ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. Łoś (Warszawa)

Matematyka i jej zastosowania

Referat przedstawiony nam na dzisiejszym posiedzeniu Walnego Zgromadzenia(1) nie zaskoczył mnie swoim pragmatyzmem. Od kilku już lat pragmatyczne, a nawet praktycystyczne poglądy na naukę przeważają w oficjalnych wypowiedziach. Słyszeliśmy tu nawet wyliczenia finansowych efektów rezultatów matematycznych. W porównaniu z nimi ten referat wydaje się pełen umiaru.

Można się zresztą mniej lub więcej cierpko odnosić do pragmatycznego podejścia, nie sposób jednak odmówić mu pewnych zalet, specjalnie jako punktowi wyjścia do głębszych rozważań prowadzących do odpowiedzi na zasadnicze pytanie: czym jest matematyka i jak ją należy kształtować. Bo przecież istotę świdra mechanicznego poznajemy najlepiej obserwując jego pracę. Martwy, jest tylko nieporęcznym przedmiotem, nie wywołującym żadnych przeżyć estetycznych. O telewizorze czy telefonie wie się też o wiele więcej, obserwując ich rolę społeczną niż badając druciane linki ukryte w ich wnętrzu. To pozostawiamy elektrykom, którzy z kolei choć znają przedmiot, zapewne nie są w pełni zorientowani w przemianach ekonomiczno-społecznych, jakie wywołuje.

W ten sposób rozważanie matematyki jako narzędzia używanego przez współczesne społeczeństwo jest ciekawe i może być płodne. Może w dużej mierze wyjaśnić niematematykom czym jest matematyka, a matematykom zwrócić uwagę na fakt, że przez ich telewizor widzi się świat oglądając ekran, a nie trzymając głowę w pudle.

Jak więc z tego wynika, podzielam, przynajmniej w części, założenie referatu, który nam został przedstawiony, a ponieważ zawiera on dokładny, choć popularnie wyłożony, stan wiedzy w czterech różnych dziedzinach badań matematycznych, nie dodam tu wykładu na temat jakiejś piątej,

(1) Przemówienie to zostało wygłoszone na Walnym Zgromadzeniu PAN w dniu 18. XII. 1970, w dyskusji nad referatem wygłoszonym przez czł. rzecz. PAN Edwarda Marczewskiego, pt. *Rola matematyki w poznawaniu i kształtowaniu świata zewnętrznego*, który ukaże się drukiem w „Nauce Polskiej".

ale zajmę się czym innym. Chciałbym mianowicie tu przedstawić moje osobiste i nie poddane aprobacie Prezydium Akademii (które to zastrzeżenie robię z tak zwanej ostrożności procesowej) poglądy na warunki, w których matematyka okazuje się użyteczna i te, w których może się właściwie rozwijać.

Byłoby żenujące przekonywanie obecnych o tym, że matematyka przyczynia się do postępu świata, w którym żyjemy, i podawać na to takie czy inne przykłady. Wybuch matematyzacji, jaki nastąpił po ostatniej wojnie, stawia przed nami pytanie: Jakie były przyczyny wzrostu roli matematyki i czego się możemy na tym polu spodziewać?

Nie wolno mi stwierdzić, że matematyka jest nauką o liczbach, bo przez 20 lat zajmowałem się matematyką używając liczb tylko do numerowania kolejnych twierdzeń. Faktem jest jednak, że centralnym przedmiotem zainteresowań matematyki są liczby i twory związane z liczbami, takie jak funkcje i funkcjonały, a większość nieliczbowych tworów matematycznych ma swe zasadnicze realizacje w liczbach lub ich zbiorach. Co ważniejsze, użytek z matematyki robi się prawie wyłącznie przez liczby. Zasadnicze znaczenie ma tu fakt, że pewne wielkości możemy określać liczbowo. W tym miejscu użyłem słów „możemy określać liczbowo" mając na myśli to, że istnieją pewne przepisy postępowania, których wykonanie prowadzi do związania z obserwowanymi fenomenami pewnych liczb jako ich miary. Jest to problem mierzalności, leżący u podstaw wszelkich zastosowań. Zajmują się nim różne specjalności naukowe nie należące do matematyki. Termin „geometria" został zaanektowany przez matematyków i dlatego musiała powstać geodezja, której przecież nikt, tak samo jak telemetrii, biometrii czy ekonometrii, nie zaliczy do matematyki. Pomiar jest tym, co łączy świat z matematyką i stwarza warunki jej użytecznego zastosowania. Na nic są wszelkie rozważania nad wielkościami, których nie można ustalić ani bezpośrednim pomiarem, ani pomiarem ich efektów. Dariusz ciągnąc na Grecję liczył swoje wojska, w średniowieczu liczono anioły. To pierwsze jest realne, a drugie nie, i dlatego świat obecny częściej liczy na wojska niż na anioły.

Nie ulega wątpliwości, że eksplozję zastosowań matematyki zawdzięczamy w dużej mierze rozwojowi techniki pomiarów. Jak dalece ten postęp był uwarunkowany rozwojem matematyki, to inna sprawa. Drugą przyczyną jest rozwój maszyn matematycznych. Pomiary dostarczają liczb, ale zbyt wiele liczb mówi mniej niż gdyby ich wcale nie było. Trzeba dane liczbowe przeliczyć na wielkości sensowne, oświetlające zagadnienie, którego dotyczą i związane z możliwościami działania. Przeliczyć trzeba dokładnie i możliwie szybko. To umożliwiają maszyny matematyczne. Podobnie jak rozwinięcie techniki pomiarów, matematyka umożliwiła konstrukcję maszyn matematycznych. Nie chodzi tu o osobisty wkład

matematyków w ich konstrukcję i teorię. Maszyna jest zbudowana i liczy zgodnie z prawidłami matematyki, które muszą istnieć przed puszczeniem jej w ruch.

Nie od rzeczy może będzie jednak wspomnieć tu o pewnym objawie występującym coraz powszechniej, a w którym niektórzy chcieliby widzieć uniezależnienie się maszyn od matematyki. *L'appetit vient en mangeant.* Podobnie było z apetytem zastosowań, które żądały rozwiązywania coraz bardziej skomplikowanych zagadnień nie chcąc cierpliwie czekać na ich teorię matematyczną i szczegółowy opis liczbowy. Ponieważ dla praktyki wartościowe jest to co lepsze, choć niekoniecznie najlepsze, wyłoniła się możliwość symulowania na maszynie pewnych procesów i takiego ich ustawiania, aby efekty ich były lepsze niż te, które uzyskujemy dotychczasowymi metodami. Ten system przypomina doskonalenie postępowania metodą prób i błędów uwolnionego od kosztów pomyłek ponoszonych przy zdobywaniu doświadczenia. Metoda to zresztą od dawna znana, bowiem można się tu powołać na przykład gier wojennych lub na modele wodne akustycznych rozwiązań obiektów architektonicznych. Faktem jest jednak, że przy współczesnych maszynach matematycznych metoda ta zdobyła ogromne pole często nieoczekiwanych zastosowań. Czy eliminuje ona matematykę? Chyba nie, gdyż symulować możemy tylko zjawiska już poprzednio matematycznie opisane, wyniki symulacji opracowujemy matematycznie, a sam fakt istnienia problemów wymykających się obliczeniom jest znany od wieków. Matematyka nigdy nie miała pretensji do tego, aby cały postęp odbywał się tylko przy jej wyłącznym użyciu. Trzeba trochę pobłądzić przed ostatecznym zmatematyzowaniem.

Trzecim wreszcie, może jeszcze ważniejszym od dwóch poprzednich, czynnikiem umożliwiającym rozwój zastosowań jest rozprzestrzenienie się wiedzy matematycznej. Powiedziałbym, że trafiła ona pod strzechy, gdyby nie to, że strzech coraz mniej, a matematyki coraz więcej. Faktem jest jednak, że wykształcenie zarówno zawodowe, jak i wyższe we wszystkich kierunkach zawiera coraz więcej matematyki, co pozwala fachowcom na ujmowanie matematyczne procesów, z którymi się stykają, na znajdowanie rozwiązań problemów, które przed nimi stoją, za pomocą matematyki, a wreszcie, *last but not least*, na porozumiewanie się między sobą językiem matematycznym, który użyty poprawnie eliminuje wiele pomyłek pochodzących z wieloznaczności słów języka potocznego.

Oczywiście żaden z trzech wymienionych warunków nie gwarantuje jeszcze rozwoju zastosowań matematyki, a nawet nie gwarantują go wszystkie trzy łącznie. Nie ma bowiem rozwoju zastosowań bez rozwoju samej matematyki. Ściślej powiedzielibyśmy to może tak: warunkiem koniecznym rozwoju teorii i praktyki pomiarów, rozwoju maszyn matematycznych i sposobów ich użycia, a wreszcie rozwoju wiedzy matematycznej w społeczeństwie, jest rozwój samej matematyki. To sformułowanie

jest słuszne i oddziela matematykę od jej zastosowań barierą nauk (zajmujących się mierzeniem), sprzętem (maszyny matematyczne) i społeczeństwem fachowców wykształconych matematycznie, lecz nie będących matematykami. Tylko spostrzeżenie tego faktu pozwoli nam na właściwe zrozumienie ogromnej roli matematyki w matematyzacji współczesnego świata. Językoznawca nie jest poetą, fizyk nie jest inżynierem, biolog nie jest lekarzem. Tak samo matematyk nie stosuje swojej nauki, choć zastosowania te umożliwia i jest w dużej mierze za nie odpowiedzialny.

Kupcy pytali, jak wiele jaj trzeba dać za 13 przepiórek, jeśli za każdą przepiórkę trzeba dać 8 jajek. To zadanie może wykonać człowiek umiejący liczyć przedmioty, metodą symulacji na kamieniach, jeśli nie chce potłuc jajek. Tak właśnie postąpił według „Faraona" Prusa uczony pisarz, któremu dobry Amon zadał podobne pytanie. Pisarz ten nie był matematykiem. Cała abstrakcja, na którą się zdobył, polegała na tym, że zastąpił jajka kamieniami, wiedząc o tym, że rodzaj przedmiotu nie wpływa na liczebność zbioru liczonego. Gdybyśmy się jednak ograniczali wyłącznie do konkretnych odpowiedzi na szczegółowe pytania zadawane nam przez sytuacje, w której stawiają nas dobre i złe bogi, nie mielibyśmy dotychczas tabliczki mnożenia, która nic nie mówi o jajkach, przepiórkach, a nawet takich liczmanach, jakimi były w naszym przykładzie kamienie. Abstrakcyjność tabliczki mnożenia i opartych na niej algorytmów oddala ją od konkretów, a za to rozszerza zasięg, umożliwiając jej stosowanie we wszystkich typowych sytuacjach, w których musimy mnożyć liczby. Metody i twierdzenia matematyczne mają tym więcej zastosowań, im są bardziej abstrakcyjne.

To, że matematyk nie zajmuje się zastosowaniami matematyki nie oznacza oczywiście, że ich nie śledzi i nie rozwija swej nauki tak, aby im wyjść naprzeciw. Sprzężenie zwrotne między teorią a praktyką jest konieczne we wszelkich naukach, nie tylko w matematyce. Ale matematyk nie może się zajmować zastosowaniami nie dlatego, że — jak chcieliby niektórzy — umieszczony na wyżynach swojej abstrakcji nie chce walać sobie rąk robotą, którą uważa za przyziemną. Nie, nie o to tu chodzi. Jak już mówiłem, matematyka jest abstrakcyjna i ta jej własność powoduje prawie nieograniczony krąg jej zastosowań. Stosując matematykę nie jest obojętne jak, co i kiedy się stosuje. W zastosowaniach problem nie jest abstrakcyjny, ale konkretny i na tym konkrecie trzeba się znać. Byłoby lekceważeniem innych nauk i praktycznej wiedzy fachowców, gdybyśmy zastosowania zawierzyli matematykom. Stosowanie matematyki bez znajomości przedmiotu zastosowań prowadzi do gorszych błędów niż te, których może się dopuścić dobry praktyk bez przygotowania matematycznego. Oczywiście można się zapatrywać na ten problem, jak na każdy inny, który występuje na styku dwóch dyscyplin naukowych i żądać dokształcania matematyków

w naukach realnych, tak samo jak kształcimy fachowców w matematyce. W przypadku matematyki sytuacja nie jest jednak symetryczna. Inżynier musi znać matematykę. Jakiej inżynierii mielibyśmy uczyć matematyka? Współczesny ekonomista nie może się obejść bez aparatu matematycznego. Narzędzia, których używa, zostały jednak stworzone przez ludzi bardzo dalekich od ekonomii. Przykładem niech tu będą twierdzenia Brouwera i Kakutaniego o punkcie stałym, które zawdzięczamy badaniom topologicznym, a które weszły już wraz z dowodami do współczesnych monografii ekonomii matematycznej.

Są dziedziny matematyki, które można uprawiać w zupełnym oderwaniu od konkretnej interpretacji ich twierdzeń i których rozwój jest wyznaczony potrzebami innych działów matematyki. Są i takie, których heurezą są fakty i związki opisywane przez nauki realne. W tym ostatnim przypadku nie tylko czerpiemy z życia kierunek rozwoju matematyki, ale intuicje leżące u podstaw teorii wskazują nam nawet metody, których należy użyć dla dowodów twierdzeń. Nie ma nic piękniejszego jak twierdzenie, które przy stosownej interpretacji nie tylko opisuje zjawisko, ale ponadto w każdym kroku jego dowodu można znaleźć odbicie mechanizmów rządzących tym zjawiskiem. Ale są twierdzenia, dla dowodu których musimy wyjść daleko poza heurezę leżącą u jego podstaw. Na przykład, wiedząc, że tylko funkcje rzeczywiste mają sens fizyczny, przenosimy się do dziedziny liczb zespolonych. Takie twierdzenia często nie tylko są jeszcze piękniejsze od poprzednich, a zagadka interpretacyjna dodaje im uroku, ale przeważnie głębiej oświetlają one aparat matematyczny, którego się używa, i znajdują ostatecznie szersze zastosowania od poprzednich.

Jest faktem, że matematyka to nie są zastosowania matematyki, a zastosowania matematyki nie są matematyką. Slogan „matematyk zrobi to lepiej", z którego wnioskiem miała być ścisła współpraca matematyków z praktyką, przyczynił się do zahamowania rozwoju matematycznego pewnej grupy młodych ludzi i równocześnie powstrzymał w naszym kraju rozwój dyscyplin matematycznych blisko związanych z zastosowaniami, a szybko rozwijających się za granicą. Tymczasem sprawa ma się tak, że współpraca matematyka z przedstawicielami innych nauk daje cenne wyniki tak długo, jak długo matematyk tkwi w matematyce, wzbogaca matematykę i przekazuje swoją wiedzę praktyce do wykorzystania. W momencie, gdy matematyk pragnie zastąpić praktyka, sprawa współpracy upada, a matematyk przestaje być matematykiem, choć czasem może się jeszcze długo łudzić pozorami efektów ekonomicznych, które przynosi jego praca. Jak bowiem mierzyć te efekty? Matematyka w praktyce gospodarczej służy przede wszystkim postępowi organizacyjno-technicznemu. Jest to problem niesłychanie aktualny we współczesnej ekonomii. Wystarczy jednak przejrzeć ostatnie prace na ten temat — prace ekono-

miczne, aby zobaczyć, jak wiele jest tu do zrobienia. Jak zapóźniona jest sprawa mierzenia efektów ekonomicznych postępu w stosunku do teorii mierzenia innych wielkości ekonomicznych. Dlatego, i nie tylko dlatego, sądzę, że nie można — jak się to czasem praktykuje — osądzać pracy matematyka efektami gospodarczymi.

Wszystkiemu, co tu zostało powiedziane, pozornie przeczy praktyka naszego życia. Jak się okazało kilkuset matematyków pracuje w przemyśle, instytutach resortowych i różnych działach gospodarki narodowej. Staraliśmy się wyjaśnić, co leży u podstaw tego zjawiska. Przeprowadziliśmy ankietę i obserwowaliśmy na ostatnim Zjeździe Matematycznym w Katowicach tych dzielnych młodych ludzi pełnych dobrej woli służenia swą wiedzą na tych stanowiskach, na których się znaleźli. Wydaje się, że ich obecność na styku matematyki i praktyki wynika z zapotrzebowania na matematykę. Ale czy na matematyków? Czy fakt zaspokojenia tego zapotrzebowania przy pomocy ludzi matematycznie i tylko matematycznie wykształconych nie jest zjawiskiem substytuowania towarem posiadanym towaru, którego brak i który trzeba dopiero wytworzyć? Czy więc zjawisko zatrudniania obecnie matematyków w praktyce stanowi objaw trwały, czy też wskazuje na konieczność utworzenia nowego zawodu, w którym duża komponenta matematyczna będzie się łączyć z nauką innych przedmiotów, uzdalniając w ten sposób wykształconą jednostkę do skutecznego działania w wybranych gałęziach gospodarki? Trudno na to pytanie odpowiedzieć, ale warto wspomnieć, że na świecie powstają już studia specjalistyczne kształcące specjalistów z pogranicza matematyki i techniki. Stwarza się w ten sposób medium przenoszące wiedzę matematyczną do praktyki. Typ specjalisty od zastosowań matematyki. Zapotrzebowanie na matematykę jest w chwili obecnej tak duże, że trzeba stworzyć nowe arterie, którymi myśl matematyczna będzie płynąć do zastosowań.

Aby krótko streścić tezy, które chciałem przedstawić powiem: Wpływ matematyki na życie naukowe, gospodarcze i społeczne kraju dokonuje się przez przekazywanie wiedzy matematycznej tym, którzy ją potrafią stosować. To, zarówno jak pomnażanie tej wiedzy, należy do matematyków. Zastosowania matematyki, ich rozwój i efekty zależą od mierzalności wielkości, do których matematyka ma być stosowana, od możliwości szybkich i dokładnych obliczeń, a wreszcie od poziomu wykształcenia specjalistów niematematyków. Warunkiem niezbędnym sprawnego działania wszystkich tych trzech elementów jest wysoki poziom matematyki jako nauki i potencjał twórczy we wszystkich jej dyscyplinach. Matematyka nie jest jednak panaceum sama w sobie, jest zawsze tylko narzędziem pomocniczym nauk i działalności praktycznej. Narzędziem bardzo sprawnym i użytecznym, ale tylko narzędziem. Nie daje się tego narzędzia stosować bez głębokiej wiedzy pozamatematycznej i bardzo trudno

określać efekty jego użycia. Wiadomo jednak, że jest niezbędne i że zakres jego użycia będzie wzrastać. Należy więc je doskonalić i kierować się przy tym nie tylko doraźnymi korzyściami, lecz przede wszystkim jej rolą, jaką spełnia w twórczej pracy społeczeństwa.

Mówiłem o matematyce, sądzę jednak że mutatis mutandis mogliby za mną podobne myśli wypowiedzieć przedstawiciele wielu innych nauk, które zgodnie z panującą nomenklaturą nazywamy obecnie podstawowymi.