wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



S. Knapowski

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

J. Browkin (Warszawa)

Stanisław Knapowski

Stanisław Knapowski urodził się 19 maja 1931 roku w Poznaniu jako syn Rocha Knapowskiego, ówczesnego zastępcy profesora Uniwersytetu Poznańskiego, i Zofii z domu Krysiewicz. Do czasu wybuchu II wojny światowej mieszkał wraz z rodzicami w Poznaniu. Wysiedlony przez niemieckie władze okupacyjne spędził czas wojny w miejscowości Garbacz, pow. Opatów, woj. kieleckie. Powrócił do Poznania w 1945 r. i rozpoczął regularną naukę w Gimnazjum i Liceum im. św. Marii Magdaleny, gdzie uzyskał świadectwo dojrzałości w 1949 r. Następnie rozpoczął studia w zakresie matematyki na Uniwersytecie Poznańskim. Tu otrzymał dyplom ukończenia studiów trzyletnich w 1952 r. i został skierowany na dalsze studia na Uniwersytet Wrocławski, gdzie w 1954 r. uzyskał stopień magistra matematyki. Następnie rozpoczął pracę jako asystent Katedry Matematyki Uniwersytetu Poznańskiego. W maju 1956 r. został mianowany starszym asystentem. Od 1956 r. pracuje pod kierunkiem naukowym P. Turána (Budapeszt), konsultując się z nim listownie. We wrześniu 1957 r. bierze udział w Kongresie Węgierskiego Towarzystwa Matematycznego w Szeged. W dniu 30 września 1957 r. uzyskał stopień kandydata nauk, przedstawiając pracę „Pewne zastosowania metod Turána w analitycznej teorii liczb". W październiku 1957 r. wyjechał na 10-miesięczny pobyt naukowy do Cambridge, w ramach stypendium Rockefellera. W czasie pobytu w Anglii pracował pod kierunkiem L. J. Mordella, uczęszczał na seminarium J. W. S. Casselsa i wykłady A. E. Inghama. Odwiedził także szereg uniwersytetów brytyjskich, uniwersytety w Brukseli, Paryżu i Amsterdamie oraz wziął udział w sierpniu 1958 r. w Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Edynburgu. We wrześniu 1958 r. wziął udział w Konferencji z aproksymacji diofantycznych w Balatonvilagos (Węgry), na której wygłosił odczyt pt. *On an explicit lower estimation in prime number theory*. W październiku 1958 r. powrócił do Polski i podjął zajęcia uniwersyteckie. W marcu 1960 r. habilitował się na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii UAM w Poznaniu na podstawie pracy pt. *Nowe formuły dokładne analitycznej teorii liczb*. W sierpniu 1960 r. wziął udział w II Kongresie Mate-

matyków Węgierskich, na którym wygłosił odczyt pt. *One-sided estimations in prime number formulas*. W listopadzie tegoż roku uczestniczył w uroczystościach 150-lecia Uniwersytetu im. Humboldta w Berlinie oraz w zorganizowanym z tej okazji sympozjonie matematycznym. W roku akademickim 1960/61 został powołany na stanowisko docenta etatowego przy Katedrze Matematyki UAM w Poznaniu. W roku 1962 otrzymał nagrodę PTM im. S. Mazurkiewicza. W roku akademickim 1962/63 prowadzi wykłady na Tulane University w Nowym Orleanie, a w roku akademickim 1963/64 pracuje na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. W latach następnych wykładał na kilku uniwersytetach zachodnich. Zginął 28 września 1967 roku w wypadku samochodowym w Miami (USA).

Duża część prac(1) Stanisława Knapowskiego, napisanych wspólnie z P. Turánem, dotyczy porównawczej teorii liczb pierwszych.

Jak wiadomo, jeśli oznaczymy przez $\pi(x, k, l)$ liczbę liczb pierwszych nie większych niż x należących do postępu arytmetycznego $l, l+k, l+2k, \ldots$, gdzie $(l, k) = 1$, to

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x, k, l)}{\operatorname{Li} x} = \frac{1}{\varphi(k)}. \tag{1}$$

Tu $\varphi(k)$ oznacza liczbę liczb naturalnych nie większych niż k i pierwszych względem k, a

$$\operatorname{Li} x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Ponieważ prawa strona wzoru (1) nie zależy od l, więc w pewnym sensie we wszystkich postępach arytmetycznych $l+nk$, gdzie $(l, k) = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, o różnicy k znajduje się taka sama liczba liczb pierwszych.

Z drugiej jednak strony można badać czy w postępach arytmetycznych o tej samej różnicy występują pewne różnice w rozmieszczeniu liczb pierwszych. Istnieje dotychczas nie udowodniona hipoteza Czebyszewa mówiąca, że

$$\lim_{x\to+0} \sum_{p>2} (-1)^{(p-1)/2} e^{-px} = -\infty. \tag{2}$$

We wzorze (2) składniki dodatnie odpowiadają liczbom pierwszym postępu $4t+1$, ujemne zaś — liczbom pierwszym postępu $4t+3$. Gdyby więc prawdziwy był wzór (2), to w pewnym sensie w postępie $4t+3$ byłoby więcej liczb pierwszych niż w postępie $4t+1$. Teoria porównawcza liczb pierwszych bada właśnie różnice w rozmieszczeniu liczb pierwszych w postępach arytmetycznych o tej samej różnicy. Porównuje się więc funkcje

(1) Pełny spis prac Stanisława Knapowskiego ukaże się w Colloquium Mathematicum po artykule P. Turána o jego osiągnięciach w teorii liczb.

$\pi(x, k, l_1)$ i $\pi(x, k, l_2)$, gdzie $(l_1 l_2, k) = 1$ i $l_1 \not\equiv l_2 \bmod k$; ogólniej, porównuje się funkcje związane z liczbami pierwszymi należącymi do ustalonego postępu arytmetycznego. Funkcjami takimi są na przykład

$$\Psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n),$$

$$\Pi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{\log n},$$

gdzie $\Lambda(n)$ oznacza funkcję Mangoldta, tzn.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{gdy } n = p^m,\ m \geqslant 1,\ p \text{ — liczba pierwsza,} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Przytoczymy tu sformułowania kilku typowych twierdzeń teorii porównawczej liczb pierwszych, które zostały opublikowane przez S. Knapowskiego i P. Turána w dwóch cyklach prac: *Comparative prime-number theory* [4] i *Further developments in the comparative prime-number theory* [5].

TWIERDZENIE ([4], VI). *Jeśli*

(0) $(l_1 l_2, k) = 1, \quad l_1 \not\equiv l_2 \bmod k,$

(1) $\prod_{\chi \bmod k} L(s, \chi)$ *nie znika dla* $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|t| \leqslant 2c_1 k^{10}$, *gdzie* $s = \sigma + it$,

(2) *liczby rozwiązań kongruencji* $x^2 \equiv l_1 \bmod k$, $x^2 \equiv l_2 \bmod k$ *są równe,*

to dla $T > C(k)$ *zachodzi nierówność*

$$\max_{T^{1/3} \leqslant x \leqslant T} \left(\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)\right) > \sqrt{T} \exp\left(-44 \frac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}\right) \text{ (2)}.$$

Twierdzenie to wskazuje, że zachodzą duże różnice w rozmieszczeniu liczb pierwszych w postępach $kn + l_1$ i $kn + l_2$, gdzie liczby naturalne l_1, l_2 i k spełniają warunki (0), (1) i (2). Przy tym żaden z tych postępów nie jest wyróżniony. Są mianowicie takie wartości $x \leqslant T$, że w pierwszym postępie jest np. o $T^{1/2-\varepsilon}$ więcej liczb pierwszych $\leqslant x$ niż w drugim; ale są też takie wartości x, dla których sytuacja jest odwrotna.

TWIERDZENIE O AKUMULACJI ([5], III). *Jeśli*

(0) $(l, k) = 1, \quad l \not\equiv 1 \bmod k,$

(1) $\prod_{\chi \bmod k} L(s, \chi)$ *nie znika w obszarze* $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|t| \leqslant E(k)$, *gdzie* $s = \sigma + it$,

(2) l *jest resztą kwadratową modulo* k,

---

(2) Przez $f_n(x)$ oznaczamy n-tą iterację funkcji $f(x)$. Tak więc np. $\log_2 x$ oznacza $\log\log x$.

to dla $T > C(k)$ *istnieją takie podprzedziały* $\langle U_1, U_2\rangle$ *i* $\langle U_3, U_4\rangle$ *przedziału* $\langle Te^{-\log^{6/7}T}, Te^{\log^{6/7}T}\rangle$, *że*

$$\sum_{\substack{U_1\leqslant p\leqslant U_2\\ p\equiv 1 \bmod k}} 1 - \sum_{\substack{U_1\leqslant p\leqslant U_2\\ p\equiv l \bmod k}} 1 > \sqrt{T}e^{-c\log^{5/6}T}$$

oraz

$$\sum_{\substack{U_3\leqslant p\leqslant U_4\\ p\equiv 1 \bmod k}} 1 - \sum_{\substack{U_3\leqslant p\leqslant U_4\\ p\equiv l \bmod k}} 1 < -\sqrt{T}e^{-c\log^{5/6}T}.$$

Z twierdzenia tego wynika, że jeśli liczby naturalne k i l spełniają warunki (0), (1) i (2), to dla dostatecznie dużych T w przedziale $\langle 1, T^2\rangle$ istnieją takie dwa podprzedziały, że w pierwszym z nich jest znacznie więcej liczb pierwszych należących do postępu $kn+1$ niż należących do postępu $kn+l$, a w drugim podprzedziale jest odwrotnie. Użyte tu słowa „znacznie więcej" oznaczają, że różnica między liczbą liczb pierwszych w jednym postępie a liczbą liczb pierwszych w drugim postępie, należących do rozważanego przedziału, zmierza wraz z T do nieskończoności.

Jeśli chodzi o twierdzenie Czebyszewa (sformułowane bez dowodu[3]) w liście do Fussa z dnia 10 marca 1853, [1]), które mówi, że

$$\lim_{x\to+0}\Big(\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} e^{-px} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} e^{-px}\Big) = -\infty, \tag{3}$$

to w latach 1917 i 1918 G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3] i E. Landau [10] udowodnili, że jest ono równoważne nieznikaniu funkcji

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},$$

gdzie χ oznacza niegłówny charakter modulo 4, w półpłaszczyźnie $\sigma > \frac{1}{2}$. Jak wiadomo, ten ostatni fakt jest szczególnym przypadkiem hipotezy Riemanna–Piltza, która głosi, że żadna funkcja $L(s,\chi)$ nie znika w półpłaszczyźnie $\sigma > \frac{1}{2}$. Hipoteza ta dotąd nie została udowodniona nawet dla jednego charakteru χ.

Hardy, Littlewood i Landau dowiedli ponadto, że wzór (3) jest równoważny następującemu wzorowi

$$\lim_{x\to+0}\Big(\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} \log p\cdot e^{-px} - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} \log p\cdot e^{-px}\Big) = -\infty. \tag{4}$$

S. Knapowski i P. Turán uzyskali uogólnienia wyników Hardy'ego, Littlewooda i Landaua na przypadek modułów różnych od 4. Mianowicie udowodnili oni między innymi

---

(3) Pewne idee dowodu zawarte są w innej pracy Czebyszewa [2].

TWIERDZENIE ([5], II). *Jeśli* $l = 3, 5$ *lub* 7, *to wzór*

$$\lim_{x\to+0}\Big(\sum_{p\equiv 1 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv l \bmod 8}\log p\cdot e^{-px}\Big)=-\infty \tag{5}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\prod_{\substack{\chi \bmod 8\\ \chi\neq\chi_0}} L(s,\chi)$ *nie ma zer w półpłaszczyźnie* $\sigma > \frac{1}{2}$.

Zatem ze szczególnego przypadku hipotezy Riemanna–Piltza wynika, że w postępie $8n+1$ jest mniej liczb pierwszych niż w każdym z postępów $8n+3$, $8n+5$ i $8n+7$; mniej — w sensie wzoru (5). Natomiast sytuacja zmienia się całkowicie, gdy porównujemy liczby pierwsze w postępach $8n+l_1$ i $8n+l_2$, gdzie l_1 i l_2 są różnymi liczbami spośród 3, 5, 7. Mianowicie zachodzi

TWIERDZENIE ([5], II). *Niech* $l_1 \neq l_2$ *i* $l_1, l_2 \in \{3, 5, 7\}$. *Oznaczmy*

$$f(l_1, l_2, x) = \sum_{p\equiv l_1 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px}-\sum_{p\equiv l_2 \bmod 8}\log p\cdot e^{-px}.$$

Wtedy dla $0 < \delta < c_1$ *zachodzą nierówności*

$$\max_{\delta^{-1/3}\leqslant x\leqslant\delta^{-1}} f(l_1, l_2, x) > \delta^{-1/2}\exp\Big(-22\,\frac{\log(1/\delta)\cdot\log_3(1/\delta)}{\log_2(1/\delta)}\Big), \tag{6}$$

$$\min_{\delta^{-1/3}\leqslant x\leqslant\delta^{-1}} f(l_1, l_2, x) < -\delta^{-1/2}\exp\Big(-22\,\frac{\log(1/\delta)\cdot\log_3(1/\delta)}{\log_2(1/\delta)}\Big). \tag{7}$$

Z twierdzenia tego wynika, że funkcja $f(l_1, l_2, x)$ zmienia znak w każdym z przedziałów postaci $\langle\delta^{-1/3}, \delta^{-1}\rangle$ dla dostatecznie małej dodatniej wartości δ. Ponadto

$$\varliminf_{x\to+\infty} f(l_1, l_2, x) = -\infty \quad \text{oraz} \quad \varlimsup_{x\to+\infty} f(l_1, l_2, x) = +\infty.$$

Wobec tego nie można twierdzić, że w jednym z postępów $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ jest więcej liczb pierwszych niż w innym; więcej — w rozważanym tu sensie.

Twierdzenia analogiczne do dwóch ostatnich Knapowski i Turán udowodnili też dla pewnych modułów różnych od 4 i 8.

Jeden z ładniejszych wyników Knapowskiego w analitycznej teorii liczb jest związany z pewną hipotezą Riemanna. Mianowicie Riemann przypuszczał, że dla każdej liczby $x \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\pi(x) < \mathrm{li}\,x$, gdzie

$$\mathrm{li}\,x = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\log t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\log t}\Big),$$

a $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od x. Jak wiadomo $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/\mathrm{li}\,x = 1$; posługując się tablicami liczb pierwszych sprawdzono, że nierówność $\pi(x) < \mathrm{li}\,x$ zachodzi dla wszystkich $x \leqslant 10^7$. Jednak w 1914 r. Littlewood [11] udowodnił, że liczba $v(T)$ zmian znaku funkcji $\pi(x) - \mathrm{li}\,x$ w przedziale $\langle 2, T\rangle$ zmierza wraz z T do nieskończoności. Dowód Littlewooda nie dostarczał efektywnie takiego przedziału $\langle 2, T_0\rangle$, w którym funkcja $\pi(x) - \mathrm{li}\,x$ zmienia znak co najmniej jeden raz. Dopiero w 1955 r. Skewes [12] dowiódł, że można przyjąć $T_0 = \exp_4 7{,}705$. Knapowski w pracy [6] wykazał, że dla $T \geqslant \exp_5 35$ zachodzi nierówność $v(T) \geqslant e^{-35}\log_4 T$.

Szereg prac Knapowskiego z analitycznej teorii liczb dotyczy własności funkcji Möbiusa $\mu(n)$. Jak wiadomo, dla rozstrzygnięcia wielu problemów ma znaczenie zbadanie zachowania się funkcji $M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)$ przy $x \to \infty$. Na przykład warunek $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$ jest równoważny hipotezie Riemanna o rozmieszczeniu zer funkcji ζ. W związku z tym Knapowski przeprowadzał oszacowania funkcji $|M(x)|$ od dołu i uzyskał między innymi następujące wyniki [7]:

TWIERDZENIE. *Z hipotezy Riemanna wynika, że dla* $T > c$

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} M(x) \geqslant \sqrt{T}\exp\left(-15\frac{\log T\log_3 T}{\log_2 T}\right),$$

$$\min_{1\leqslant x\leqslant T} M(x) \leqslant -\sqrt{T}\exp\left(-15\frac{\log T\log_3 T}{\log_2 T}\right).$$

TWIERDZENIE. *Z hipotezy Riemanna wynika, że liczba* $\tau(T)$ *zmian znaku funkcji* $M(x)$ *w przedziale* $\langle 1, T\rangle$ *spełnia przy* $T > c$ *nierówność* $\tau(T) \geqslant c'\log_2 T$.

W dowodach wielu twierdzeń udowodnionych przez Knapowskiego zasadniczą rolę odgrywał następujący lemat Turána [13], uogólniony następnie przez Knapowskiego. Lemat ten w swym najprostszym sformułowaniu może być interesujący również dla niespecjalisty.

LEMAT. *Jeśli liczby zespolone* $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *spełniają warunek*

$$1 = |z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_N|$$

i dla pewnych liczb całkowitych $m \geqslant 0$, $h \in \{1, 2, \ldots, N\}$

$$|z_h| \geqslant 2\frac{N}{m+N},$$

to istnieje taka liczba całkowita v *z przedziału* $\langle m, m+N\rangle$, *że*

$$|b_1 z_1^v + b_2 z_2^v + \ldots + b_N z_N^v| \geqslant \left(\frac{|z_h|}{2}\right)^v \min_{h\leqslant j\leqslant N} |b_1 + b_2 + \ldots + b_j| \left(\frac{N}{24e(2N+m)}\right)^N.$$

Lemat ten znajduje zastosowanie przy oszacowaniach sum potęg o jednakowych wykładnikach (lub kombinacji liniowych takich potęg), gdy mamy mało informacji o podstawach tych potęg. Sytuacja taka występuje często w analitycznej teorii liczb. Na przykład wiele zagadnień można sprowadzić do oszacowania sumy potęg, których podstawy zależą od nietrywialnych zer funkcji ζ Riemanna.

Zainteresowania Stanisława Knapowskiego nie ograniczały się do analitycznej teorii liczb, gdzie uzyskał najwięcej cennych rezultatów. Interesował się też innymi działami matematyki, nawet bardzo odległymi od analitycznej teorii liczb. Przykładem tego jest kilka prac [8], [9] poświęconych kryteriom nierozkładalności wielomianów nakładającym pewne warunki na grupę Galois rozpatrywanych wielomianów.

Bibliografia

[1] П. Л. Чебышев, *О новой теореме относящейся к числу простых чисел вида* $4n+1$ *и* $4n+3$ (письмо П. Л. Чебышева к г. Фусу), Полное собрание сочинений т. I, Москва 1946, str. 276.

[2] — *Об одном преобразовании числовых рядов*, Полное собрание сочинений, т. I, Москва 1946, str. 280–282.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1917), str. 119–196.

[4] S. Knapowski, P. Turán, *Comparative prime-number theory* I—VIII, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962), str. 289–364; 14 (1963), str. 31–78, str. 241–268.

[5] S. Knapowski, *Further developments in the comparative prime-number theory* I—VI, Acta Arith. 9 (1964), str. 23–40; 10 (1964), str. 293–313; 11 (1965), str. 115–127, str. 147–161, str. 193–202; 12 (1966), str. 85–96.

[6] S. Knapowski, *On sign-changes of the difference* $\pi(x)-\mathrm{li}\,x$, ibidem 7 (1962), str. 107–119.

[7] — *On oscillations of certain means formed from the Möbius series I*, ibidem 8 (1963), str. 310–320.

[8] — *O pewnych kryteriach nierozkładalności wielomianów*, Prace Mat. 1 (1955), str. 272–275.

[9] — *Kryterium nierozkładalności równań stopnia* $p+1$, ibidem 2 (1956), str. 170–171.

[10] E. Landau, *Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie*, Math. Z. 1 (1918), str. 1–24.

[11] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R., Paris 158 (1914), str. 1869–1872.

[12] S. Skewes, *On the difference* $\pi(x)-\mathrm{li}\,x$, Proc. London Math. Soc. 5 (1955), str. 48–70.

[13] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.