ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

E. MARCZEWSKI (Wrocław)

O pracach Wacława Sierpińskiego

Główne wątki prac mnogościowych
Wspomnienia i refleksje

Najdawniejsze i ostatnie prace i książki Wacława Sierpińskiego należą do teorii liczb. Ta dyscyplina, która sięga starożytności swoimi tradycjami i rezultatami, znajduje adeptów i entuzjastów we wszystkich czasach i krajach: stał się nim i Sierpiński pod wpływem swego nauczyciela uniwersyteckiego Woronoja.

Ale największe zasługi Wacława Sierpińskiego leżą w innej dziedzinie matematyki: w teorii mnogości. Jakby dla kontrastu, była to dziedzina młoda; w momencie, kiedy zajął się nią Sierpiński, nie minęło jeszcze czterdzieści lat od chwili, gdy jej twórca, Georg Cantor, poświęcił jej pierwsze prace. Ta teoria, która miała stać się podstawą nowoczesnej matematyki, była wówczas nieznana w wielu ośrodkach, a sam Sierpiński, już po ukończeniu studiów uniwersyteckich, nie wiedział nawet o jej istnieniu. Zainteresowawszy się nią w 1907 r., nabrał przekonania o podstawowym jej znaczeniu. Poświęcił jej odtąd badania własne i skutecznie propagował ją wśród swych uczniów i współpracowników. W 1908 r. rozpoczął wykłady na Uniwersytecie Lwowskim, a w 1909 r. wygłosił na tym Uniwersytecie kurs teorii mnogości. Jak się zdaje, były to pierwsze na świecie systematyczne wykłady uniwersyteckie tej dyscypliny. Powstał z nich najpierw skrypt w 1909 r., a potem podręcznik, którego pierwsze wydanie ukazało się w 1912 r., a w kilkanaście lat później znacznie rozszerzone, po francusku, pt. *Leçons sur les nombres transfinis* w słynnej *Collection des monographies sur la théorie des fonctions* Emila Borela. Prace z teorii mnogości zaczęli też publikować uczniowie Sierpińskiego.

Sprawa rozwoju teorii mnogości w Polsce zaczęła nabierać szczególnego znaczenia. Znalazła się bowiem cała grupa utalentowanych młodych matematyków, którzy pragnęli wspólnie pracować nad tą teorią i jej zastosowaniami (Janiszewski, Mazurkiewicz, później Kuratowski, Knaster, Saks, Tarski i inni). Kończył się w matematyce polskiej czas samotnych badaczy, pracujących w izolacji nad rozstrzelonymi tematami.

Zaczynał się czas pracy zespołowej, zaczynała swój żywot polska szkoła matematyczna.

O historii tej szkoły, o pierwszym jej organie: czasopiśmie Fundamenta Mathematicae, o Sierpińskiego stylu pracy i współpracy pisano już wiele. Głównym tematem tego artykułu będą publikacje Wacława Sierpińskiego z teorii mnogości i dziedzin pokrewnych. Zewnętrznym wyrazem znaczenia tych prac jest fakt, że np. w klasycznym podręczniku Hausdorffa *Mengenlehre* (1927) Sierpiński jest — po Cantorze — najczęściej cytowanym autorem. Podobnie zresztą, jak w nowszych książkach: *Abstract set theory* Fraenkla (1953) i *Transfinite Zahlen* Bachmanna (1955).

W wykładzie wygłoszonym na akademii jubileuszowej w 1948 r., a opublikowanym w książce jubileuszowej (wydanej w 1949 r.), spróbowałem dać przegląd ważniejszych spośród tych prac Sierpińskiego. Był to przegląd nader obszerny, choć najzupełniej pobieżny. Nie będę go tutaj powtarzał: ograniczę się tylko do przykładów. Z tematów kilkuset publikacji wybiorę drobną cząstkę: będą to niektóre z tych, które zostały ogłoszone w ostatnim ćwierćwieczu oraz tych prac dawniejszych, które w tym czasie były spożytkowane lub rozwinięte przez innych autorów. W końcowej części artykułu zanotuję wspomnienia i refleksje, które oczywiście nie roszczą pretensji, by dać kompletną charakterystykę działalności Wacława Sierpińskiego.

*

Do tematów, które zawsze pasjonowały Sierpińskiego, należy pewnik wyboru Zermeli. Poświęcił mu osobne studium w 1918 r. (w Biuletynie Polskiej Akademii Umiejętności) oraz wiele prac w różnych okresach życia. Choć przyjmował ten pewnik i opierał się na nim wielokrotnie, głosił pogląd, że każde jego zastosowanie należy w dowodzie akcentować.

Interesowało go zawsze czy pewnik wyboru da się z dowodu usunąć. Tak np. efektywnie udowodnił w 1922 r. (Fund. Math. 3), że równości między liczbami kardynalnymi można skracać przez 2 (co przedtem było dowodzone z użyciem pewnika wyboru). Było to impulsem do wielu dalszych badań: jego własnych i jego uczniów. W 1946 r. (Fund. Math. 34) opublikował pracę dotyczącą skracania nierówności. Adolf Lindenbaum i Alfred Tarski ogłosili w 1926 r. obszerny komunikat zawierający wiele wyników pokrewnych, a Tarski w 1949 r. (Fund. Math. 36) ogólną pracę o prawie skracania w arytmetyce liczb kardynalnych i — w tym samym roku — książkę *Cardinal algebras*. Usuwanie pewnika wyboru miało tu znaczenie nie tylko metodologiczne: twierdzenia uzyskane bez pewnika wyboru zostały przez Tarskiego przeniesione z arytmetyki liczb kardynalnych do ogólniejszej teorii algebr kardynalnych.

Również odwrotna sytuacja, tj. gdy pewnik wyboru nie daje się usunąć, stała się przedmiotem badań Sierpińskiego. Wynalazł sposób,

aby — praktycznie niejako — stwierdzać niemożliwość usunięcia pewnika wyboru z jakiegoś twierdzenia („przy obecnym stanie nauki" — jak mawiał zwykle w takich okazjach). Wykazywał mianowicie, że za pomocą rozważanego twierdzenia można by już bez użycia tego pewnika zbudować zbiór niemierzalny w sensie Lebesgue'a, czego wówczas dotąd nikt uczynić nie potrafił [1].

Tak np. w 1938 r. (Fund. Math. 30) wykazał, że do twierdzeń takich należy zdanie, stwierdzające istnienie w zbiorze liczb naturalnych nietrywialnej miary zerojedynkowej (oczywiście tylko skończenie addytywnej). Ten rezultat był spożytkowany w 1949 r. przez Łosia i Marczewskiego w zagadnieniach rozszerzania miary (Fund. Math. 36), a później przez Rylla-Nardzewskiego w badaniach interpolacji przez funkcje prawie okresowe (Coll. Math. 12 (1964)).

Wracając zaś do kwestii metodologicznych, stwierdzić trzeba, że wobec dawniejszych i najnowszych rezultatów dotyczących niezależności i niesprzeczności pewnika wyboru w stosunku do innych pewników teorii mnogości (Fraenkel, Mostowski, Cohen) — opisane stanowisko Sierpińskiego okazało się głęboko uzasadnione.

Z równą wytrwałością badał Sierpiński hipotezę kontinuum. Wyciągnął z niej wiele wniosków nieraz paradoksalnych, udowodnił jej równoważność z wieloma innymi zdaniami z teorii mnogości, badał związki między różnymi konsekwencjami tej hipotezy — a wszystkie te wyniki zebrał następnie w monografii *Hypothèse du continu* (1934). Nie zajmował się przy tym metamatematyczną stroną zagadnienia, a jedynie matematycznymi twierdzeniami.

Doszedł do mistrzostwa w budowaniu osobliwych zbiorów i funkcji przy łącznym stosowaniu pewnika wyboru i hipotezy kontinuum. Różne zbiory i klasy zbiorów, określone za pomocą tych środków, okazały się bardzo przydatne w badaniach nad miarą i mierzalnością, kategorią i własnością Baire'a etc.

W świetle metamatematycznych odkryć Gödla i Cohena, dotyczących niesprzeczności hipotezy kontinuum, dotyczące jej rezultaty Sierpińskiego zachowały całe swe znaczenie.

W 1951 r. Sierpiński udowodnił (w Fund. Math. 38), że hipoteza kontinuum jest równoważna następującemu zdaniu: Istnieje rozkład przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej na trzy zbiory takie, że n-ty z nich ma tylko skończoną liczbę punktów na każdej prostej równoległej do n-tej osi ($n = 1, 2, 3$). Twierdzenie to, podobnie zresztą jak dawniejszy wynik podobnego typu (z 1924 r.), stały się początkiem całej serii prac różnych

---

[1] Obecnie już wiadomo, że istotnie jest to niewykonalne, por. R. M. Solovay, *A model of set theory in which every set is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. 92 (1970), str. 1–7.

autorów (Kuratowski, Sikorski 1951, Erdös 1953, Bagemihl 1961, Davies 1963).

Nie sama tylko hipoteza kontinuum, ale w ogólności arytmetyka liczb kardynalnych oraz typów i liczb porządkowych była wieloletnim tematem prac Sierpińskiego. Szczególnie w latach czterdziestych i pięćdziesiątych poświęca się tym badaniom z wielką pasją. Jej owocem jest długi szereg prac zawierających pojedyncze rezultaty oryginalne, a następnie monografia *Cardinal and ordinal numbers* (1958), wielki skarbiec szczegółowych wiadomości o tych liczbach. To dzieło jest produktem podwójnej pasji i podwójnych umiejętności: umiłowania i najgłębszej znajomości pojęć mnogościowych, a jednocześnie gustów i sposobu myślenia teoretyka liczb, dla którego związki arytmetyczne, pozornie bardzo specjalnego kształtu, stają się impulsem do głębokich i ogólnych dociekań. Zresztą niektóre kwestie traktowane w monografii nawiązują explicite do zagadnień teorii liczb (np. do twierdzenia Fermata).

Z licznych, zawartych w monografii rezultatów własnych autora, wymieńmy jeden (nawiązujący do rozważań Hausdorffa): każdy zbiór uporządkowany (mocy: alef ze wskaźnikiem) jest podobny do pewnego zbioru zero-jedynkowych ciągów (typu omega małe z tym samym wskaźnikiem), uporządkowanego leksykograficznie. Twierdzenie to opublikowane w 1949 r. (Fund. Math. 36) było impulsem do dalszych badań J. Nováka i M. Novotnego (Fund. Math. 39, 1952).

Monografia Sierpińskiego jest dziś czytana i cytowana przez wszystkich, którzy zajmują się arytmetyką pozaskończoną.

Jednym z wątków przewijającym się poprzez prace Sierpińskiego są zagadnienia przystawania i rozkładów paradoksalnych. Badania te rozpoczęte w 1914 r. razem z Mazurkiewiczem (przykład zbioru płaskiego, który jest sumą dwóch zbiorów rozłącznych do niego przystających) zostały uwieńczone małą monografią *On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition* wydaną w Lucknow w Indiach w 1954 r., a zawierającą wyniki uzyskane w tym zakresie przez autora i wielu innych matematyków (głównie polskich), m. in. słynny rozkład paradoksalny dwóch kul różnej wielkości na części odpowiednio przystające, którego istnienie udowodnili Banach i Tarski w 1924 r. Wynik ten nawiązywał do wcześniejszego rezultatu Hausdorffa (1914). I właśnie piękne prace Sierpińskiego (Fund. Math. 33 (1945) i Rend. Accad. d. Lincei, 1948) o rozkładach Hausdorffa oraz Banacha i Tarskiego dały impuls młodszym matematykom do kontynuowania tych badań; mocne rezultaty uzyskali w latach pięćdziesiątych: Balcerzyk, Świerczkowski, a zwłaszcza Mycielski — w Polsce, oraz Dekker i de Groot — w Holandii. Ostatnim rezultatem Sierpińskiego z omawianego kręgu zagadnień jest odpowiedź na pewne pytanie Steinhausa (Fund. Math. 46 (1959)).

Wyniki Sierpińskiego z topologii mają zawsze swoje miejsce w lite-

raturze matematycznej. Krzywa uniwersalna Sierpińskiego z 1916 r., zwana przez matematyków radzieckich *dywanem Sierpińskiego*, bywa co pewien czas narzędziem w konstrukcjach topologicznych różnych autorów (Borsuk, 1955, Whyburn, 1958, Knaster i Lelek, 1958). Stosuje się stale twierdzenie Sierpińskiego z 1919 r. o niemożliwości rozkładu kontinuum na przeliczalną ilość rozłącznych zbiorów domkniętych.

Sierpiński był pierwszym, który w systematycznym wykładzie (*Topologia ogólna*, 1928) użył aksjomatyki przestrzeni topologicznych, pochodzącej od Tietzego (1923), a opartej na pojęciu zbioru otwartego. Przyjęli ją później bourbakiści w swej *Topologie générale* wchodzącej w skład ich wielkiego traktatu, a dziś jest ona w powszechnym użyciu.

Teorią zbiorów analitycznych i rzutowych, której — według Łuzina — jest współtwórcą, Sierpiński mało zajmował się w końcowej fazie twórczości. Ukoronował swą działalność w tym zakresie zeszytem *Mémorial des Sciences Mathématiques* noszącym tytuł *Les ensembles projectifs et analytiques* wydanym w 1950 r.

Ten przegląd nowszych prac Sierpińskiego i jego kontynuatorów uzupełnię jeszcze wyliczeniem dalszych pozycji — bez żadnych już komentarzy. — W 1957 r. wydał Sierpiński monografię *Algèbre des ensembles*. Zajmował się zagadnieniami zbieżności pojedynczych i podwójnych ciągów funkcyjnych, rozwiązując między innymi pewne zagadnienia Sikorskiego (Fund. Math. 37 (1950)), a dawne jego wyniki o zbieżności rozwijał Poprużenko (1952).

Badania Sierpińskiego superpozycji funkcji w zbiorach abstrakcyjnych były kontynuowane przez Łosia (Fund. Math. 37 (1950)), przez samego Sierpińskiego (Fund. Math. 49 (1961)), a później stosowane i omawiane przez różnych autorów uprawiających algebrę uniwersalną (Urbanik, Fund. Math. 52 (1968), Grätzer w *Universal Algebra* 1968, etc).

Hulanicki rozwiązał (Fund. Math. 51 (1962)) pewne zagadnienie Sierpińskiego o rozszerzaniach miary Lebesgue'a (z 1935 r.), Dana Scott i inni stosowali skonstruowane przez Sierpińskiego rozkłady na zbiory prawie-rozłączne.

Do prac mnogościowych Sierpińskiego nawiązywały w ostatnich latach także prace Erdösa, Fleischera, Hajnala, Garga, Gilmana, Ginsburga, Lipińskiego, Marcusa, Milmana i wielu innych matematyków w różnych krajach.

*

Sądzę, że warto zebrać różne, choćby nawet powierzchowne, wspomnienia o tym, jak Sierpiński pracował, jak powstawały jego wykłady, jak pisywał rozprawy i książki. Jak było możliwe powstanie tak wielkiej liczby monografii, podręczników, broszur i wszystkich tych siedmiuset kilkudziesięciu pozycji bibliograficznych, których był autorem.

Z rozmów ze współpracownikami i uczniami, z obfitej korespondencji z innymi matematykami (przede wszystkim z Mikołajem Łuzinem), z dyskusji na seminarium i na posiedzeniach i z własnych rozmyślań nad ulubionymi wątkami, powstawały coraz to nowe zagadnienia. Sierpiński myślał o matematyce i pracował nad nią niemal zawsze. Na spacerach, w podróżach pociągiem czy samolotem, na rozmaitych posiedzeniach organizacyjnych, nawet tych, którym sam przewodniczył. Pracował i rozmyślał nad nią i w czasach spokojnych i podczas burz dziejowych. Zdumiewający jest ów tom Biuletynu Akademii Umiejętności za rok 1918 (wydany w 1919 r.), który zawiera dziewięć prac Sierpińskiego. Państwo Sierpińscy odbyli w tym czasie okólną drogę powrotną z Moskwy do Lwowa, potem przeprowadzili się do Warszawy, a cóż działo się wtedy w owej części Europy! Nieraz już wspominano o pracach Sierpińskiego podczas drugiej wojny światowej, gdy — jako urzędnik polskiego magistratu zajętej przez Niemców Warszawy — za stosami ksiąg buchalteryjnych pisał swe rozprawy i książki.

Na akademii jubileuszowej w 1964 r. powiedział, że Pan Bóg dał mu dobre zdrowie. Chyba zresztą nie tylko zdrowie, ale także bardzo szczęśliwe usposobienie. W przeciwieństwie do wielu innych badaczy, nie przeżywał kryzysów w swej twórczości, nie wątpił w wartość uprawianej przez się tematyki, nie przechodził przez chwile zniechęcenia czy osłabienia zainteresowań i aktywności. Nie zniechęcał się ani tym, że sam do jakiegoś rezultatu nie dochodził, ani tym, że ktoś inny w kraju, czy gdzie indziej, obchodzący go rezultat uzyskał. Przeciwnie: cieszył się wynikami otrzymanymi przez swych uczniów i kolegów lub przez uczonych z innych ośrodków. Wysnuwał z tych nowin naukowych tematy dalszych badań.

Wyniki, które sam uzyskał, redagował natychmiast, w postaci niewielkich prac. Nie wstydził się nigdy określenia „przyczynek" i bardzo go gniewało, gdy temu pojęciu przypisywano w pewnym okresie sens pejoratywny. Miał zadziwiającą łatwość formułowania na piśmie myśli matematycznych. Z reguły pisał prace tylko dwa razy: najpierw w brulionie, a potem, po zmianach, zazwyczaj drobnych, już na czysto, zawsze równym starannym pismem. Zaraz potem referował tę pracę, zazwyczaj też dwa razy: na seminarium (które w okresie międzywojennym zwykle odbywało się we wtorki, a było wypełnione głównie komunikatami o nowych wynikach własnych i korespondencji naukowej) i potem na piątkowym posiedzeniu Towarzystwa Matematycznego. Dawał też rękopis do skontrolowania któremuś z uczniów. Byłem nieraz owym pierwszym czytelnikiem, ale chyba najczęściej w tych latach — Stefania Braunówna, nieoceniona przez bystrość i przenikliwość, a przede wszystkim entuzjazm, z jakim odnosiła się do każdego nowego rezultatu. Błędów w dowodach nie znajdowaliśmy chyba nigdy, ale pewne kłopoty powstawały, gdy

okazywało się, że jakiś fragment pracy lepiej byłoby ująć inaczej. Bo Sierpiński nie lubił swych tekstów przerabiać, zajęty zwykle już jakimś następnym tematem. Czasem zręcznie i oszczędnie modyfikował tekst, ale kiedy indziej proponował tylko dopisanie uwagi, że — według pana X — rzecz mogłaby być sformułowana odmiennie. Nieraz zresztą powstawały z tych dyskusji nowe publikacje.

Główne swe prace mnogościowe Sierpiński publikował w Fundamentach, pomniejsze — w Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, a także w najrozmaitszych czasopismach najróżniejszych krajów. Gdy zaczynało wychodzić nowe czasopismo, nieraz w jakimś egzotycznym zakątku świata, wypożyczał do domu zeszyt, by wiedzieć, jak należy zredagować nagłówek pracy i w niedługim czasie posyłał rękopis do redakcji. Lubił całą tę robotę od pierwszego pomysłu do publikacji, do otrzymania i zadedykowania odbitek, przygotowania ich do wysyłki, a nawet odniesienia na pocztę.

Choć pracował ciągle, nie uważał pracy matematyka za szczególnie wyczerpującą i jakby nie dostrzegał, ile trudu wymaga ona od innych. Do własnej twórczości odnosił się bardzo prosto: stawiał zagadnienia i rozwiązywał je, udowadniał twierdzenia, konstruował przykłady, ale dyskutował o nich oszczędnie, zwykle nie formułując ogólnych komentarzy czy refleksji. Kiedyś, wyjątkowo, skarżył mi się na odległość, jaka dzieli myśl przewodnią dowodu czy konstrukcji od ich ostatecznego formalnego kształtu, ale jestem przekonany, że odczuwał to utrapienie w znacznie mniejszym stopniu niż inni matematycy. Wydaje mi się, że pierwotne idee szybko i łatwo przybierały w jego umyśle formy konkretnych i dokładnych rozumowań matematycznych. Także w wykładach podawał wszystkie dowody w postaci gotowej, ze wszystkimi epsilonami z góry pomnożonymi przez odpowiednio dobrane czynniki, nie stosował więc tego, co Otto Nikodym nazywał „elastycznością epsilona". Do wykładów przygotowywał się nadzwyczaj starannie: można by powiedzieć, że uczył się każdego wykładu przed jego wygłoszeniem.

Z wykładów uniwersyteckich, z cykli odczytów i wykładów, wygłoszonych w różnych ośrodkach krajowych i zagranicznych powstawały coraz to nowe książki, od obszernych monografii do popularnych broszur, a wszystkie one zawierały mnóstwo oryginalnych pomysłów autora. Ale i te prace nie wyczerpywały działalności Wacława Sierpińskiego; był współzałożycielem i redaktorem czasopism matematycznych, uczestniczył w codziennym życiu organizacyjnym towarzystw naukowych i nauczycielskich. Przewodniczył wielu z nich. Lubił odświętną stronę życia naukowego: kongresy, uroczystości, tradycyjne stroje, odznaczenia i dyplomy. Nie będę wyliczać doktoratów honorowych, które mu nadały różne uniwersytety (ostatnim był moskiewski), ani też akademii zagranicznych, które powołały go do swego grona (ostatnią była papieska). Jeszcze nie-

dawno, bo w 1966 r. uczestniczył w wielkiej uroczystości w paryskiej Académie des Sciences: na jubileuszu jej trzechsetlecia był jednym z dwóch mówców reprezentujących członków zagranicznych. Był w tej Akademii członkiem zwyczajnym zagranicznym (associé étranger), w tym charakterze drugim dopiero Polakiem w jej dziejach.

Te odznaczenia były oczywiście tylko zewnętrznym wyrazem ogromnego uznania, jakim działalność Wacława Sierpińskiego cieszyła się na świecie. Można by wyliczyć wiele innych, wymownych przykładów, jak owację, którą był przywitany na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Sztokholmie w 1962 r., ostatnim, w którym uczestniczył.

Był jednym z twórców polskiej szkoły matematycznej, był też niejako jej symbolem. Najpiękniej chyba wyraził to Karol Menger w liście napisanym do Sierpińskiego z okazji jubileuszu w 1948 r.: *„To me you are not only one of the outstanding mathematicians of your time but a symbol, and a symbol in many ways. You are a symbol of that type of great mathematics to which your „Fundamenta" are devoted; a symbol of Polish Science, and a symbol of the Polish Nation. To see you rise after disasters, Phoenix like, again and again is to me a permanent source of encouragement. It should be an inspiration for the whole world and for all times"*.

Takim symbolem matematyki polskiej pozostaje też Wacław Sierpiński dla rzeszy swych uczniów. Powtórzę tu słowa, wypowiedziane w tym samym roku: „W działalności naukowej i nauczycielskiej Wacława Sierpińskiego tkwi niejako niepisany regulamin polskiej szkoły matematycznej: ciągłość pracy, stała współpraca z innymi matematykami, wzajemne, w pełnym zaufaniu, komunikowanie sobie niegotowych pomysłów, radość z wyników cudzych — jak z własnych, przyjaźń osobista z uczniami" ([2]).

([2]) Bibliografia prac Wacława Sierpińskiego do 1948 r. oraz artykuły o Jego życiu i działalności znajdują się w książce: *VI Polski Zjazd Matematyczny. Jubileusz 40-lecia działalności na katedrze uniwersyteckiej Profesora Wacława Sierpińskiego, Warszawa 23. 9. 1948*, staraniem Komitetu Jubileuszowego, Warszawa 1949. Po zgonie Sierpińskiego ukazały się artykuły: Kazimerz Kuratowski, *Wacław Sierpiński* 1882–1969, Nauka Polska 1969, nr 6, str. 169–172, oraz Andrzej Schinzel, *Życiorys Wacława Sierpińskiego*, Wiadomości Matematyczne 12 (1971), str. 303–308. W przygotowaniu znajdują się obszerniejsze artykuły o pracach naukowych Sierpińskiego dla Acta Arithmetica i Fundamenta Mathematicae oraz trzytomowy wybór Jego prac z całkowitą bibliografią.