJĘCIE REPREZENTACJI W UJĘCIU BRUNERA

Ponieważ w polskiej literaturze z dydaktyki matematyki brak objaśnienia tej koncepcji, nieodzowne jest krótkie jej streszczenie.

Bruner /1964 b, str. 545/ pisze, że w trakcie ewolucji człowiek zmienił się dzięki wykorzystaniu nowych systemów n a r z ę d z i trzech rodzajów:

/a/ wzmacniacze zdolności m o t o r y c z n y c h człowieka /nóż itp./,

/b/ wzmacniacze zdolności s e n s o r y c z n y c h /szkło powiększające, radar/,

/c/ wzmacniacze ludzkich zdolności r o z u m o w a n i a.

Ten trzeci rodzaj /obejmujący m.in. język mówiony/ jest skonwencjonalizowany i przekazywany kulturowo, oparty na systemie symboli rządzonych przez powszechnie stosowane reguły. System narzędzi może być efektywny, o ile wytworzy swój odpowiednik wewnętrzny, jakąś umiejętność organizowania aktów senso-motorycznych, spostrzeżeń i myśli.

"Reprezentacja, czy też system reprezentacji, jest to zbiór reguł, w kategoriach których jednostka tworzy sobie pojęcie stałości zdarzeń, z jakimi się zetknęła" /Bruner, 1966 a, str. 530/. Sposób reprezentowania zależy od wyuczonych technik trzech rodzajów wymienionych powyżej, którym odpowiadają trzy podstawowe sposoby reprezentacji: enaktywna, ikoniczna i symboliczna.

Przez reprezentację enaktywną /"odtwarzającą", z angielskiego słowa e n a c t - odtwarzać np. rolę, pochodzącego z łac. in+act/ rozumie Bruner "reprezentowanie zdarzeń ubiegłych za pośrednictwem odpowiedniej reakcji ruchowej" /Bruner, 1964 b, str. 548/ lub "zbiór działań odpowiednich do osiągnięcia pewnego wyniku" /Bruner, 1964 a/. Reprezentacja enaktywna to wiedza o czymś zawarta w umiejętności robienia tego i możliwości seryjnego powtarzania tego aktu. Jedną z istotnych cech tej reprezentacji jest sekwencyjność czynności, ich kolejność w czasie. Typowymi przykładami takiej reprezentacji są: umiejętność wiązania węzła, umiejętność jazdy na rowerze; są to "reprezentacje w mięśniach" i wyrażają się w d z i a ł a n i u , a ich cechy zdeterminowane są w znacznym stopniu przez naturę tego działania. W reprezentacji enaktywnej"spostrzeżenia są nieautonomiczne, nieodłącznie związane z działaniem" /Bruner, 1964 b , str. 580/. "Świat reprezentacji enaktywnej jest więc światem ograniczonym" /Bruner, 1964 b, str. 550/.

R e p r e z e n t a c j a i k o n i c z n a /"obrazowa", z greckiego eikon - obraz/ to "zbiór sumarycznych obrazów przedstawiających pojęcie bez określania go w pełni" /Bruner, 1964 a/; podsumowuje ona zdarzenia "poprzez wybiórczą organizację spostrzeżeń i wyobrażeń, poprzez czasową, przestrzenną i jakościową strukturalizację pola spostrzeżeniowego oraz przekształcone obrazy tych struktur. Obrazy czy wyobrażenia przedstawiają zdarzenia

percepcyjne w sposób zbliżony, lecz konwencjonalnie wybiórczy - tak jak rysunki przedstawiają narysowany przedmiot" /Bruner, 1964 b, str. 548/. "Obraz jest selektywnym, równoczesnym i często wysoce stylizowanym odpowiednikiem doświadczonego zdarzenia, jednak w sposobie odnoszenia się do zdarzeń nie jest tak arbitralny jak słowo. Można rozpoznać obraz czegoś po zobaczeniu tego raz tylko" /Bruner, 1964 a, str. 532/.

Obraz "może stanowić schemat, wokół którego może następnie rozwinąć się sekwencyjna organizacja działania". Typowym przykładem jest rysunek służący jako objaśnienie sposobu wiązania węzła. Bruner /1966 b, str. 6/ wyjaśnia, że fakt posiadania obrazu węzła /na papierze lub "w głowie"/ nie oznacza koniecznie, iż dana osoba jest w stanie taki węzeł zawiązać. Zwraca również uwagę na to, że reprezentacja ikoniczna zazwyczaj przypomina też jakiś inny obiekt /np. osoba rysująca węzeł widzi w tym zachodzące na siebie okręgi, lub precel, lub liść koniczyny/.

R e p r e z e n t a c j ę s y m b o l i c z n ą , której typowymi przykładami są o p i s s ł o w n y oraz f o r m u ł y m a t e m a t y c z n e , charakteryzuje a r b i t r a l n o ś ć; rozumienie znaczenia tej reprezentacji wymaga opanowania k o d u symbolicznego, w szczególności reguł tworzenia wypowiedzi z pojedynczych symboli i reguł przekształcania wypowiedzi. Bruner /1966 b, str. 7/ dodaje, że reprezentacja symboliczna wymaga przełożenia tego, co ma być reprezentowane, na dyskretne człony, z których mogą być tworzone "wyrażenia", "ciągi" czy "zdania" zgodnie z pewnymi regułami. Nie precyzuje on jednak wyraźnie, czy te wyrażenia mają mieć koniecznie budowę sekwencyjną lub równoważną sekwencyjnej.

Język symboliczny stawia wyższe wymagania ścisłości. Na przykład przy słownym opisywaniu węzła konieczne staje się sprecyzowanie, czy chodzi o sam węzeł, czy o proces jego wiązania, a także określenie, czy chodzi o ten konkretny węzeł, czy też o jakąś klasę węzłów.

Każda reprezentacja danego zdarzenia jest s e l e k t y w n uwzględnia tylko pewne aspekty tego zdarzenia, określone przez cel jakiemu ma służyć dana reprezentacja, przez to, co mamy zamiar zrobić z doświadczeniami przechowywanymi w pamięci w tak uporządkowan

sposób. Najważniejsze jest bowiem nie samo przechowywanie w pamięci uprzednich doświadczeń, lecz równoczesne przetworzenie ich tak, by można było wydobyć i wykorzystać to, co istotne.

"Uczenie się spontaniczne polega w znacznym stopniu na indukowaniu bardziej ogólnych reguł tworzenia ekonomiczniejszych bądź efektywniejszych sposobów reprezentacji podobnych zdarzeń. A znaczna część tego uczenia się polega na pewnego rodzaju przekładzie jednego systemu reprezentacji na inny, tak jak wtedy, kiedy potrafimy nie tylko nawykowo przejść daną drogę, ale także zobaczyć oczyma duszy jej obraz - reprezentację" /Bruner, 1966 a, str. 531/. Rozwój dziecka polega "na opanowywaniu kolejno owych trzech form reprezentacji wraz z częściowym przekładem każdej z nich na pozostałe".

Reprezentacje enaktywne najwcześniej pojawiają się w rozwoju dziecka i od nich też - tzn. od powtarzania pewnych czynności - zarówno u dzieci jak i dorosłych zaczyna się zazwyczaj poznawanie nowego pojęcia. "U przeciętnego człowieka dorosłego nabycie pewnej sprawności i wprawy ruchowej zdaje się niezbędnym warunkiem wstępnym powstania równoczesnego obrazu reprezentującego sekwencję aktów składowych działania" /Bruner, 1964 b, str. 551/.

Szczególnie subtelne są kwestie dydaktyczne dotyczące mieszanych form reprezentacji, łączących elementy enaktywne, ikoniczne i symboliczne.

Zanim przedyskutujemy te sprawy, zacytujemy poglądy Brunera /1964 b, str. 576-577/: "W miarę dojrzewania dzieci nabywają zdolność wykorzystywania informacji pośrednich, opartych na innych formach przetwarzania informacji niż akt wskazania na to, co jest bezpośrednio obecne. /.../ dzieci potrafią odwoływać się do odległych stanów i ograniczeń, nie danych bezpośrednio w sytuacji, czyli potrafią wychodzić poza dostarczone im informacje. /.../ dzieci mają zdolność kumulowania informacji w strukturę, jaką można posługiwać się stosując reguły przewyższające proste kojarzenie na zasadzie podobieństwa i bliskości. /.../ taki system przetwarzania zdarzeń zachodzących w otoczeniu wymaga przekładu doświadczenia na formę symboliczną. Przekład taki jest niezbędny do uzyskania odległego układu odniesienia, bez czego nie można się obejść, gdy ma się do czynienia z informacjami pośrednimi".

Bruner /1966 b, str. 8-9/ zwraca uwagę, że obrazy mogą przedstawiać stany, działania lub - w postaci "symbolizowanej" - relacje. Jako przykład podaje trzy rysunki:

/a/ Szkic, na którym narysowane są: akumulator, wyłącznik, żarówka i łączące je przewody /proporcje wymiarów nie są zachowane, ale rysunek - choć uproszczony - jest dość realistyczny/.

/b/ Taki sam układ przedstawiony za pomocą znanych powszechnie uczniom umownych symboli przedstawiających źródło prądu stałego, wyłącznik i opór; jest to sytuacja ogólniejsza od poprzedniej, gdyż obejmuje bardzo różne źródła prądu, wyłączniki i opory, a ponadto "obraz ten jest wysoce symbolizowany, o ile to rzeczywiście jest obraz".

/c/ Schemat blokowy przedstawiający: źródło energii, urządzenie sterujące i obciążenie; jest to schemat jeszcze ogólniejszy, obejmujący również urządzenia nieelektryczne. Bruner waha się, czy w ogóle można nazwać to obrazem, gdyż "jest to tylko przestrzenne przedstawienie wysoce formalnego zbioru idei". W innej pracy /Bruner, 1964 b, str. 579/ pisze on bardziej wyraźnie, że "komputerowe schematy przepływu informacji mają charakter ikoniczny, są to jednak obrazy przekładające dane pierwotnie językowe i matematyczne na formę wzrokową".

Warto dodać, że schemat blokowy ma charakter ikoniczny tylko wówczas, gdy nie zawiera żadnych napisów; schemat blokowy z napisami lub symbolami matematycznymi można traktować jako reprezentację mieszaną.

Z analizy powyższych tekstów można wyciągnąć wniosek, że Bruner wyróżnia dwa rodzaje reprezentacji ikonicznych:

1° te, których źródłem jest reprezentacja enaktywna i które są schematami organizacji działania /w dalszym ciągu będziemy je nazywać ikoniczno-enaktywnymi/,

2° te, które są obrazowym przekładem pojęć przedstawionych wcześniej na poziomie symbolicznym; nazwiemy je ikoniczno-symbolicznymi.

Rozróżnienie to jest bardzo istotne dla dalszych rozważań przedstawionych w tym artykule.

Z tekstów Brunera wynika, że nie wszystkie manipulacje dziecka uczącego się matematyki zakwalifikowuje on jako reprezenta-

cje enaktywne. Rozwińmy ten wątek, starając się trzymać wyłożonych wyżej koncepcji Brunera. Manipulowanie przez dziecko pionkami na minikomputerze Papy'ego nie jest reprezentacją enaktywną działań na liczbach, ma bowiem pewne cechy manipulowania symbolami /analogiczne do układania przez dziecko formuł z cyferek i znaków działań na kartonikach/. Jedynie operacje na pojedynczych polach /grupowanie lub rozdzielanie pionków/ mają wyraźny charakter enaktywny. W pozostałych przypadkach manipulowanie pionkami na minikomputerze wymaga rozumienia ich znaczenia kodowego i nie jest bynajmniej "reprezentowaniem zdarzeń ubiegłych za pomocą odpowiedniej reakcji ruchowej".

Przedstawienie liczby za pomocą pionków na minikomputerze Papy'ego nie jest reprezentacją ikoniczną lecz symboliczną /lub ikoniczno-symboliczną/, gdyż ma ono wszelkie cechy umowności reprezentacji symbolicznej /znaczenie kolorów, zależność wartości pionka od miejsca, gdzie stoi/, a układ przestrzenny pól jest tu czymś drugorzędnym /pola minikomputera mogłyby z powodzeniem być ułożone sekwencyjnie/.

2. REPREZENTACJE ENAKTYWNE KONKRETNYCH ZBIORÓW

O reprezentacjach takich można mówić, gdy dziecko czynnościowo wyróżnia jakiś zbiór /np. podporządkowując swe zabawki, przygotowując paczkę do wysyłki lub demonstrując koledze swe zabawki/. Wśród czynności wykonywanych przez dziecko na szczególną uwagę zasługują następujące:

1° wskazywanie kolejno każdego elementu zbioru,

2° wskazywanie obszaru, w którym znajdują się te elementy /wykonanie odpowiedniego gestu lub odpowiedniego ruchu gałek ocznych, odgradzanie tych elementów od pozostałych przez położenie listewek lub sznurka, przez narysowanie linii itp./.

Przy czynnościach tych położenie przedmiotów może ulegać zmianie lub nie. Innymi słowy, obszar, w którym mają leżeć te przedmioty, może być przez dziecko zaznaczony z góry, bądź też może to być obszar, w którym przedmioty te znajdowały się od początku.

Między reprezentacjami typów 1° i 2° nie ma ostrych granic. Na przykład, pokazując palcem klocki dziecko może niektórych z nich dotknąć, wyróżniając w ten sposób każdy z osobna, indywidualnie, natomiast inne klocki, leżące blisko siebie może pokazać łącznie, jednym ruchem ręki.

Reprezentacje powyższe, gdy nie następuje przegrupowanie przedmiotów, mają charakter s t a t y c z n y /ruchy wykonuje dziecko, przedmioty są nieruchome/. Ważne są również reprezentacje d y n a m i c z n e , w których proces klasyfikowania polega na odpowiednim ruchu rozpatrywanych obiektów. Na przykład grupa dzieci wracających ze szkoły stopniowo rozdziela się, gdy ich drogi rozwidlają się. Klasyfikowane są tutaj dzieci, a najistotniejsze - z naszego punktu widzenia - są tu r o z g a ł ę z i e n i a dróg; miejsca tych rozgałęzień są drugorzędne. Właściwym schematem takiej klasyfikacji jest nie podział na obszary jak w 2°, lecz graf, a ściślej mówiąc - dendryt /czyli schemat drzewa/. Podobnie dynamiczny charakter ma porządkowanie zabawek przez dziecko przy układaniu ich na półkach; tu również można mówić o rozwidlaniu się dróg, choć jest to przestrzennie bardziej rozmyte i trudniej uchwytne.

Pokażemy poniżej, jak wymienione reprezentacje enaktywne znajdują odzwierciedlenie w reprezentacjach ikonicznych.

3. REPREZENTACJE IKONICZNO-ENAKTYWNE

Reprezentowanie klasyfikacji jednostopniowej. Przez k l a s y f i k a c j ę j e d n o s t o p n i o w ą będziemy rozumieć klasyfikację ze względu na jedną cechę lub jeden zespół cech tego samego typu. Zakładamy, że dane jest podstawowe u n i w e r s u m obiektów, które klasyfikujemy; przedmiotów spoza tego uniwersum nie rozpatrujemy. Wyłaniają się trzy podstawowe typy zagadnień:

/a/ wyodrębnianie zbioru bez zwracania uwagi na jego dopełnienie,

/b/ wyodrębnianie zbioru i jego dopełnienia w sposób symetryczny,

c/ podział uniwersum na podzbiory rozłączne.

Jeżeli rozpatrywanym uniwersum jest np. zbiór klocków logicznych,to typowym przykładem zagadnienia typu /a/ jest wyodrębnianie zbioru klocków czerwonych; przykładem zagadnienia typu /b/ jest podział zbioru klocków logicznych na zbiór klocków czerwonych i zbiór klocków nieczerwonych; przykładem zaś /c/ - podział zbioru klocków logicznych na 3 zbiory: klocków czerwonych, klocków niebieskich i klocków żółtych.

Jakkolwiek te trzy typy zagadnień są ze sobą ściśle związane, różnią się wyraźnie celem klasyfikacji i położonymi akcentami. W /a/ interesują nas tylko klocki czerwone, reszta jest nieistotna; w /b/ zbiór klocków czerwonych i zbiór klocków nieczerwonych są traktowane równoprawnie. Ponadto, choć pozornie wydaje się, że /b/ jest po prostu szczególnym przypadkiem /c/ przy podziale na 2 podzbiory, istnieje jednak istotna, choć subtelna różnica znaczeniowa, którą najlepiej objaśnić na przykładzie innego podziału: w /c/ dzielimy klocki na duże i małe, a w /b/ na duże i nieduże. Innymi słowy, w /b/ akcentuje się, że chodzi o cechę i jej negację, w /c/ - zespół cech jednego typu.

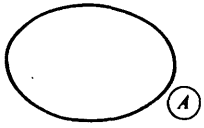
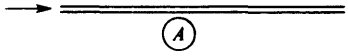
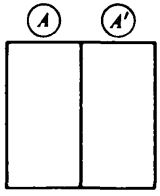
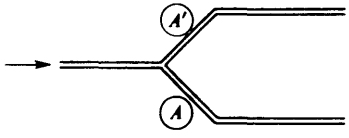
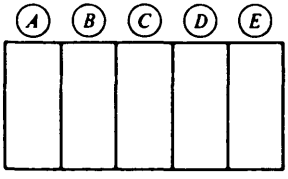
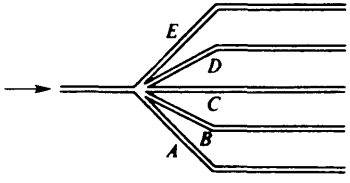
Ikonicznych reprezentacji sytuacji /a/, /b/, /c/ można sobie wyobrazić wiele. Ograniczymy się jednak do dwóch podstawowych typów, które umownie nazwiemy:

/I/ obszarowy /wyodrębnianie pewnych obszarów na płaszczyźnie/,

/II/ dendrytowy /tzw. "drogi"/.

Do reprezentacji obszarowych należą m.in. diagramy Venna i diagramy Carolla.

Reprezentacje dendrytowe /intensywnie badane m.in. przez Z.P. Dienesa, por. Semadeni, 1982/ są mniej znane. Istotną rolę odgrywają tam "znaki drogowe" ułożone obok hipotetycznych bramek. Znaki te są dwojakiego rodzaju: 1° droga tylko dla elementów A /gdzie za A należy podstawić jakąkolwiek cechę/, 2° zakaz przejazdu elementów A /negacja/.

typ reprezentacji / typ klasyfikacji	(I) obszarowe	(II) dendrytowe
(a)	pojedyncza pętla diagramu Venna 	droga z jednym znakiem drogowym 
(b)	schemat Carolla (okienkowy) pojedynczy 	rozgałęzienie ze znakiem drogowym i jego negacją 
(c)		rozgałęzienie wielokrotne z etykietkami cech 

Rys. 1

Ułożenie szeregowe /jeden za drugim/ takich znaków daje efekt koniunkcji, ułożenie równoległe /terminologia z nauki o elektryczności"/daje efekt alternatywny.

Subtelniejsza analiza prowadzi do wniosku, że istnieją dwa rodzaje położenia znaków: 1° przy rozwidleniach (wówczas elementom nie spełniającym danego warunku nie wolno wjechać na daną drogę), 2° przy drodze poza rozwidleniami /wówczas elementy nie spełniające danego warunku stają przed znakiem lub są lokowane na specjalnym "parkingu" obok drogi, aby nie zawadzały; wyjście na taki parking może być interpretowane później jako rozwidlenie/

Krzyżując podane tu typy zagadnień /a/, /b/, /c/ i reprezentacji /I/ i /II/, otrzymujemy 6 reprezentacji /Ia/, /Ib/, /Ic/,

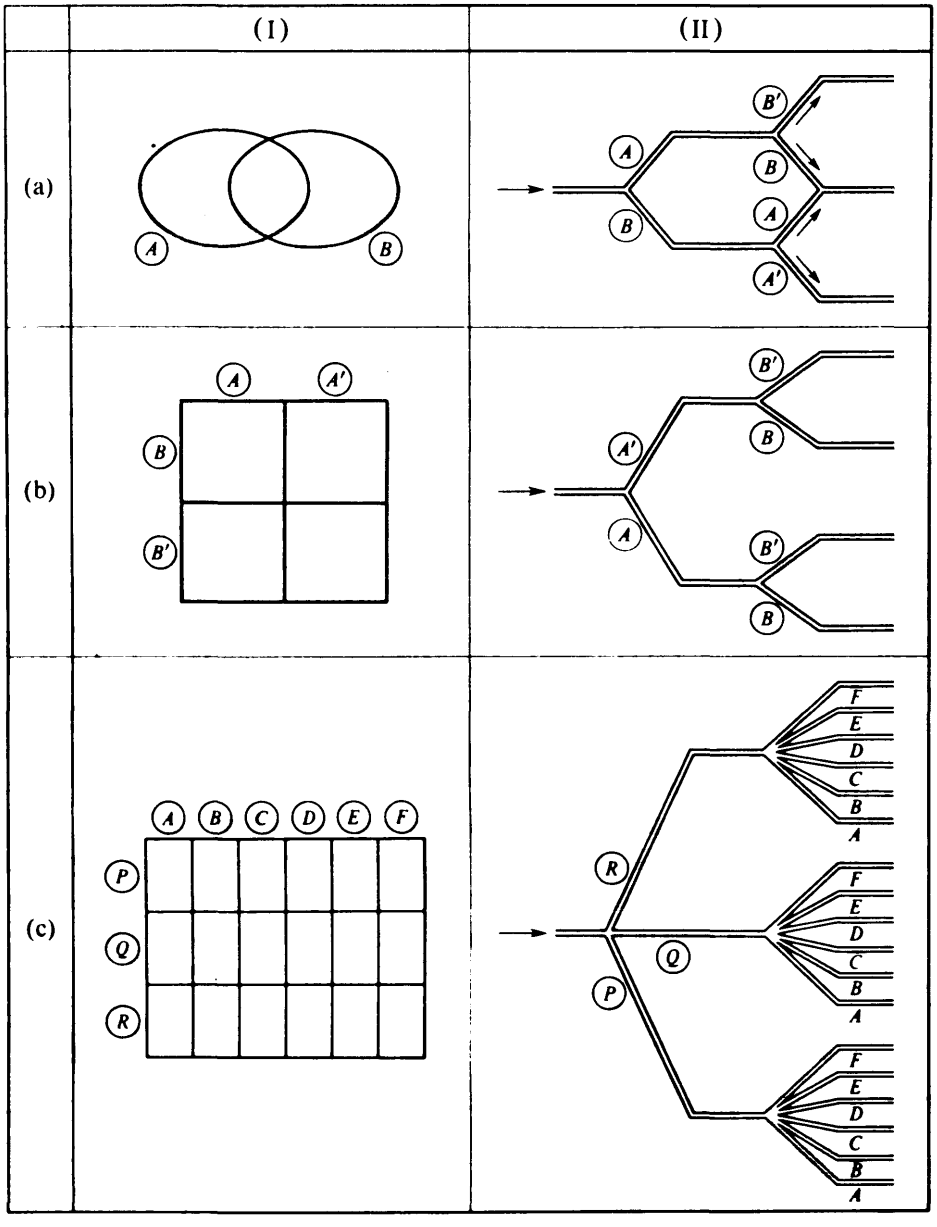
/IIa/, /IIb/, /IIc/ zestawionych na rysunku 1. Znaki drogowe oznaczone są tam dla wygody czytelnika literami A i B oraz symbolami dopełnienia /negacji/ A', B'. W rzeczywistości jednak w reprezentacji ikonicznej nie używamy symboli tego typu, zastępując je symbolami obrazowymi; na przykład chcąc wyodrębnić klocki czerwone rysujemy na etykietce "próbkę" koloru. Sugestywnym przedstawieniem negacji danej cechy jest przekreślony symbol graficzny danej cechy /przekreślenie jest ikonicznym odpowiednikiem znanej dziecku czynności wykreślania/.

Schemat wraz z wypełnionymi "etykietkami" reprezentuje jakiś określony zbiór czy podział. Natomiast taki sam schemat z pustymi miejscami na etykietki można potraktować jako ikoniczną reprezentację "zbioru w ogóle" itp.

Każdej z powyższych reprezentacji ikonicznych odpowiadają reprezentacje enaktywne: obszarowe /grupowanie elementów w określonych miejscach, z zaznaczonymi liniami lub bez/ lub dendrytowe /suwanie klasyfikowanymi obiektami wzdłuż dróg, narysowanych lub nie/. Przykładem reprezentacji enaktywnej odpowiadającej typowi /IIc/ jest droga chłopców wracających razem ze szkoły i rozstających się w pewnym miejscu, a przykładem reprezentacji typu /IIa/ - droga chłopca odprowadzającego kolegę i mogącego dojść z nim tylko do pewnego miejsca, a następnie wracającego.

W reprezentacjach enaktywnych odpowiadających pojedynczej pętli Venna można wyróżnić 1° takie, w których najpierw dana jest pętla, a potem wewnątrz niej układa się elementy, 2° takie, w których najpierw ułożone są elementy, a następnie układa się lub dorysowuje pętlę tak, aby otoczyła elementy wyróżnionego zbioru /i żadnych innych/. Tej drugiej sytuacji odpowiadałby zmodyfikowany nieco diagram Carella: linię środkową /rozdzielającą/ wolno by było rysować "z zakrętami", uwzględniając to, że elementy już były ułożone zawczasu.

A.Kirsch /1977/ podaje przykłady ikonicznych reprezentacji "ułożeń" /dla potrzeb kombinatoryki/; niektóre z nich można interpretować też jako reprezentacje podziałów.



Rys. 2

REPREZENTOWANIE KLASYFIKACJI DWUSTOPNIOWEJ. Z klasyfikacją dwustopniową mamy do czynienia wówczas, gdy dwukrotnie dokonujemy klasyfikacji tego samego uniwersum według dwóch różnych kryteriów

/np. gdy klasyfikujemy klocki raz według kształtu, a drugi raz według koloru/.

Na rysunku 2 zestawione są typowe reprezentacje ikoniczne obszarowe i dendrytowe sześciu uprzednio wymienionych typów.

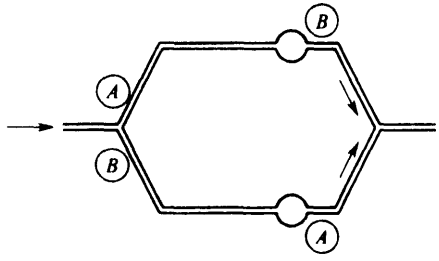
Zasadniczą różnicą między reprezentacjami dwustopniowymi obszarowymi i dendrytowymi jest to, że w tych pierwszych obie klasyfikacje są równoczesne i równouprawnione, a ich rola jest symetryczna, w reprezentacjach zaś dendrytowych mamy ikoniczny odpowiednik n a s t ę p s t w a c z a s o w e g o: musimy ustalić, która z tych klasyfikacji jest pierwsza, a który jest druga, z uwagi na niesymetryczność sytuacji. Objawia się to m.in. w tym, że przy rozwidleniach drugiego stopnia zachodzi konieczność powtarzania identycznych etykietek w ustalonych miejscach /rys. 2/.

Z wyodrębnionych powyżej trzech typów zagadnień /a/, /b/, /c/ dwa ostatnie typy dotyczą teraz każdego stopnia klasyfikacji z osobna, natomiast /a/ wymaga zmiany interpretacji: oprócz zbiorów A, B, $A \cap B$ /i ewentualnie $A \cup B$/ interesują nas zbiory $A \setminus B$, $B \setminus A$ /i ewentualnie różnica symetryczna $A \div B$/, w których określeniu musi się pojawić jakaś forma negacji lub dopełnienia, jednakże niepotrzebne jest dopełnienie do całego uniwersum, wystarczy dopełnienie podzbioru do zbioru. Innymi słowy, nie zwracamy uwagi na elementy spoza $A \cup B$. Część wspólna $A \cap B$ odgrywa przy tym istotnie inną /i ważniejszą/ rolę niż $A \setminus B$ lub $B \setminus A$. Natomiast w reprezentacji typu /b/ role czterech zbiorów

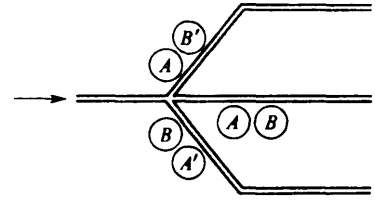
$$A \cap B, \quad A \setminus B = A \cap B', \quad B \setminus A = A' \cap B, \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

są równorzędne. W reprezentacji typu /c/, przy skrzyżowaniu podziału na n części $A_1, \ldots, A_n$ i podziału na m części $B_1, \ldots, B_m$ otrzymujemy /w miejsce powyższych 4 zbiorów/ m n zbiorów $A_i \cap B_j$.

Reprezentacje dendrytowe dwustopniowych klasyfikacji typu /IIb/ i /IIc/ narzucają się w sposób jednoznaczny /rys. 2/, o ile tylko ustali się kolejność rozpatrywania cech /np. czy A,B czy też B,A w /IIa//. Natomiast w przypadku reprezentacji typu /IIa/ nie widać oczywistego kandydata. Schemat dróg /IIa/ przedstawiony na rysunku 2 nie jest "czysty": zawiera etykietki z negacjami. Odpowiada on jednak bardzo blisko procesowi rozkładania elementów w



Rys. 3

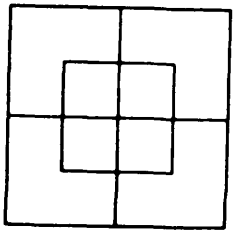


Rys. 4

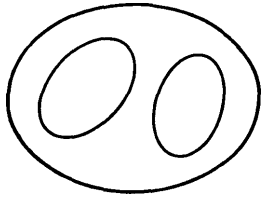
pętlach schematu /Ia/. Trzy końcówki dróg /IIa/ odpowiadają trzem obszarom reprezentacji /Ia/, przy czym środkowy zbiór /część wspólna/ jest wyróżniony w obu przypadkach w podobny sposób. Elementy spoza $A \cup B$ zatrzymują się przed pierwszym rozwidleniem i dalej się nim nie interesujemy.

W grę wchodzą jeszcze inne schematy typu /IIa/. Schemat na rysunku 3 nie zawiera negacji: klasyfikowane elementy gromadzą się w czterech miejscach, np. elementy zbioru $A \setminus B$ zatrzymują się na "placyku" przed drugim "znakiem drogowym". Schemat ten może służyć jako przygotowanie dziecka do schematu /IIa/ na rysunku 2, wystarczy tylko narysować dodatkowe wyjścia w bok z placyków A i B. Z kolei schemat na rysunku 2 może zostać uproszczony i zastąpiony schematem na rysunku 4. Odpowiada to sytuacji dziecka bardziej wprawnego, które - mając rozłożyć elementy w pętlach diagramu Venna - od razu dokonuje w myśli podziału układanych elementów na trzy zbiory $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

REPREZENTOWANIE KLASYFIKACJI WIELOSTOPNIOWYCH. Jak wiadomo, dobrze znana koniczynka Venna, będąca reprezentacją typu /Ia/ klasyfikacji trójstopniowej, nie ma również adekwatnego odpowiednika w postaci trójstopniowego diagramu Carolla, gdyż powinien on być trójwymiarowy. Caroll /1897/ posługiwał się nieco sztucznym schematem /rys. 5/, w którym wnętrze środkowe-



Rys. 5



Rys. 6

go kwadratu reprezentuje trzeci z danych zbiorów, a zewnętrze - jego dopełnienie. Schemat ten nie da się, niestety, uogólnić do dowolnych trójstopniowych podziałów: w schemat /Ic/ na rysunku 2 nie da się sensownie wpisać dodatkowego wewnętrznego prostokąta /gdy dzielimy na więcej niż 2 części/. W praktyce dydaktycznej, w reprezentacji typu /Ic/ podziały przedstawiane są zazwyczaj przez rozdrobnienie okienek w tabelce klasyfikacji dwustopniowej; traci się na tym jednolitość i przejrzystość.

W przeciwieństwie do reprezentacji obszarowych, reprezentacje dendrytowe nie mają takich ograniczeń. Między reprezentacjami dwustopniowymi a trójstopniowymi czy czterostopniowymi jest tylko różnica ilościowa, a nie jakościowa.

Reprezentacja n-stopniowa Venna (n>3) jest możliwa /Nowicki, 1975/, nie ma jednak praktycznego znaczenia z powodu zbytniej komplikacji rysunku.

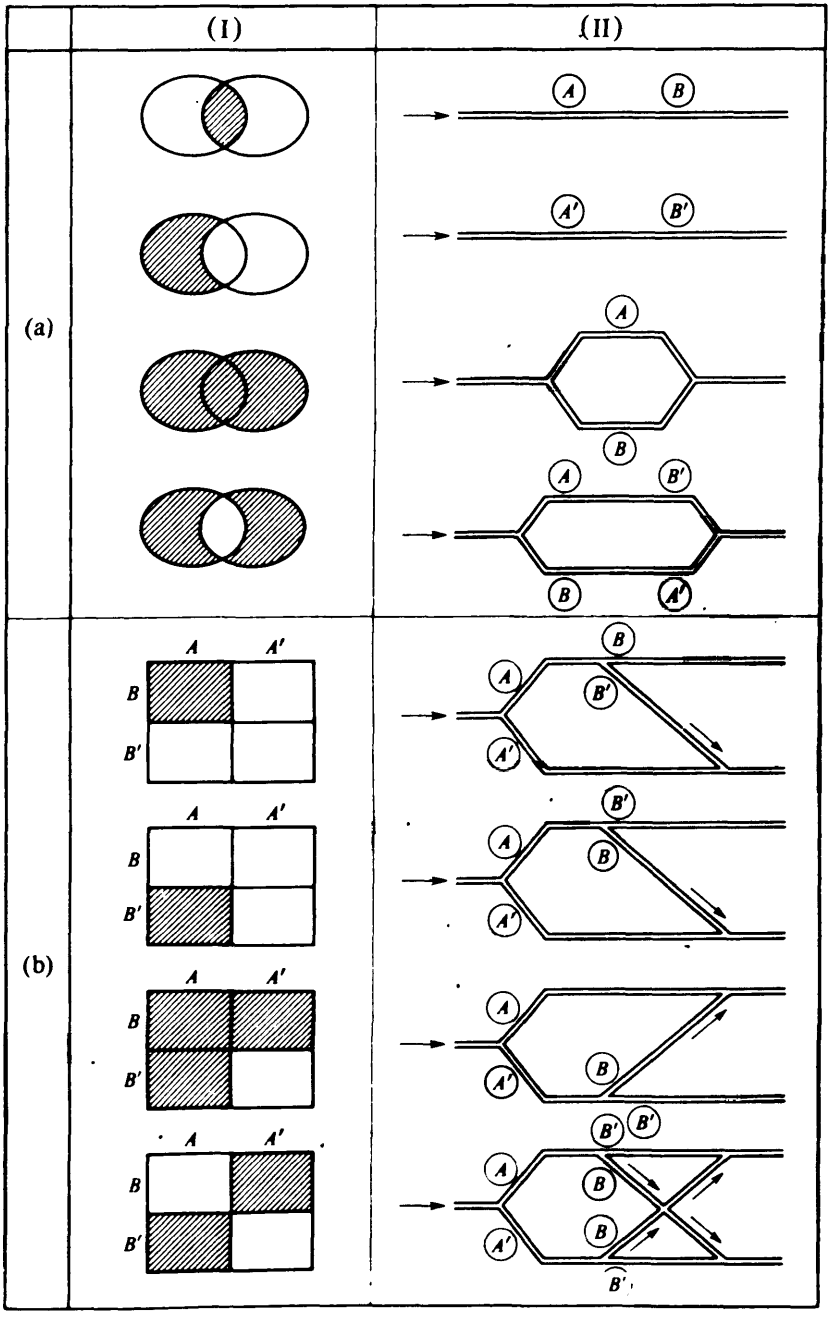
REPREZENTOWANIE DZIAŁAŃ BOOLOWSKICH. Ikoniczno-enaktywne reprezentacje obszarowe podstawowych działań polegają zazwyczaj na wyróżnieniu odpowiedniego obszaru na diagramie Venna lub Carolla. Obszar ten zaznaczyć można 1^0 przez zakreskowanie /sposób stosowany najczęściej/, 2^0 przez narysowanie dodatkowej pętli, najlepiej innego koloru /sposób propagowany przez Papy'ego/. Ten drugi sposób może budzić wątpliwości. Na przykład w czasie eksperymentu w klasie I jednej ze szkół warszawskich nauczycielka objaśniała rysunek, na którym wewnątrz jednej pętli leżały dwie inne, reprezentujące podzbiory /rys. 6/; wewnątrz tych dwóch pętli narysowane były pewne elementy. Nieoczekiwanie wstał uczeń i powiedział, że na rysunku tym przedstawiony jest zbiór, którego elementami są dwa inne zbiory. Przykład ten pokazuje, jakie trudności dydaktyczne tkwią w pozornie oczywistej sytuacji. Potrzebne są konwencje uzupełniające.

Reprezentację dendrytową działania boolowskiego $(A, B) \longmapsto \Phi(A, B)$ można utworzyć następująco: w przypadku /IIb/ bierzemy drzewko z rysunku 2 i prowadzimy do wspólnego wyjścia z drogi odpowiadające tym z obszarów $A \cap B$ i $A \cap B'$, $A' \cap B$ i $A' \cap B'$, które wchodzą w skład $\Phi(A, B)$. Pozostałe drogi prowadzimy do drugiego wyjścia, reprezentującego dopełnienie zbioru $\Phi(A, B)$. Zdarza się, że w ten sposób niweluje się efekty pewnych rozwidleń. Pomijając te właśnie rozwidlenia otrzymujemy reprezentację dendrytową o dwóch wyjściach: $\Phi(A, B)$ i $\Phi(A, B)'$.

Z kolei reprezentację typu /IIa/ możemy uzyskać z reprezentacji typu /IIb/ kasując wszystkie drogi prowadzące do $\left(\Phi(A, B)\right)'$ i zostawiając pozostałe /upraszczając też w razie potrzeby układ znaków drogowych/.

Na rysunku 7 zestawione są reprezentacje 4 typów /Ia/, /Ib/, /IIa/ i /IIb/ działań $\cap$, $\setminus$, $\cup$ i $\div$.

REPREZENTOWANIE RELACJI BOOLOWSKICH. Dość rozpowszechniona jest wiara, że inkluzja odpowiada implikacji tak, jak część wspólna odpowiada koniunkcji. Jest to nieporozumienie, gdyż inkluzja jest relacją /tzn. zdaniem/, część wspólna - działaniem /tzn. przyporządkowaniem/, a zarówno implikacja jak i koniunkcja - funktorami zdaniotwórczymi /czyli też przyporządkowaniami/.



Rys. 7

Dla uniknięcia niewłaściwych skojarzeń reprezentacje ikoniczne relacji boolowskich powinny być różne od reprezentacji działań.

Inkluzja i rozłączność dadzą się wyrazić w postaci $\Phi(A,B) = \emptyset$ gdzie Φ jest odpowiednim działaniem boolowskim. Można wówczas wybrać dwa sposoby postępowania: albo uzupełnić dany schemat ogólny dodatkowymi szczegółami rysunkowymi, albo też modyfikować schemat /np. rysując pętle Venna nie w położeniu ogólnym, jak na rysunku 2, lecz jedna wewnątrz drugiej, bądź rozłączne/.

Brak niestety sugestywnego ikonicznego przedstawienia zbioru pustego. Papy zakreskował odpowiedni obszar, wymaga to jednak rezygnacji z zakreskowywania jako sposobu wyróżniania interesującego nas zbioru. Dość rozpowszechnione jest pisanie znaku $\emptyset$ w odpowiednim obszarze diagramu Venna. Jest to jednakże obce reprezentacji ikonicznej wprowadzenie symbolu formalnego i to bardzo nieintuicyjnego, wręcz mylącego dzieci, które interpretują $\emptyset$ jako przekreślone zero, czyli "różne od zera". Znak $\emptyset$ razi również w sytuacji, gdy w diagramie Venna narysowane są jakieś elementy; $\emptyset$ może być wówczas wzięte za element danego zbioru.

Nie będziemy szerzej omawiać sprawy dendrytowego przedstawiania relacji boolowskich. Stwierdzimy tylko brak oczywistych lub zaakceptowanych sposobów przedstawiania tego, że jakąś drogą - przy danym wyborze znaków drogowych - nie pojedzie żaden element. Można by np. rysować poprzeczną kreskę na końcu odpowiedniego rozgałęzienia.

Reprezentacje dendrytowe - bliższe enaktywnym niż obszarowe - zapewne mniej się nadają do przeprowadzania rozumowań, stąd też może płynie ich mniejsze znaczenie w przypadku relacji boolowskich.

4. PRZYKŁADY REPREZENTACJI IKONICZNO-SYMBOLICZNEJ

Na zakończenie tego artykułu przedyskutujemy krótko znaną wersję Papy'ego języka diagramów Venna /Papy, 1963, por. Krygowska, 1977, str. 50 oraz Semadeni, 1973, str. 119/. W języku tym przedstawiać można w postaci ikonicznej jedną, dwie lub trzy zmienne oznaczające zbiory /w zwykłej symbolice: A, B, C/, zbiory będące wynikiem operacji boolowskich na tych zmiennych /$A \cap B$ itd./, zdania stwierdzające, że pewne z tych zbiorów są

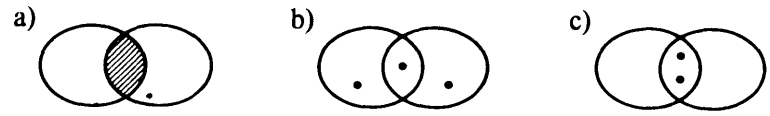
puste /a więc też inkluzję i rozłączność zbiorów/ oraz zdania równoważne zdaniom typu

$$\exists_{x \in A} \quad \exists_{x_1,\ldots,x_n} \quad \forall_{k,j} \quad (x_k \in A) \wedge \left[(j \neq k) \Rightarrow (x_j \neq x_k)\right]$$

/a więc też zdania stwierdzające, że pewne zbiory są niepuste/. Reprezentacje Papy'ego, choć ikoniczne, mają już pewne wyraźne cechy reprezentacji symbolicznych: ścisły rygor interpretacji wymagający formalnego traktowania rozpatrywanych sytuacji, a zarazem dający możliwość przeprowadzania ścisłych dowodów /por. Drabbe, 1971/. Obejmują ponadto przypadki, w których obraz graficzny rażąco odbiega wyglądem od przedstawionej sytuacji.

Na przykład, przy odpowiedniej interpretacji, rysunki 8a, b,c przedstawiają /w języku Papy'ego/ odpowiednio: parę prostych równoległych, parę prostych przecinających się, parę prostych identycznych. Rysunki te nie są więc uproszczonym, stylizowanym odbiciem rozpatrywanych figur, nie przedstawiają ich "w sposób zbliżony, lecz konwencjonalnie wybiórczy". To, że wnętrze narysowanej krzywej ma przedstawiać linię prostą, jest konwencją, którą można zrozumieć jedynie przechodząc pośrednio przez reprezentację symboliczną i znając odpowiedni kod. Język Papy'ego jest więc ikoniczno-symboliczny, w sensie wyjaśnionym w części 1.

Uczeń nie rozumiejący zasady przekładu pojęć geometrycznych z reprezentacji symbolicznej /np. słownej/ na język Papy'ego będzie całkowicie zagubiony, a rysunki takie jak rys. 8,a, b, c będą mu przeszkadzać zamiast pomagać. Nie stanowią one bowiem schematu czynności ucznia, a są jedynie z a k o d o w a n y m i i n f o r m a c j a m i , z których należy wyciągać wnioski o charakterze d e d u k c y j n y m , formalnym.



Rys. 8

LITERATURA CYTOWANA

BRUNER, J.S.: Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics, w książce: Theories of learning and instruction, Yearbook, National Society for Study of Education, cz. I, New York 1964 a, str. 306–335.

– : The course of cognitive growth, American Psychologist 19 /1964 b/, str. 1–15 /tłumaczenie polskie: Przebieg rozwoju poznawczego, w zbiorze artykułów: Poza dostarczone informacje, Biblioteka Psychologii Współczesnej, PWN, Warszawa 1978, str. 544–583/.

– : The growth of representational process in childhood, Materiały 18 Międzynarodowego Kongresu Psychologów, Moskwa 1966 a /tłumaczenie polskie: Rozwój procesów reprezentacji w dzieciństwie, Biblioteka Psychologii Współczesnej, PWN, Warszawa 1978, str. 526–543/.

– : On cognitive growth, w książce: J.S. B r u n e r, R. R. O l i v e r, P. M. G r e e n f i e l d, Studies in cognitive growth, Wiley, New York 1966 b.

CARROL, L.: Symbolic logic, McMillan, Londyn 1897 /wznawiane przez Dover Publications, New York; przekład rosyjski w książce: Istorija s uzełkami, Mir, Moskwa 1973/.

DRABBE, J.: Diagrammes multicolores et logique propositionnelle, Nico 8 /1971/, str. 57-67.

FREUDENTHAL, H.: Mathematics as an educational task, Reidel Publ. Co., Dordrecht 1973.

KIRSCH, A.: Über die "enaktive" Repräsentation von Abbildungen, insbesondere Permutationen, Didaktik der Mathematik 5 /1977/, str. 189-194.

KRYGOWSKA, Z.: Zarys dydaktyki matematyki, PZWS, Warszawa 1969.

- : Zarys dydaktyki matematyki, tom 2, WSiP, Warszawa 1977.

NOWICKI, P.: Koniczynka n-listna, Wiadomości Matematyczne 19 /1975/, str. 11-18.

PAPY, G.: Mathématique moderne, 1, Didier, Bruksela 1963.

SEMADENI, Z.: Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci, PWN, Warszawa 1973.

- /red/ Nauczanie początkowe matematyki, tom 2, WSiP, Warszawa 1982 /w druku/.

WITTMAN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Brunszwik 1976.

ENACTIVE AND ICONIC REPRESENTATIONS IN BRUNER'S SENSE EXEMPLIFIED BY REPRESENTATION OF SET-THEORETICAL NOTIONS

Summary

The paper contains a theoretic discussion of Bruner's ways of representing mathematical notions /enactive, iconic, symbolic/ and a proposal of distinguishing mixed types: iconic-enactive /those which stem out of enactive representations and are graphic schemes of actions/ and iconic-symbolic /those which are graphic representations of notions represented previously at symbolic level, e.g., Papy's concept of a Venn diagram/.

There is also a proposal of how to classify ways of representing notions related to various types of classification. The features distinguished here are: spacial /e.g. Venn diagrams/ - dendritic; one-stage, two-stage, three-stage representations /depending on the number of independent properties considered in the classification/; representing a set but not its complement - representing a set and its complement in a symmetric manner - partition.