ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. CARTAN (Paryż)

O twierdzeniu przygotowawczym Weierstrassa

Niewiele jest twierdzeń równie znanych, jak twierdzenie nazwane przez Weierstrassa „Vorbereitungssatz". Sława ta jest usprawiedliwiona, gdyż twierdzenie to jest niezbędnym narzędziem we współczesnym rozwinięciu matematyki, zarówno w geometrii analitycznej(1), jak i geometrii różniczkowej.

1. Vorbereitungssatz pojawia się po raz pierwszy w zbiorze prac pt. *Abhandlungen aus der Funktionenlehre* opublikowanym przez Weierstrassa w 1886 r. Podczas gdy cztery pierwsze artykuły tego zbioru są powtórzeniem prac wcześniejszych publikowanych w latach 1876, 1880 i 1881 w różnych czasopismach, Vorbereitungssatz figuruje na początku piątego artykułu, o którym Weierstrass mówi w przedmowie (Vorwort): „Die fünfte Abhandlung, welche eine Reihe von Sätzen über die eindeutigen Funktionen mehrerer Argumente enthält, von denen ich in meinen Vorlesungen über die Abel'schen Transcendenten gebrauch mache, habe ich im Jahre 1879 für meine Zuhörer lithographieren lassen, ohne sie in den Buchhandel zu geben". Paragraf 1 zatytułowany jest Vorbereitungssatz, z następującą wskazówką w odsyłaczu: „Diesen Satz habe ich seit dem Jahre 1860 wiederholt in meinen Universitätsvorlesungen vorgetragen".

Sformułowanie Weierstrassa jest dobrze znane: niech $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu zera, załóżmy, że

$$F(0, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad F_0(x) = F(x, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0,$$

i niech p będzie liczbą całkowitą, dla której $F_0(x) = x^p G(x)$, $G(0) \neq 0$. Wtedy istnieje wielomian wyróżniony

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p$$

(którego współczynniki $a_j(x_1, \ldots, x_n)$ są funkcjami holomorficznymi w otoczeniu zera i zerującymi się w zerze) i funkcja $g(x, x_1, \ldots, x_n)$ holomorficzna, nie równa zeru w otoczeniu zera, takie że

$$F = fg \qquad \text{w otoczeniu zera.} \tag{1}$$

(1) Termin geometria analityczna rozumiemy w sensie Serré'a (*Przypisek tłumacza*).

W swoim dowodzie Weierstrass rozważa pochodną logarytmiczną $\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$; w dziwny sposób miesza formalne rozwinięcia w szeregi potęgowe z faktem, że zmienne należą do ciała liczb zespolonych, gdyż bez użycia explicité całki Cauchy'ego stosuje jej konsekwencje. Wariant dowodu Weierstrassa należący do Simarta znajduje się w *Traité d'Analyse* Emila Picarda (tom II, pierwsze wydanie 1893). Simart dowodzi najpierw, że dla ustalonego dostatecznie małego $r > 0$ liczba pierwiastków równania $F(x, x_1, \ldots, x_n) = 0$ położonych w dysku $|x| < r$ jest niezależna od $x_1, \ldots, x_n$, o ile $|x_i| < r'$ i r' jest dostatecznie małe (w istocie, wystarczyłoby założyć, że $F(x, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ dla $|x| = r$, $|x_i| < r'$ i zastosować klasyczne twierdzenie o indeksie płaskiej krzywej zamkniętej). Niech ξ_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ będą tymi pierwiastkami; wszystko sprowadza się do udowodnienia, że elementarne funkcje symetryczne zmiennych ξ_j są holomorficzne względem $(x_1, \ldots, x_n)$ dla $|x_i| < r'$. Dowodzi się za pomocą całki Cauchy'ego, że funkcje

$$s_k = \sum_j (\xi_j)^k$$

są holomorficzne, a następnie (jak to robił już Weierstrass) stosuje się formuły wyrażające elementarne funkcje symetryczne zmiennych ξ_j jako funkcje s_k. W rzeczywistości w *Traktacie* Picarda przedstawiony dowód dotyczy funkcji F dwu zmiennych $(n = 1)$.

2. W okresie dziesięcioleci, które nastąpiły po opublikowaniu Vorbereitungssatz, dowód, a później nawet sformułowanie twierdzenia było w rozmaity sposób zmieniane. Książka Osgooda [1] powtarza mniej więcej dowód z Traktatu Picarda. W 1927 r. Wirtinger [2] podejmuje metodę Weierstrassa (pisząc rozwinięcia logarytmów w szeregi potęgowe), ale robi ścisłe rozróżnienie między formalnym aspektem rachunku a badaniem zbieżności otrzymanych szeregów. Wirtinger zdaje się wiedzieć, że 17 lat wcześniej Brill [3] podał już co najmniej w przypadku dwu zmiennych rachunek formalny współczynników szukanego szeregu i to metodą bezpośrednią bez wprowadzania logarytmów; Brill udowodnił również zbieżność tego szeregu. Brill z kolei nie wiedział, że w 1905 Lasker [4], w niezmiernie bogatej pracy poświęconej teorii ideałów w pierścieniu zbieżnych szeregów potęgowych wskazał zasady rachunku formalnego i rachunku majorantami według Cauchy'ego; w istocie, po sformułowaniu twierdzenia przygotowawczego w formie Weierstrassa, dodaje: „Dieser Satz ist von Weierstrass gegeben und bewiesen worden. Der Beweis könnte auch durch Koeffizientenvergleichung und bezüglich der Konvergenz, nach dem Cauchyschen Verfahren über die Integrale analytischer Differentialgleichungen geführt werden". Szkoda, że Lasker nie podjął trudu wskazania żadnego rachunku, ale bez wątpienia miał on zupełnie jasne

rozeznanie jaką metodę zastosować. Dalej wrócimy jeszcze do tej fundamentalnej pracy Laskera i zastosowań twierdzenia przygotowawczego znajdujących się w niej.

Wydaje się, że praca Laskera była przez długi czas zapomniana; W. Rückert w swoim klasycznym dziele z 1933 r. [5], mimo upływu 28 lat, nie cytuje Laskera. O ile mi wiadomo dopiero w 1929 r. znaleźć można w literaturze sformułowanie Vorbereitungssatz różne od pierwotnego sformułowania Weierstrassa, mianowicie w postaci twierdzenia o dzieleniu. Späth [6] wypowiada je w sposób następujący: jeżeli $F(x, 0, \ldots, 0) = x^p G(x)$, $G(x) \neq 0$, to istnieje algorytm dzielenia, który każdemu szeregowi zbieżnemu $A(x, x_1, \ldots, x_n)$ przyporządkowuje pewien szereg zbieżny $Q(x, x_1, \ldots, x_n)$, dla którego $A - FQ = R$ jest wielomianem względem x stopnia $< p$ (o współczynnikach holomorficznych zmiennych $x_1, \ldots, x_n$); szereg Q o tych własnościach jest jedyny. W dowodzie Späth posługuje się najpierw rachunkiem formalnym, a następnie pokazuje zbieżność otrzymanego szeregu potęgowego Q. Rückert, w cztery lata później, podejmuje sformułowanie Spätha (które odtąd będziemy nazywać twierdzeniem o dzieleniu) i pokazuje, że twierdzenie Weierstrassa w swojej pierwotnej formie jest jego bezpośrednią konsekwencją: weźmy mianowicie $A = x^p$; otrzymamy

$$x^p - R = FQ$$

i widzimy natychmiast, że współczynniki wielomianu $R(x)$ zerują się, gdy $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, oraz że $Q(0, \ldots, 0) \neq 0$. Około roku 1930 stało się jasne, że Vorbereitungssatz jest prawdziwe w pierścieniu zbieżnych szeregów potęgowych o współczynnikach w dowolnym ciele z waluacją zupełną, niedyskretną; wydaje się jednak, że w tym okresie uwaga ta nie została zrobiona explicité.

3. Nie będzie może bezużyteczne przytoczenie tutaj dowodu twierdzenia o dzieleniu dla szeregów formalnych, gdyż dostarczy to nam okazji do sformułowania wypowiedzi bardziej ogólnej, z której wynikają uogólnienia stosowane ostatnio w teorii szeregów formalnych restryktywnych (2), o współczynnikach w ciele z waluacją ultrametryczną (niearchimedesowa) [7]. Niech najpierw K będzie dowolnym ciałem przemiennym; szereg formalny

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) \in K[[x, x_1, \ldots, x_n]]$$

(2) Szereg formalny $\sum_a c_a x^a$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, n zmiennych o współczynnikach c_a w pierścieniu topologicznym A nazywamy *restryktywnym*, jeżeli dla każdego otoczenia V zera w A tylko skończona liczba współczynników c_a nie należy do V. (*Przypisek tłumacza.*)

Od redakcji. Tłumaczem jest J. Bochnak.

może być rozważany jako szereg formalny zmiennej x, o współczynnikach w pierścieniu szeregów formalnych $K[[x_1, \ldots, x_n]] = A$. Pierścień A jest pierścieniem lokalnym, Hausdorffa i zupełnym (względem topologii definiowanej przez potęgi ideału maksymalnego pierścienia A). Rozważmy bardziej ogólnie pierścień przemienny A i jego ideał M, dla którego A jest zupełną przestrzenią Hausdorffa względem topologii definiowanej przez potęgi M. Niech $K = A/M$ i niech $\varrho\colon A \to K$ będzie homomorfizmem kanonicznym; indukuje on homomorfizm

$$A[[x]] \to K[[x]],$$

który również oznaczać będziemy przez ϱ. Niech $F(x) \in A[[x]]$ będzie takie, że

$$\varrho(F(x)) = \sum_{i \geqslant p} k_i x^i, \qquad k_i \in K,$$

z k_p odwracalnym w K. Mamy wtedy następujące twierdzenie o dzieleniu:

TWIERDZENIE. *Każdy element $A(x) \in A[[x]]$ definiuje jedyny element $Q(x) \in A[[x]]$, dla którego*

$$A(x) - F(x)Q(x) = R(x)$$

jest wielomianem stopnia $< p$ (o współczynnikach w A).

Dowód. Z założenia wynika, że

$$F(x) = \sum_{i<p} \lambda_i x^i + x^p G(x),$$

gdzie $\lambda_i \in M$ dla $i < p$ i $\varrho(G(0))$ odwracalne w K. Tym samym $G(0)$ jest odwracalne w A, ponieważ A jest pierścieniem Hausdorffa i zupełnym; a zatem $G(x)$ jest odwracalne w $A[[x]]$. Mamy więc

$$F(x) = G(x)\big(x^p - H(x)\big),$$

przy czym wszystkie współczynniki $H(x)$ są w M. Ponieważ $G(x)$ jest odwracalne, wszystko sprowadza się do znalezienia $\overline{Q}(x) = G(x)Q(x)$, dla którego

$$A(x) \equiv \big(x^p - H(x)\big)Q(x), \tag{2}$$

gdzie kongruencja $\equiv$ jest brana modulo A — modułu wielomianów (względem x) stopnia $< p$. Jednoznaczność $Q(x)$ jest natychmiastowa: jeśli

$$\big(x^p - H(x)\big)Q(x) \equiv 0 \tag{3}$$

i jeżeli wszystkie współczynniki $Q(x) = \sum_{i \geqslant 0} q_i x^i$ są elementami pewnej potęgi M^k ideału M, wówczas współczynniki te są elementami M^{k+1}, gdyż patrząc we wzorze (3) na współczynniki przy x^{p+1} w $H(x)Q(x)$ wi-

dzimy, że $q_i \in M^{k+1}$. Tak więc wszystkie q_i są zerami. Istnienie $Q(x)$ spełniającego wzór (2) dowodzi się w sposób następujący: relacje

$$\begin{aligned} x^p Q_0(x) &\equiv A(x), \\ x^p Q_1(x) &\equiv H(x) Q_0(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^p Q_{k+1}(x) &\equiv H(x) Q_k(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

definiują z coraz lepszym przybliżeniem szeregi $Q_k(x)$. Stosując indukcję względem k widzimy, że współczynniki $Q_k(x)$ są elementami M^k; zatem szereg $\sum_{k\geqslant 0} Q_k(x)$ jest zbieżny w $A[[x]]$, gdyż A jest pierścieniem zupełnym. Jego suma $Q(x)$ spełnia (2).

Przytoczony dowód, zastosowany w przypadku gdy $A = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ i K jest ciałem z waluacją zupełną, niedyskretną, pozwala stwierdzić, przez prosty rachunek majorantami, że jeśli $F(x)$ i $A(x) \in K[[x, x_1, \ldots, x_n]]$ są szeregami zbieżnymi, to szereg $Q(x)$ jest również zbieżny.

4. Twierdzenie o dzieleniu w przypadku ciała liczb zespolonych C. W tym przypadku użycie całki Cauchy'ego pozwala na otrzymanie dodatkowych użytecznych informacji. Umówmy się, że zwrot „funkcja jest holomorficzna na zbiorze zwartym Δ" oznacza, że jest ona zdefiniowana w pewnym otoczeniu zbioru Δ. Oznaczmy przez $\Delta(r, r')$ zbiór zwarty

$$|x| \leqslant r, \quad |x_i| \leqslant r', \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

W dalszym ciągu $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ będzie oznaczać funkcję holomorficzną w początku układu współrzędnych, dla której $F(x, 0, \ldots, 0) = x^p G(x)$, $G(0) \neq 0$. Dla $r > 0$ dostatecznie małego, funkcja F jest holomorficzna na zbiorze zwartym $\Delta(r, 0)$ oraz

$$\text{(i)} \qquad F(x, 0, \ldots, 0) \neq 0 \quad \text{dla } 0 < |x| \leqslant r.$$

Mając r w ten sposób wybrane, weźmy $r' > 0$ tak małe, aby były spełnione następujące warunki:

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} &F \text{ jest holomorficzna na } \Delta(r, r'), \\ &F(x, x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \quad \text{dla } |x| = r, \ |x_i| \leqslant r'. \end{aligned}$$

TWIERDZENIE. *Jeżeli r i r' spełniają warunki* (i), (ii), *wtedy każdej funkcji $A(x, x_1, \ldots, x_n)$ holomorficznej na $\Delta(r, r')$ odpowiada dokładnie jedna funkcja $Q(x, x_1, \ldots, x_n)$ holomorficzna na $\Delta(r, r')$, dla której*

$$A - FQ = R$$

jest wielomianem względem x stopnia $< p$. Ponadto istnieje stała $a > 0$ (zależna od F, r i r', lecz niezależna od A), dla której

$$\sup_{\Delta(r,r')} |Q(x, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a \sup_{\Delta(r,r')} |A(x, x_1, \ldots, x_n)|.$$

Twierdzenie to ma interesującą konsekwencję. Przed jej sformułowaniem wygodnie będzie wprowadzić pewną notację. Dla dowolnego punktu a przestrzeni C^n mamy zdefiniowany pierścień O_a kiełków (w punkcie a) funkcji holomorficznych w otoczeniu a. Kiełek (w punkcie a) funkcji holomorficznej w otoczeniu a, będziemy oznaczać przez $\gamma_a(f)$. Przy tym zapisie, rozważmy układ funkcji $f_1, \ldots, f_p$ holomorficznych w zbiorze otwartym $V \subset C^n$; niech $a \in V$. Będziemy mówić, że zbiór otwarty U, $a \in U \subset V$, jest uprzywilejowany względem $(f_1, \ldots, f_p)$, jeżeli dla każdej funkcji holomorficznej w U, dla której $\gamma_a(f)$ należy do ideału pierścienia O_a generowanego przez $\gamma_a(f_p), \ldots, \gamma_a(f_p)$, istnieją funkcje $c_1, \ldots, c_p$ holomorficzne w U i takie, że $f = \sum_{i=1}^{p} c_i f_i$ w U. Twierdzenie o dzieleniu w sformułowaniu wyżej przytoczonym pozwala udowodnić, por. [8], stosując indukcję względem n, że punkt a ma bazę otoczeń uprzywilejowanych względem $(f_1, \ldots, f_p)$.

5. Kilka zastosowań twierdzenia Weierstrassa. Dwa z nich wyróżnione są już w pracy Laskera [4]:

1) *Pierścień $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ zbieżnych szeregów potęgowych o współczynnikach w ciele K z waluacją zupełną, niedyskretną jest noetherowski; tzn. każdy ideał tego pierścienia ma skończony układ generatorów.*

2) *Pierścień $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest pierścieniem Gaussa, tzn. jest pierścieniem całkowitym, w którym każdy ideał główny $\neq 0$ można w jednoznaczny sposób zapisać w postaci iloczynu ideałów głównych nieredukowalnych.*

Zarówno jednej jak i drugiej własności dowodzi się stosując indukcję względem n. W rozumowaniu indukcyjnym stosuje się twierdzenie przygotowawcze; pozwala ono np. w przypadku 2) sprowadzić zagadnienie do sytuacji, w której można zastosować twierdzenie Gaussa, mówiące że pierścień wielomianów jednej zmiennej, o współczynnikach w pierścieniu Gaussa, sam jest również pierścieniem Gaussa.

Oczywiście analogiczne twierdzenia są prawdziwe w pierścieniu szeregów formalnych $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ (o współczynnikach w dowolnym ciele K); wynika to z twierdzenia przygotowawczego dla szeregów formalnych (w dowodzie, że pierścień ten jest noetherowski, twierdzenia przygotowawczego można zresztą nie stosować).

Twierdzenie przygotowawcze służy również do głębszych badań własności ideałów pierścienia $A = K\{x_1, \ldots, x_n\}$. Wyposażmy pierścień A

w pewną bardzo słabą topologię: element pierścienia Λ jako szereg wyznaczony jest przez podanie współczynników; wobec tego można identyfikować Λ (jako przestrzeń wektorową nad K) z podprzestrzenią przestrzeni K^I, gdzie $I = N^n$ (N — zbiór liczb całkowitych $\geqslant 0$). Wyposażmy K w topologię zdefiniowaną przez wartość bezwzględną, a K^I w topologię produktową; ta ostatnia indukuje na Λ topologię zbieżności punktowej współczynników. Jest rzeczą godną uwagi, że każdy ideał pierścienia $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest domknięty względem tej topologii (a więc także względem każdej silniejszej topologii). Aby to zobaczyć, stosuje się twierdzenia o dzieleniu. Postępuje się w sposób następujący: rozważmy bardziej ogólnie Λ-moduł M skończonego typu (tzn. generowany przez skończoną liczbę elementów); wybór układu p generatorów modułu M definiuje izomorfizm między M a pewnym ilorazem modułu Λ^p (suma prosta p egzemplarzy Λ); topologia ilorazowa indukowana przez topologię na Λ^p definiuje z kolei pewną topologię na M, niezależną od wyboru generatorów. Każde odwzorowanie Λ-liniowe $\varphi\colon M \to M'$ Λ-modułów skończonego typu jest więc ciągłe, i jeśli ponadto φ jest suriektywne, topologia na M' jest ilorazem topologii na M. Pozostaje do wykazania, że każdy podmoduł N modułu skończonego typu M jest domknięty w M (co uogólnia wcześniej wypowiedzianą własność ideałów Λ). Wszystko sprowadza się do udowodnienia, że topologia modułu ilorazowego M/N jest topologią Hausdorffa. Ogólniej pokazuje się, że każdy moduł M skończonego typu jest Hausdorffa: niech $f\colon \Lambda^p \to M$ będzie Λ-liniowym odwzorowaniem suriektywnym; wystarczy pokazać istnienie K-liniowego i ciągłego odwzorowania $g\colon M \to \Lambda^p$, dla którego złożenie $f \circ g$ jest identycznością; istnienia g dowodzi się indukcyjnie względem liczby zmiennych pierścienia $\Lambda = K\{x_1, \ldots, x_n\}$ i właśnie w rozumowaniu indukcyjnym stosuje się twierdzenie o dzieleniu.

6. Twierdzenie przygotowawcze pozwala również przejść od własności punktowych do własności lokalnych. Wytłumaczymy to na przykładzie twierdzenia Oki o koherencji snopa strukturalnego zespolonej rozmaitości analitycznej. Weźmy (co nie zmniejszy ogólności rozważań) zbiór otwarty U zawarty w przestrzeni C^n. Niech $f_1, \ldots, f_p$ będzie skończonym układem funkcji holomorficznych w U; dla każdego $a \in U$ rozważmy podmoduł R_a modułu $(O_a)^p$ utworzony z układów $(c_1, \ldots, c_p)$ kiełków funkcji holomorficznych w a, dla których $\sum_{i=1}^{r} c_i \gamma_a(f_i) = 0$ (R_a jest modułem relacji holomorficznych między funkcjami f_i w punkcie a). Twierdzenie Oki mówi, że snop podmodułów $R_a \subset (O_a)^p$ jest koherentny w następującym znaczeniu: weźmy q układów każdy złożony z p funkcji holomorficznych w pewnym wspólnym otoczeniu V punktu a

$$(c_i^1)_{1 \leqslant i \leqslant p}, \ \ldots, \ (c_i^q)_{1 \leqslant i \leqslant p},$$

dla których $\sum_{i=p}^{p} c_i^j f_i = 0$ w otoczeniu a (dla $1 \leqslant j \leqslant q$), i załóżmy, że układy

$$(\gamma_a(c^1)), \ldots, (\gamma_a(c^q))$$

generują O_a — moduł R_a. Twierdzenie Oki mówi, że dla wszystkich $x \in U$, dostatecznie bliskich a, q układów

$$(\gamma_x(c_i^1)), \ldots, (\gamma_x(c_i^q))$$

generuje O_x — moduł R_x. Dowód w istotny sposób wykorzystuje twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa. Zaobserwujmy, że twierdzenie Oki pozostaje prawdziwe, jeżeli ciało liczb zespolonych C zastąpimy dowolnym ciałem z waluacją zupełną, niedyskretną.

Inne twierdzenie, którego dowód wymaga użycia twierdzenia Weierstrassa, jest następujące: rozważmy w zbiorze otwartym $V \subset C^n$ (teraz jest rzeczą istotną korzystać z algebraicznej domkniętości ciała C), podzbiór $M \subset U$ złożony z punktów, w których jednocześnie zerują się dane funkcje $f_1, \ldots, f_p$, holomorficzne w U. Dla punktu $a \in U$ oznaczmy przez I_a ideał pierścienia O_a utworzony z kiełków funkcji holomorficznych, zerujących się identycznie na M w otoczeniu a (zauważmy, że jeśli $a \notin M$, wtedy $I_a = O_a$ i odwrotnie). Dowodzi się [11], że snop ideałów I_a jest koherentny, jeżeli dla funkcji $g_1, \ldots, g_q$ holomorficznych w otoczeniu a, kiełki $\gamma_a(g_1), \ldots, \gamma_a(g_q)$ generują ideał I_a, wtedy dla wszystkich punktów x dostatecznie bliskich a, $\gamma_x(g_1), \ldots, \gamma_x(g_q)$ generują ideał I_x.

7. Pewne uogólnienie twierdzenia o dzieleniu. Wprowadźmy najpierw pojęcie K-algebry analitycznej (K oznacza, jak zwykle, ciało z waluacją zupełną, niedyskretną). K-algebra analityczna A jest, z definicji, K-algebrą nie redukującą się do zera, dla której istnieje liczba całkowita $n \geqslant 0$ i suriektywny homomorfizm algebry $K\{x_1, \ldots, x_n\} \to A$. Jest oczywiste, że taka algebra A jest algebrą lokalną, której ideał maksymalny $M(A)$ jest obrazem ideału maksymalnego w $K\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Mamy następujące twierdzenie [12]:

TWIERDZENIE. *Niech A i B będą K-algebrami analitycznymi, $u: A \to B$ homomorfizmem algebr. Niech $b_i \in B$ (skończony układ elementów). Wtedy następujące dwa warunki są równoważne:*

(i) *obrazy b_i w K-przestrzeni wektorowej $B/M(A)\cdot B$ generują tę przestrzeń;*

(ii) *b_i generują B względem struktury A-modułu zdefiniowanej przez u.*

($M(A)\cdot B$ oznacza przestrzeń wektorową B generowaną przez elementy postaci $u(m)b$, gdzie $m \in M(A)$ i $b \in B$).

W sposób identyczny (ii) implikuje (i). Implikacja w przeciwnym kierunku pozwala, jak zobaczymy, na otrzymanie twierdzenia o dzieleniu: niech $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ i liczba całkowita p będą jak w twierdzeniu Weier-

strassa i niech B będzie ilorazem algebry $K\{x, x_1, \ldots, x_n\}$ przez ideał generowany przez F. Przyjmijmy $A = K\{x_1, \ldots, x_n\}$ i weźmy jako homomorfizm u: $A \to B$ złożenie naturalnej iniekcji $K\{x_1, \ldots, x_n\} \to K\{x, x_1, \ldots, x_n\}$ z odwzorowaniem kanonicznym $K\{x, x_1, \ldots, x_n\}$ na ilorazie B. Przestrzeń wektorową $B/M(A)\cdot B$ można oczywiście identyfikować z ilorazem algebry wielomianów $K[x]$ przez ideał generowany przez x^p; przestrzeń ta ma więc jako bazę obrazy elementów $1, x, \ldots, x^{p-1}$ w $B/M(A)\cdot B$. Zastosujmy twierdzenie biorąc za elementy b_i obrazy elementów $1, x, \ldots, x^{p-1}$ w B. Otrzymamy: elementy te generują B jako A-moduł, co jest dokładnie treścią twierdzenia o dzieleniu.

Wniosek. *Jeżeli K-przestrzeń wektorowa $B/M(A)\cdot B$ jest skończonego wymiaru, to algebra B jest A-modułem skończonego typu.*

8. Badanie lokalne zbiorów analitycznych. Ograniczymy się, co nie wpłynie na ogólność rozważań, do sytuacji, w której bada się, w otoczeniu punkt $O \in C^n$, zbiór M rozwiązań układu równań

$$f_i(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

przy funkcjach f_i holomorficznych w otoczeniu O. Ściślej, rozważa się kiełek M_0 zbioru M w punkcie O. W zasadzie, jeżeli wierzyć Osgoodowi [1], sam Weierstrass rozważał następujące twierdzenie: M_0 jest, w jedyny sposób, przedstawialne jako skończona suma nieredukowalnych kiełków zbiorów analitycznych; co więcej podany jest ścisły opis geometryczny kiełka nieredukowalnego, w którym interweniuje pojęcie wymiaru kiełka. W rzeczywistości, odnosząc się do pracy Weierstrassa według referencji danych przez Osgooda, nie udało się znaleźć kompletnych badań przypadku ogólnego i sądzę, że są one dziełem Rückerta [5]. W istocie chodzi o badanie kiełka zbioru analitycznego (w punkcie O) zdefiniowanego przez ideał pierścienia $C\{x_1, \ldots, x_n\}$, opierając się na fakcie, że ideał ten jest skończonego typu. (Przedstawienie tych zagadnień można znaleźć w pracach [13] i [23].)

Bada się najpierw przypadek, gdy I jest ideałem pierwszym, rozważając pierścień ilorazowy $C\{x_1, \ldots, x_n\}/I$, w danym przypadku całkowity. Dzięki twierdzeniu przygotowawczemu Weierstrassa, dowodzi się lematu o normalizacji analogicznego do tak użytecznego w teorii zbiorów algebraicznych: dokonując w razie potrzeby liniowej transformacji układu współrzędnych $x_1, \ldots, x_n$ przestrzeni C^n, sprowadza się rozważania do przypadku kiedy, dla odpowiedniego k całkowitego, homomorfizm będący złożeniem naturalnej iniekcji $C\{x_1, \ldots, x_k\} \to C\{x_1, \ldots, x_n\}$ z odwzorowaniem kanonicznym $C\{x_1, \ldots, x_n\}$ na iloraz $C\{x_1, \ldots, x_n\}/I$ jest iniekcją, dla której $C\{x_1, \ldots, x_n\}/I$ jest modułem skończonego typu nad $C\{x_1, \ldots, x_k\}$ (k jest wtedy wymiarem kiełka nieredukowalnego M_0, definiowanego przez ideał I). W tej sytuacji pozostaje do opisania struktura

geometryczna kiełka nieredukowalnego M_0 oraz pokazanie, że każdy kiełek funkcji holomorficznej zerującej się identycznie na M_0 należy do ideału I. Następnie wystarczy posłużyć się czysto algebraicznymi środkami teorii pierścieni, aby udowodnić, w przypadku dowolnego ideału I, że pewna potęga kiełka dowolnej funkcji holomorficznej zerującej się identycznie na kiełku zbioru analitycznego zdefiniowanego przez I, należy do I (Nullstellensatz Hilberta).

W ostatnich rozważaniach fakt, że ciało C jest algebraicznie domknięte, odgrywa zasadniczą rolę. Niemniej, twierdzenie przygotowawcze pozwala również na opis kiełków rzeczywistych zbiorów analitycznych. Subtelne badania przywiodły Łojasiewicza [14] do następującego ważnego rezultatu: niech f będzie rzeczywistą funkcją analityczną zdefiniowaną w otwartym zbiorze $U \subset R^n$, niech M będzie zbiorem punktów $x \in U$, w których $f(x) = 0$, i niech $d(x, M)$ oznacza odległość punktu $x \in U$ od zbioru M; wtedy dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ istnieją $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ takie, że

$$|f(x)| \geqslant \alpha (d(x, M))^{\beta} \quad \text{dla wszystkich } x \in K.$$

(Można powiedzieć, bardzo nieprecyzyjnie, że jeśli $x \notin M$, $f(x)$ nie jest zbyt małe.) Wynik ten pozwolił Łojasiewiczowi na rozwiązanie problemu dzielenia dystrybucji przez rzeczywistą funkcję analityczną, nie równą identycznie zeru. Z drugiej strony odgrywa on ważną rolę w ostatnio podanym przez Malgrange'a [15] dowodzie (wysoce delikatnym) różniczkowego twierdzenia przygotowawczego, o którym chciałbym powiedzieć teraz parę słów.

9. Różniczkowe twierdzenie przygotowawcze. Nie chodzi teraz o algebrę $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ szeregów zbieżnych, lecz o R-algebrę $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ kiełków funkcji różniczkowalnych. Sprecyzujmy: przez $x_1, \ldots, x_n$ oznaczmy n zmiennych rzeczywistych (współrzędne w przestrzeni R^n); funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ rzeczywista, określona i różniczkowalna (tj. klasy C^{∞}) w otoczeniu zera definiuje kiełek w zerze; zbiór $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ wszystkich kiełków ma strukturę pierścienia (zdefiniowaną przez dodawanie i mnożenie funkcji), lub ściślej, algebry nad ciałem liczb rzeczywistych R. Identyfikuje się algebrę $\varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1})$ z podalgebrą $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$, mianowicie z podalgebrą kiełków funkcji niezależnych od x_n. W tej sytuacji mamy

TWIERDZENIE MALGRANGE'A O DZIELENIU. *Niech* $F \in \varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$, $F(0, \ldots, 0) = 0$, $F(0, \ldots, 0, x_n) = (x_n)^p G(x_n)$, G *— różniczkowalna,* $G(0) \neq 0$. *Wtedy dla każdego* $A \in \varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ *istnieje* $Q \in \varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ *takie, że*

$$A - FQ = R$$

jest wielomianem względem x_n, *stopnia* $< p$, *o współczynnikach w* $\varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

W przeciwieństwie do tego co miało miejsce w przypadku analitycznym, jedyność Q nie jest tutaj już zapewniona. Niemniej, jak w przypadku analitycznym, twierdzenie o dzieleniu implikuje twierdzenie przygotowawcze: rzeczywiście, jeśli zastosuje się twierdzenie o dzieleniu do $A = (x_n)^p$, otrzyma się, przy F danym jak wyżej, istnienie wielomianu wyróżnionego

$$f = (x_n)^p + a_1(x_n)^{p-1} + \ldots + a_p,$$

o współczynnikach $a_i \in \varepsilon(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $a_i(0, \ldots, 0) = 0$ i takiego, że $f = FQ$, gdzie $Q \in \varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$, $Q(0, \ldots, 0) \neq 0$. Inaczej mówiąc, F jest równoważne pewnemu wielomianowi wyróżnionemu stopnia p (równoważność rozumiana modulo grupa multyplikatywna elementów odwracalnych w pierścieniu $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$).

Parę użytecznych uwag. Podczas gdy algebra $R\{x_1, \ldots, x_n\}$ szeregów zbieżnych jest zanurzona w algebrze szeregów formalnych $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, tutaj mamy homomorfizm

$$\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \to R[[x_1, \ldots, x_n]],$$

który kiełkowi funkcji różniczkowalnej przyporządkowuje jej rozwinięcie taylorowskie w punkcie zero. Pewne twierdzenie Emila Borela zapewnia suriektywność tego homomorfizmu; jego jądro składa się oczywiście z kiełków funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$, które zerują się wraz ze wszystkimi swymi pochodnymi w zerze. Właśnie obecność tego rodzaju funkcji płaskich sprawia, że dowód twierdzenia Malgrange'a jest trudny.

Malgrange dowodzi najpierw twierdzenia w przypadku szczególnym, gdy F jest wielomianem wyróżnionym względem x_n, którego współczynniki są funkcjami analitycznymi zmiennych $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Mimo tego dodatkowego założenia, trudności są znaczne i nie może być mowy o podaniu tutaj nawet idei dowodu. Zasygnalizujmy jednak, że nierówność Łojasiewicza jest użyta w dowodzie. Raz udowodniwszy twierdzenie o dzieleniu w tym przypadku szczególnym, nie jest już bardzo trudno sprowadzić do niego przypadek ogólny, dzięki całej serii sztuczek. Dowodzi się nawet rezultatu silniejszego niż twierdzenie o dzieleniu, analogicznego do twierdzenia przytoczonego w punkcie 7. Przed jego sformułowaniem wprowadźmy pojęcie algebry różniczkowej (tak jak w punkcie 7 wprowadziliśmy pojęcie algebry analitycznej).

Zgodnie z definicją, R-algebra A nie redukująca się do 0 jest algebrą różniczkową, jeśli dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ istnieje suriektywny homomorfizm R-algebr

$$\lambda\colon \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \to A.$$

Jest oczywiste, że A jest algebrą lokalną, której ideał maksymalny $M(A)$ jest obrazem ideału maksymalnego $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$. Algebry różniczkowe są obiektami pewnej kategorii, której morfizmy definiuje się w nastę-

pujący sposób: morfizm z $(\lambda\colon \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \to A)$ w $(\mu\colon \varepsilon(y_1, \ldots, y_p) \to B)$ jest homomorfizmem algebr $u\colon A \to B$, dla którego istnieje kiełek odwzorowania różniczkowalnego

$$(*) \qquad x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_p), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

zachowujący przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) & \xrightarrow{\varphi^*} & \varepsilon(y_1, \ldots, y_p) \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ A & \xrightarrow{\quad u \quad} & B \end{array}$$

gdzie φ^* jest homomorfizmem zdefiniowanym przez zamianę zmiennych $(*)$.

Możemy obecnie sformułować

TWIERDZENIE MALGRANGE'A. *Niech* $(\lambda\colon \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \to A)$ *i* $(\mu\colon \varepsilon(y_1, \ldots, y_p) \to B)$ *będą dwiema algebrami różniczkowymi i niech* $u\colon A \to B$ *będzie morfizmem pierwszej z nich w drugą. Niech* $b_i \in B$ *(skończony układ elementów). Wtedy następujące dwie własności są równoważne*:

(i) *obrazy* b_i *w* R*-przestrzeni wektorowej* $B/M(A)\cdot B$ *generują tę przestrzeń*;

(ii) b_i *generują* B *względem struktury* A*-modułu zdefiniowanej przez homomorfizm* u.

Jak w punkcie 7 można pokazać, że ostatnie twierdzenie implikuje twierdzenie o dzieleniu.

Warto dodać, że Thom był pierwszy, który podejrzewał słuszność różniczkowego twierdzenia przygotowawczego, pozostawiając Malgrange'owi trud udowodnienia. Dziś twierdzenie to staje się zasadniczym narzędziem w topologii różniczkowej, w badaniach nad kiełkami odwzorowań różniczkowalnych f jednej rozmaitości M w inną rozmaitość M' (chodzi o kiełek w punkcie $(x, x') \in M \times M'$). W tym kręgu idei znano dotąd rezultaty izolowane: wynik M. Morse'a rozważający przypadek, w którym $M' = R$ i funkcja f ma w punkcie x punkt krytyczny niezdegenerowany; wynik Whitney'a [16] dotyczący pewnych typów odwzorowań zdegenerowanych. Ogólnie, pragnie się w miarę możliwości sklasyfikować wszystkie takie kiełki odwzorowań (tzn. znaleźć w każdej klasie formę kanoniczną dla f przez odpowiednią zamianę układu współrzędnych w M i M'). Jest prawdopodobne, że dzięki twierdzeniu Malgrange'a taka klasyfikacja będzie możliwa, przynajmniej w przypadku, gdy algebra kiełków (względem x) funkcji różniczkowalnych na M jest, poprzez f, modułem skończonego typu nad algebrą kiełków (względem x') funkcji różniczkowalnych na M'.

Jak widzimy, twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa jest w dalszym ciągu źródłem inspiracji dla matematyków współczesnych i fakt ten

usprawiedliwia w moich oczach szczególne miejsce, które z upływem czasu należy przyznać temu twierdzeniu w zbiorze jego dzieł.

10. Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa–Malgrange'a–Mathera ([3]). W 1966 r. John Mather [17,I] uogólnił w następujący sposób wynik Malgrange'a: Niech $R^m = R^n \times R \times R^r$, $P\colon R^m \ni (c, x, t) \to x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n c_n \in C$ i niech $q\colon (c, x, t) \to (c, t)$. Wyposażmy przestrzeń $C^\infty(R^m)$ funkcji klasy C^∞ na R^m w zwykłą strukturę Frécheta (topologia jednostajnej zbieżności wraz z pochodnymi na zbiorach zwartych).

TWIERDZENIE MALGRANGE'A–MATHERA. *Istnieje ciągłe odwzorowanie liniowe*

$$C^\infty(R^m) \ni \varphi \to (\psi, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in C^\infty(R^m) \times \left(C^\infty(R^{m-1})\right)^n$$

takie, że

$$\varphi = \psi P + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \circ q) x^i.$$

Krótko mówiąc, dzielenie przez wielomian generowany jest możliwe do wykonania nawet w sposób liniowy i ciągły. Ta dodatkowa informacja odgrywa ważną rolę w podanej przez Mathera [17,II] charakteryzacji odwzorowań stabilnych. Twierdzenie przygotowawcze Malgrange'a wynika z zacytowanego wyżej wyniku Mathera. Technika dowodu użyta przez Mathera jest zupełnie różna od techniki Malgrange'a (transformata Fouriera). W 1967 r. S. Łojasiewicz podał nowy, elegancki dowód twierdzenia przygotowawczego Malgrange'a–Mathera, używając do tego celu rozwiniętej przez siebie (i Glaesera) teorii pól Whitney'a [18]. Interesujący dowód podał również ostatnio Nirenberg [19].

Uwaga H. Cartana o użyteczności twierdzenia przygotowawczego Malgrange'a w badaniu osobliwości odwzorowań różniczkowalnych znalazła w ostatnich latach pokrycie. Niestety, nawet tylko wymienienie wyników otrzymanych przy użyciu twierdzenia Malgrange'a–Mathera przekroczyłoby daleko ramy tego komentarza. W szeregu prac Thoma, Malgrange'a [20], Tougerona [21], w znakomitej (nie skończonej jeszcze) serii prac Mathera [17], różniczkowe twierdzenie przygotowawcze odgrywa istotną rolę. I jego zastosowania w analizie różniczkowej są dalekie od wyczerpania.

11. Twierdzenie przygotowawcze dla funkcji analitycznych w przestrzeniach wektorowych topologicznych. W 1966 r. J. P. Ramis udowodnił wersję twierdzenia przygotowawczego dla funkcji analitycznych w przestrzeniach Banacha. Wynik tego posłużył mu do głębokich studiów nad strukturą zbiorów analitycznych na (zespolonych) rozmaitościach Banacha [22].

([3]) Dwa ostatnie punkty zostały dopisane przez tłumacza — J. Bochnaka — i dotyczą wyników uzyskanych po opublikowaniu powyższego artykułu przez H. Cartana (*przyp. red.*).

Pomimo że pierścień $O(E)$ kiełków zespolonych funkcji analitycznych określonych w otoczeniu zera nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha nie jest (oczywiście!) noetherowski, szereg klasycznych wyników dotyczących własności pierścienia $O(E)$ znanych w przypadku, gdy $\dim E < \infty$, dało się przenieść na przypadek, gdy $\dim E = \infty$. W szczególności udowodniono np. Nullstellensatz Hilberta dla ideałów skończonego typu pierścienia $O(E)$ (Mazet) oraz własność, że $O(E)$ jest pierścieniem Gaussa.

Ostatnio J. Siciak udowodnił twierdzenie przygotowawcze dla funkcji analitycznych w przestrzeniach wektorowych topologicznych (nad R lub C) przy bardzo słabych założeniach o przestrzeni.

Literatura

[1] F. Osgood, Lehrbuch der Functionentheorie, II.
[2] Wirtinger, Grelle's Journal, 158 (1927), str. 260–267.
[3] Brill, Math. Annalen, 69 (1910), str. 538–549.
[4] Lasker, Math. Annalen 60 (1905), str. 20–116.
[5] Rückert, Math. Annalen, 107 (1933), str. 259–281.
[6] Späth, Journal. f.r.u.a. Math., 161 (1929), str. 95–100.
[7] P. Salmon, Bull. Soc. Math. de France, 92 (1964), str. 385–410.
[8] H. Cartan, Annales E.N.S., 61 (1944), str. 149–197.
[9] H. Cartan, *Faisceaux analytiques coherents* (Centro Ins. Mat. Estivo, Roma 1963).
[10] K. Oka, Bull. Soc. Math. de France, 78 (1950), str. 1–28.
[11] H. Cartan, Bull. Soc. Math. de France, 78 (1950), str. 29–64.
[12] C. Houzel, Sém. Cartan, 1960/61, expose 18.
[13] M. Hervé, *Several complex variables, local theory*, Oxford, Univ. Press 1963.
[14] B. Malgrange, Sém. Schwarz 1959/60, exposé 22.
[15] B. Malgrange, Sém. Cartan 1962/63, exposés 11, 12, 13 i 22.
[16] H. Whitney, Annals of Math. 62 (1955), str. 374–410.
[17] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings*; I, Annals of Math. 87 (1968), str. 89–104; II, Annals of Math. 89 (1969), str. 254–291; III, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968); IV, Publ. Math. I.H.E.S. 37 (1970); V, Advances in Math. 4 (1970), str. 301–339; VI, Springer Lectures Notes vol. 192 (1971), str. 207–253.
[18] S. Łojasiewicz, *Whitney fields and the Malgrange-Mather preparation theorem*, Springer Lectures Notes, vol. 192 (1971), str. 106–115.
[19] L. Nirenberg, *A proof of the Malgrange preparation theorem*, Springer Lectures Notes, t. 192 (1971), 97–105.
[20] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Bombay Tata Institute, Oxford Univ. Press (1966).
[21] J. C. Tougeron, *Ideaux de fonctions differentiables I*, Annales de l'Institut Fourier, 18, 1 (1968).
[22] J. P. Ramis, *Sous-ensembles analytiques d'une variété analytique banachique*, Springer Verlag (1970).
[23] R. Narasimhan, *Introduction to the theory of analytic spaces*, Springer Lectures Notes, t. 25 (1966).

COPYRIGHT BY WESTDEUTSCHER VERLAG