ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

wmptm 1897

K. O. May (Toronto)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Literatura matematyczna: jej wzrost i jakość(1)

I. Wprowadzenie

Matematyka została objęta eksplozją o wykładniczym wzroście, który charakteryzuje współczesne społeczeństwo. Od roku 1868 literatura matematyczna wzrosła od szacunkowej liczby 40 tys. tytułów do 439 tys. tytułów, przy czym wzrost ten przebiegał bardzo blisko krzywej wykładniczej N, przedstawionej na rysunku 1, ze stopą wzrostu 2,5% (2). Bieżąco ukazuje się teraz ponad tysiąc streszczeń nowych prac miesięcznie. Jest to ilość imponująca, a nawet przytłaczająca. Lecz jak wygląda sprawa jakości tych prac? Czy dla uzyskania informacji, które przypuszczalnie zawierają, trzeba je wszystkie przeczytać? Nikt nie zna odpowiedzi na te i podobne pytania, choć stanowią one podstawę dla zrozumienia współczesnego rozwoju nauki i dla ewentualnego podjęcia rozsądnych decyzji na przyszłość.

Choć szczegółowe przeanalizowanie całej literatury przekracza możliwości jednego człowieka, to jednak pewne wskazówki można wyłowić

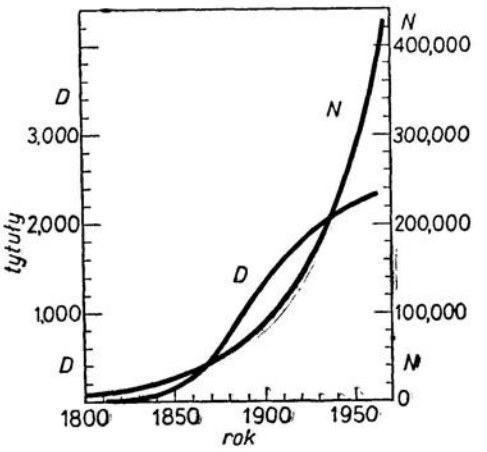
---

(1) Poszukiwania bibliograficzne były finansowane przez Penrose Fund of the American Philosophical Society, a przygotowanie materiału liczbowego i obliczenia przez Society of Sigma Xi. National Science Foundation i Office of Education częściowo finansowały moje badania historyczne prowadzone w latach 1962–1964. Wykład oparty na wcześniejszej wersji tej pracy został sfilmowany przez Mathematical Association of America pod tytułem „Kto zabił wyznaczniki?" a rozpowszechnia go Modern Learning Aids.

(2) Sposób otrzymania tej krzywej oraz inne szczegóły można znaleźć w pracy: K. O. May, *Quantitative growth of the mathematical literature*, Science, 1966, 154, Nr 3757, str. 1672–1673. Przez „literaturę" rozumie się tutaj publikacje naukowe, których streszczenia ukazują się w specjalistycznych czasopismach matematycznych, a więc zarówno prace jak i książki, lecz nie artykuły popularyzatorskie i elementarne podręczniki.

Już po napisaniu tej pracy zwrócił moją uwagę artykuł: J. Folta i Lubos Novy, *Sur la question des méthodes quantitatives dans l'histoire des mathématiques*, Acta Historiae Rerum Naturalium necnon Technicarum, 1965, wydanie specjalne 1.

nawet z niewielkiej próbki. Wybór losowy mógłby dostarczyć przykładów o „typowych" charakterystykach indywidualnych, lecz zestaw składający się z wszystkich publikacji należących do jednej dziedziny ma zdecydowaną przewagę, gdyż ujawnia wzajemne powiązania między poszczególnymi pracami i wykazuje różnice wzrostu wybranej części na tle tendencji rozwojowych całej dyscypliny. Dla tego celu wybrałem teorię wyznaczni-



Rysunek 1. Skumulowana ilość całej literatury matematycznej N (na prawej skali) i literatury dotyczącej wyznaczników D (na lewej skali). Skala dla N jest stokrotnie mniejsza. Obie krzywe są wygładzone, lecz odpowiadają danym bardzo dokładnie

ków, ponieważ jest to dziedzina prosta, niewielka i ma już częściową kronikę w postaci 5-tomowego dzieła Sir Thomasa Muira([3]). Bibliografia oparta na pracy Muira i poszukiwania w czasopismach bibliograficznych([4]) wskazują, że literatura w tym wybranym zakresie nagromadziła się według całkiem innego wzoru niż całość literatury matematycznej. Krzywa D na rysunku 1 pokazuje, że do 1900 r. ilość książek i prac o wyznaczni-

([3]) T. Muir, *The theory of determinants in the historical order of development*, 4 t., drugie wydanie 1906, 1911, 1920 i 1923 (Londyn, MacMillan; przedruk New York, Dover 1960) i *The history of determinants*, 1900–1920 (Londyn, Blackie, 1930). Pierwsze 4 tomy obejmują okres „od zarania" do 1900 r. Tom 5 zawiera indeks rzeczowy całości. Praca ta nie jest właściwie historią, lecz raczej bibliografią z obszernymi streszczeniami i komentarzami zamieszczonymi zarówno w układzie tematycznym, jak i chronologicznym. Wiele prac jest streszczonych kilkakrotnie przy omawianiu różnych problemów.

([4]) Dla okresu do 1920 r. posługiwałem się dziełem Muira, eliminując niektóre tytuły, ponieważ Muir traktował teorię macierzy jako część teorii wyznaczników (dzisiaj przeważa odwrotny pogląd) i dodając kilka tytułów, które zostały przeoczone. Dla okresu 1920–1930 sprawdziłem *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, dla okresu 1931–1940 — *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, a po roku 1940 — *Mathematical Reviews*. We wszystkich tych czasopismach bibliograficznych prace o wyznacznikach są zwykle zgrupowane pod hasłem algebra liniowa lub teoria macierzy, możliwe jednak, że przeoczyłem pewne zastosowania streszczone gdzie indziej, mimo poszukiwania w najbardziej prawdopodobnych ku temu miejscach.

kach rośnie szybciej niż całość literatury matematycznej, potem jej stopa wzrostu maleje. W zielonych latach teorii jej udział w skarbcu wiedzy matematycznej wynosił 1%, lecz dzisiaj spadł o połowę i gwałtownie się kurczy.

II. Historia wyznaczników

Historia wyznaczników sięga dwa tysiące lat wstecz, do obserwacji chińskich uczonych dotyczących związków między współczynnikami układu równań liniowych a wartościami niewiadomych. W najprostszym przypadku dwóch równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{aligned} ax+by &= e, \\ cx+dy &= f \end{aligned} \tag{1}$$

rozwiązania są postaci

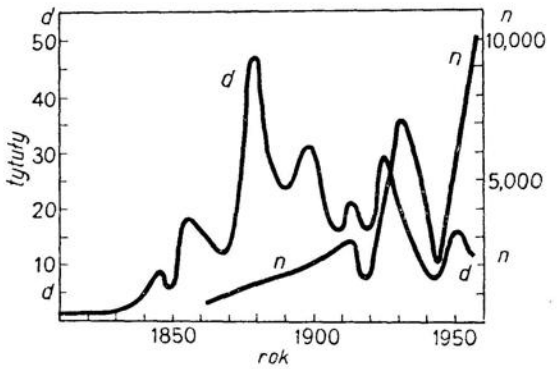
$$x = \frac{ed-fb}{ad-bc}, \qquad y = \frac{af-ce}{ad-bc}. \tag{2}$$

Wspólny mianownik, $ad-bc$, jest związany z parą współczynników $[(a, b), (c, d)]$ w taki sam sposób, jak liczniki $ed-fb$ i $af-ce$, odpowiednio z parami $[(e, b), (f, d)]$ i $[(a, e), (c, f)]$. Dzisiaj mówimy, że $ad-cb$ jest funkcją (zwaną *wyznacznikiem*) czterech zmiennych ułożonych w kwadrat (macierzy współczynników $[(a, b), (c, d)]$). Podobnie definiuje się tę funkcję dla układu większej liczby równań i niewiadomych. Funkcje takie zaczynają się pojawiać w algorytmach Seki Kowa i Leibniza w końcu XVII wieku oraz w algorytmach Colina Maclaurina (który pierwszy opublikował wzór tradycyjnie przypisywany Gabrielowi Cramerowi([5])), a także u innych autorów w XVIII wieku. Dopiero jednak w pierwszych dwóch dekadach XIX wieku pojawiły się systematyczne badania tej funkcji (w szczególności przez Augustyna Cauchy'ego) i jej zastosowania w analizie i geometrii (w szczególności w pracach C. Jacobiego i Artura Cayleya).

Rysunek 2 przedstawia rozwój tej teorii po jej „wystartowaniu". Krzywa d obrazuje wygładzoną średnią rocznej ilości prac o wyznacznikach. Widzimy, że produkcja wzrosła od niespełna 2 tytułów rocznie do około 50, z dwoma okresami spadku. Następnie aktywność w tej dziedzinie spada równie szybko, jak się poprzednio podnosiła, podczas gdy całość

([5]) Ten przykład ogólnej zasady, że wzory nie noszą imion tych, którzy je odkryli podał C. B. Boyer w pracy: *Colin Maclaurin and Cramer's Rule*, Scripta Mathematica 27, Nr 4 (1966), str. 377–379.

literatury matematycznej (którą na rysunku 2 przedstawia krzywa n) stale rośnie. Wydaje się, że w czasie obu wojen światowych i w okresie wielkiego kryzysu sytuacja zewnętrzna dominuje nad tendencją rozwojową zarówno całej matematyki, jak i tej jej wybranej części, ale później utrzymuje się tendencja spadkowa literatury poświęconej wyznacznikom przy stałym wzroście całej literatury matematycznej.



Rysunek 2. Krzywe ciągłe uzyskane na podstawie 5-letnich średnich ruchomych rocznej ilości prac. Krzywa d (lewa skala) dotyczy publikacji o wyznacznikach, a krzywa n (prawa skala) wszystkich publikacji matematycznych. Skala dla n została zmniejszona 200-krotnie. 5-letnia średnia ruchoma wygładza zmienność losową wynikającą z opóźnień druku, błędów datowania itp. Krzywe skumulowanej ilości prac przedstawione na rysunku 1 nie powstały ze skumulowania krzywych z rysunku 2, lecz wynikają z policzenia publikacji w każdym roku

Próba powiązania krytycznych punktów tej krzywej z wydarzeniami matematycznymi i pozamatematycznymi jest pokusą naturalną. Klasyczne prace Jacobiego z 1841 r. i wprowadzenie w tym samym roku przez Cayleya sugestywnego oznaczenia

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{3}$$

dały bez wątpienia impuls gwałtownemu rozwojowi([6]). Być może rewolucja 1848 r. i inne wielkie zaburzenia dadzą się związać z chwilowymi zahamowaniami tego rozwoju. Można przypuszczać, że ożywienie następujące po okresie fluktuacji, około 1900 r., wiąże się z nowymi ideami (np. nierównościami, wyznacznikami nieskończonymi) i nowymi zasto-

([6]) Oznaczenie Cayleya zostało nazwane „zbyt sugestywnym", gdyż otworzyło drogę orgii formalizmów. Pozwala ono z pewnością na mylenie wyznacznika $ad - cb$ macierzy $[(a, b), (c, d)]$ z samą macierzą, co trapiło matematyków przez stulecia i ciągle powoduje zamieszanie u studentów. W tej pracy „wyznacznik" oznacza funkcję, a nie macierz.

sowaniami (np. w równaniach całkowych i w teorii grup). Zapraszam czytelnika do wysuwania własnych przypuszczeń, jednakże przedstawiona niżej analiza jakości literatury poświęconej wyznacznikom pokazuje wzór rozwoju, który, być może, jest charakterystyczny dla wielu działów matematyki.

III. Analiza jakości prac

Grać rolę krytyka i osądzać wysiłki lepszych od siebie jest zajęciem ryzykownym. Trzeba to jednak było zrobić dla dokonania analizy literatury, a w szczególności wyodrębnienia z niej tego, co warte uwagi. Część zadania była łatwa. Rzeczą oczywistą było odcięcie („ostrzem brzytwy") prac naukowych i monografii od innych materiałów. Te ostatnie w naturalny sposób rozdzieliły się na: zastosowania wyznaczników, studia historyczne oraz na problemowe przeznaczone dla specjalistów, podręczniki i materiały pedagogiczne adresowane do studentów lub zawierające materiały szkoleniowe. Wkrótce okazało się, że rzekoma brzytwa nie była tak ostra jakby tego chciała metafora. Czasem cięła powietrze, natrafiając na dawno rozwiązane problemy, czasem okazywała się zbyt tępa aby odciąć cokolwiek. Wobec tego oddzieliłem publikacje zawierające istotnie nowe wyniki od powtórzeń i prac trywialnych. Ostatecznie otrzymałem następujących 6 klas, które wymieniam w porządku ich malejącego wpływu na rozwój wiedzy matematycznej.

1. Nowe idee i wyniki. Na przykład, w 1771 r. Vandermonde pierwszy sformułował twierdzenie, że (używając współczesnej terminologii), jeśli dwa wiersze macierzy są takie same, to jej wyznacznik jest równy zeru. Na to, aby znaleźć się w tej klasie praca musi zawierać nowe twierdzenie, podawać nowy dowód, wprowadzać nowe podejście lub sugerować nowy kierunek badań. Jeśli dwie prace ukazały się praktycznie równocześnie, to włączam je tutaj obie.

2. Zastosowania. Zastosowanie teorii nie jest zazwyczaj częścią tej teorii, lecz wiadomość o tym, że się ona stosuje w pewnej sytuacji jest częścią wiedzy o tej teorii, ma naukowe znaczenie dla tej teorii i stanowi część dyscypliny, do której ta teoria należy. Jeśli jednak jakieś zastosowanie jest „dobrze znane", to inny jego przykład należy już tylko do dziedziny zastosowań. Zgodnie z tym włączyłem tutaj nowe (lub prawie nowe) zastosowania.

3. Opracowania i studia historyczne. W tej klasie znalazły się publikacje, których wartość naukowa polega na logicznej lub historycznej analizie dotychczasowych wyników i które przeznaczone są dla specjalistów.

Nie próbowałem tutaj oceniać ich nowatorstwa, choć wiele z tych prac jest wysoce oryginalnych. Zresztą prace, które wywarły największy wpływ to na pewno te, które zaliczają się równocześnie do pierwszych trzech lub czterech klas.

4. Podręczniki i materiały szkoleniowe. W odróżnieniu od trzeciej klasy, publikacje te są przeznaczone dla studentów i dla celów szkoleniowych.

5. Powtórzenia. Prace te pretendowały do pierwszej klasy, lecz w rzeczywistości nie zawierają oryginalnych wyników, dowodów, metod i sposobów podejścia. Wydaje się, że w większości są one raczej niezawinionymi produktami niedouczenia niż świadomymi plagiatami([7]).

6. Prace trywialne. Podobnie jak publikacje z piątej klasy, prace te pretendowały do pierwszej klasy, lecz ich wartość i nowatorstwo są tak znikome, że trudno byłoby uznać, iż stanowią istotny przyczynek do nauki. Ta klasa jest najtrudniejsza do określenia. Być może następujące powiedzonka najlepiej ilustrują właściwy w tym przypadku rodzaj subiektywnej oceny: „Łatwiej samemu udowodnić niż szukać, jeśli nawet jest pod ręką", „Za mało na doktorat, a wątpliwe na magisterium", „Szkoda czasu na czytanie, nawet jeśli cię to interesuje". W praktyce, jeśli ani Muir, ani ja nie znaleźliśmy w pracy niczego (kilkakrotnie Muir nie zwrócił uwagi na pomysły, które później ujawniły swą wartość), to klasyfikowałem ją jako trywialną.

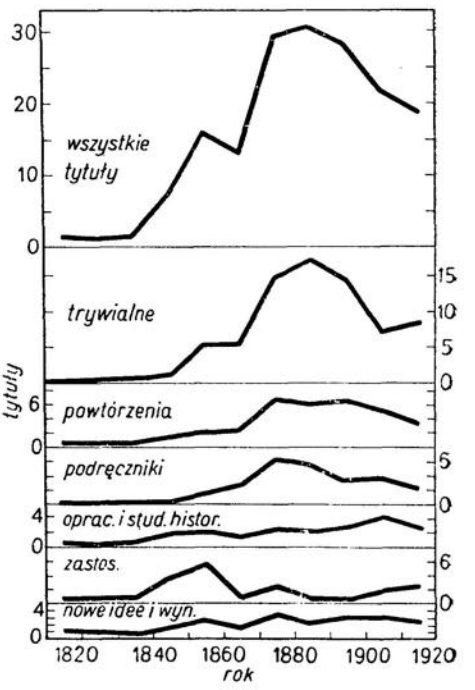
Nie chcąc odgrywać roli Salomona bez pomocy Muira, nie próbowałem klasyfikować prac wydanych po 1920 r. Rozkład 1707 prac o wyznacznikach, wydanych do tego roku, przedstawia się następująco:

Klasa	Liczba prac	%
1. Nowe idee i wyniki	235	14
2. Zastosowania	208	12
3. Opracowania i studia historyczne	199	12
4. Podręczniki i materiały szkoleniowe	266	15
5. Powtórzenia	350	21
6. Prace trywialne	737	43
Razem	1995	117

([7]) Muir daje świadectwo swej własnej sumienności i uczciwości stwierdzając, że wiele jego prac napisanych przed podjęciem badań historycznych stanowiło powtórzenie wcześniej już uzyskanych wyników.

Ktoś, kto nigdy nie badał poważniejszego wycinka literatury ze swej własnej dziedziny, może być zaskoczony tym zestawieniem. Rzeczywiście wydaje się, że proporcja prac zawierających nowe wyniki jest zbyt wysoka, a to dlatego, że pewne powtórzenia zostały bez wątpienia przeoczone, a prace na granicy trywialności były klasyfikowane miłosiernie. Liczba nowych zastosowań może być zawyżona przez niektóre prace zawierające tak nikły cień oryginalności, że mogłyby być pominięte, zostało to być może zrównoważone przez inne, które zostały przeoczone. W trzeciej i czwartej klasie mamy do czynienia ze znaczną rozpiętością jakości prac i znajdujemy w nich wiele powtórzeń. Szacuję, że wszystkie istotne informacje o wyznacznikach wraz z historią zasadniczych linii rozwojowych tej dziedziny zawarte są w nie więcej niż 10% wszystkich prac. Ale i w tych 10% powtórzenia mieszają się z oryginalnymi pomysłami, tak więc przesianie musi być pierwszą operacją, jeśli chcemy uzyskać jakiekolwiek informacje.

Zbadanie trendów rozwojowych każdej z sześciu wyróżnionych klas dostarcza dalszych informacji o przyczynach zmienności w ogólnej rocznej produkcji i ilustruje wzory rozwoju działalności naukowej. Na rysunku 3 pokazana jest przeciętna roczna produkcja całej literatury i każdej poszczególnej klasy w kolejnych dziesięcioleciach. Nowe idee i wyniki są najbardziej stabilną częścią zachowującą, po okresie początkowym, średnią około 3 prac rocznie. Zastosowania wcześnie osiągają swoje mak-



Rysunek 3. Roczna produkcja wszystkich prac. Łamane łączą punkty średnich w każdym dziesięcioleciu. Pierwsza krzywa (wszystkie prace) nie jest sumą pozostałych ze względu na nierozłączność podziału, ale różnice są nieistotne. Na wszystkich wykresach jest ta sama skala

simum. Początkowy ich rozwój po 1830 r. i zahamowanie w latach sześćdziesiątych pozostają w ścisłym związku z nowymi wynikami. Może zahamowanie to było potrzebne do ugruntowania się i rozprzestrzenienia idei, w tym bowiem okresie wzrasta jedynie liczba podręczników. W latach siedemdziesiątych umiarkowanemu wzrostowi nowych wyników i zastosowań towarzyszy gwałtowny przyrost podręczników, powtórzeń i prac trywialnych. O skutecznym rozpowszechnieniu się wiedzy świadczy spadek liczby podręczników i utrzymująca się wysoka liczba powtórzeń i prac trywialnych. Równocześnie opracowania systematyzujące wykazują stały wzrost i dochodzą do szczytu w końcu stulecia. Powojenny szczyt na rysunku 2 spowodowała prawdopodobnie fala powtórzeń i trywialności pojawiająca się w latach dwudziestych, po tym okresie popularność rozważanej dziedziny zaczyna spadać i można przyjąć, że w latach trzydziestych roczna produkcja ma strukturę podobną do tej, jaką miała sto lat wcześniej([8]).

Opisany na tych rysunkach schemat rozwojowy wydaje się całkiem prawidłowy, taki właśnie, jakiego rozsądek kazałby się spodziewać. Początkowo rozpracowuje się zasadnicze twierdzenia w ścisłym związku z zastosowaniami. Sukcesy w tym zakresie powodują powstawanie podręczników, a następnie wciągają do tej dziedziny ludzi, którzy nieuchronnie powodują obniżenie ogólnego poziomu. Wielka ilość powtórzeń i prac trywialnych przyczynia się do rozpowszechnienia idei i stanowi podstawę dla opracowań systematyzujących, które wmontowują ją jako część do większej teorii i redukują jej atrakcyjność. W końcu następuje okres stabilizacji, ożywiany od czasu do czasu nowymi wynikami i zastosowaniami.

IV. Historia jednego tematu

W jaki sposób powstaje tak wiele mało wartościowych prac? Dla uzyskania wskazówek dla odpowiedzi na to pytanie przeczytałem wszystkie prace poświęcone jednemu tematowi, mianowicie pochodnej wyznacznika funkcyjnego([9]). Wśród 58 prac poświęconych temu tematowi — 4 po-

([8]) Około lat czterdziestych naszego wieku podręczniki poświęcone wyznacznikom stały się rzadkością. Przedmiot ten został włączony do algebry elementarnej, a potem do podręczników algebry liniowej, gdzie obecnie zajmuje skromną, lecz pewną pozycję. Powtórzenia (z wyjątkiem tych, które zdołały się zamaskować związkami i terminologią nowych i modnych teorii) i trywialności (z tymi samymi wyjątkami) zostały wyrugowane do czasopism mniej znanych i są na ogół ignorowane przez czasopisma publikujące przeglądy (abstrakty). Czasami odżywa zainteresowanie tą dziedziną niezmiennie związane z zastosowaniami.

([9]) Dla zrozumienia pozostałej części pracy nie trzeba znać ani pochodnych, ani wyznaczników. Zainteresowany czytelnik może jednak znaleźć omówienie matematycznej strony tego tematu w pracy: K. O. May, *Derivatives of determinants and other multilinear functions*, Mathematics Magazine 38 (1965), str. 307–308.

dają nowe wyniki, 8 jest powtórzeniami, 18 zajmuje się zastosowaniami, a 29 to podręczniki([10]). Cztery nowe wyniki są następujące:

(1) Szczególny przypadek (pochodna wrońskianu, Sohwein, 1825).

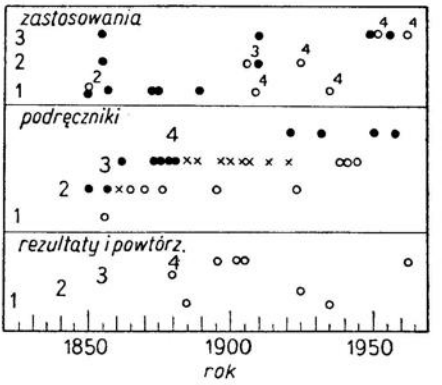
(2) Wzór zasadniczy (Jacobi, 1841).

(3) Wzór uproszczony (Cremona, 1856).

(4) Naturalne uogólnienie (n-ta pochodna, Teixeira, 1880).

Szczególny przypadek (1) łatwo można otrzymać bez wzoru (2) i jak się wydaje nie miał on wpływu na jego uzyskanie. Wzór uproszczony (3) w sposób naturalny wynika ze wzoru (2) i prawdopodobnie był „dobrze znany" jakiś czas przed jego pierwszą publikacją. Z drugiej strony, uogólnienie (4) używało oznaczeń operatorowych, a więc nowych, a i dziś jeszcze właściwych.

Historię tego tematu obrazuje rysunek 4. Z dolnej jego części widzimy, że wynik (1) (1825) był powtórzony dwukrotnie (1885, 1935), wynik (2) (1841) — tylko raz, wynik (3) (1856) — też tylko jeden raz, a wynik (4)



Rysunek 4. Prace o pochodnej wyznacznika. Duże cyfry i czarne kropki oznaczają prace cytujące poprawnie. W każdej z trzech części rysunku znaki pojawiające się na tej samej linii odnoszą się do wyniku, którego numer zaczyna linię. W dolnej części kółka oznaczają powtórzenia. W środkowej części znaki oznaczają pojawienie się wyniku w podręczniku. Krzyżyk oznacza, że lepszy wynik od podanego pojawił się tylko w literaturze naukowej, a kółko, że lepszy wynik był już zamieszczony w innym podręczniku. W górnej części czarne kropki oznaczają użycie wyniku adekwatnego, a kółko oznacza, że właściwy wynik (oznaczony małą cyferką) był już opublikowany

(1880) był powtarzany nie mniej niż czterokrotnie aż po rok 1963([11]). Jak się to zdarzyło? Wynik (1) ukazał się w trudnym do zauważenia podręczniku i w tak zawiłych oznaczeniach, że „nie miał wpływu ani na

([10]) Jedna praca (Cremona, 1856) podaje zarówno nowy wynik, jak i zastosowanie. Do tej próbki nie włączyłem raczej mało istotnego uogólnienia na wyznaczniki wyższych rzędów, podanego przez M. Lecata w 1910 r. w pracy cytowanej w mojej pracy w odsyłaczu ([9]) (systematyzacja podająca nowy dowód) ani też niniejszego artykułu.

([11]) Długi ciąg powtórzeń nie jest czymś niezwykłym. Muir wspomina (t. 5, str. 215) o co najmniej 10 powtórzeniach do 1900 r. wyniku z pracy opublikowanej w 1851 r. w czołowym czasopiśmie.

późniejszych badaczy, ani na upowszechnienie się wiedzy w tym zakresie", aż do czasu gdy w 1884 r. zwrócił nań uwagę Muir([12]). Oba powtórzenia zrobili nieznani matematycy piszący do drugorzędnych czasopism, nie wiedząc, że od dawna znane są ogólniejsze wyniki lub może sądząc, że nowy dowód w specjalnym przypadku może być interesujący([13]). Wynik (2) ukazał się w pracy wielkiego klasyka([14]), który był często cytowany (choć jak widać rzadko czytany) i któremu często niesłusznie przypisywano wzór (3)([15]). Powtórzenie tego wyniku([16]) było częścią toku rozumowania prowadzącego do fałszywego wniosku i nie powinno zostać opublikowane, gdyby autor (lub recenzent) zajrzeli do literatury. Powtórzenie wyniku (3) pojawiło się jako problem w czasopiśmie pedagogicznym([17]). Wynik (4) został pogrzebany przy urodzeniu w dodatku do sprawozdania z posiedzenia London Mathematical Society([18]), gdzie mogli go odnaleźć jedynie najbardziej pedantyczni badacze. Wszystkie cztery powtórzenia ukazały się w czasopismach poświęconych nauczaniu matematyki, a autorami ich byli ludzie nie wydający się być obznajmieni z literaturą naukową.

([12]) T. Muir, *An overlooked discoverer in the theory of determinants*, Philosophical Magazine 18 (1884), str. 416–427. Cytat z pierwszego tomu Muira, str. 175.

([13]) Pierwszy był A. P. Starkow (nie wzmiankowany w słowniku „Biograficzeskij slovar dejatelej estestvoznanija i techniki", Moskwa 1958, zawierającym 4,5 tys. biografii w tym biografię Cremony). W Annals of the University of Kazan, 3 (1884), str. 75–79 opublikował on wzór (1), posługując się pomysłami R. F. Scotta z książki *A treatise on theory of determinants* (Cambridge 1880), którą cytuje, gdy w innym miejscu tej książki pojawiają się wzory (2) i (3), z których natychmiast wynika wzór (1). Drugi był A. Colucci, którego praca ukazała się w Rendiconti Academia della Scienze Fisiche e Mathematiche di Napoli 5 (1935), str. 24–29. Otrzymuje on wzór na n-tą pochodną wrońskianu bez wykorzystania wzoru (3) lub (4), co strywializowałoby dowód.

([14]) C. G. J. Jacobi, *De formatione et proprietatibus Determinantium*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 22 (1841), str. 285–318, przedrukowano jako Nr 77 serii Wilhelma Oswalda Klassiker der exakten Wissenschaften (Lipsk, Engelnam, 1896) oraz C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, t. III (Berlin, Reimer, 1884), str. 355.

([15]) Choć Muir w drugim tomie swojego dzieła streszcza pracę Cremony i odnotowuje wzór (3), nie przeszkadza mu to w trzecim tomie przypisać pierwszeństwo N. Trudiemu, Teoria dei Determinanti (Neapol 1862). Ponieważ (3) wynika łatwo z (2), późniejsi autorzy przypuszczali, że lepszy wzór należy przypisać Jacobiemu, w rezultacie przepisywali swe cytaty wzajemnie bez sprawdzania.

([16]) L. H. Rice, *A Taylor's expansion of a determinant*, Journal of Mathematics and Physics 4 (1925), str. 62.

([17]) Picquet, *Question* 215, Journal de Mathématique Elementaire 4 (1880), str. 325–326.

([18]) F. G. Teixeira, *Note sur la dérivation des determinants*, Proceedings of the London Mathematical Society 12, 14 (1880), str. 212. Praca nie była streszczona w Jahrbuch.

Środkowa część rysunku 4 pokazuje, które wyniki były uwzględnione w podręcznikach. Przy doskonałym przepływie informacji, podręczniki powinny natychmiast uwzględniać nowe rezultaty, specjalnie w tym przypadku, gdyż każdy następny wzór był prostszy, ogólniejszy i nie trudniejszy od poprzedniego. Wynik (1) nie wchodzi tutaj w rachubę, przed uzyskaniem wzoru (2) nie pojawił się bowiem żaden systematyzujący podręcznik. Wyniki (2) i (3) zostały natychmiast wcielone do podręczników, co uwidoczniają czarne kropki. Opóźnienie w przypadku wyniku (4) tłumaczy niefortunne miejsce jego publikacji. Warto zauważyć, że pierwszym autorem, który wykonał swe zadanie na tyle starannie, aby włączyć ten wynik do swego podręcznika, był V. F. Kagan, którego książka([19]) nie jest wymieniona wśród jego licznych przyczynków w standardowym rosyjskim słowniku biografii naukowców. Wynik ten ukazuje się następnie w drugim wydaniu podręcznika Muira([20]) i odtąd staje się „powszechnie znany". Jest rzeczą ciekawą, że autorzy podręczników korzystali z przestarzałych wyników, gdy lepsze były już znane w literaturze (krzyżyki), a robili to i wtedy, gdy uogólnienia ukazywały się już w innych podręcznikach (białe kółka). Widocznie większość piszących nawet nie sprawdzała bardziej odpowiedzialnych i zupełniejszych podręczników, a szła po prostu śladem swych beztroskich poprzedników.

Rysunek 4 daje lepszy obraz tych, którzy korzystali w zastosowaniach z pochodnej wyznacznika. Co prawda i oni nie zawsze używali najnowszych wyników, lecz w większości przypadków wykorzystywali wynik adekwatny (czarne kropki). Nie wykorzystanie wyniku, wtedy gdy był potrzebny i dostępny w literaturze, zdarzyło się tylko w 7 przypadkach na 18 (białe kółka z numerem potrzebnego wyniku), przy czym 5 z nich dotyczyło wyniku (4), który w zasadzie nie był uwzględniony w podręcznikach, a ukazał się w czasopismach nie czytanych przez ludzi pracujących w zastosowaniach matematyki. Na podstawie tej próbki nie możemy jednak uznać, aby matematycy od zastosowań byli bardziej uczeni od autorów podręczników, bowiem w 6 przypadkach na 9 nie wykorzystali oni najnowszego a potrzebnego im wyniku.

Czytelnik może wyciągnąć z rysunku 4 znacznie więcej informacji, lecz powyższa dyskusja pokazuje, że powtórzenia i niewykorzystywanie istniejących rezultatów wynikają z różnych powodów. Najbardziej oczywistym z nich jest zła praca autorów podręczników. Spośród 227 podręczników poświęconych wyznacznikom, które ukazały się do roku 1920,

---

([19]) В. Ф. Каган, *Основная теория определителей*, Odessa 1922.

([20]) T. Muir, *A treatise on the theory of determinants*, wydanie poprawione i poszerzone przez W. H. Metzlera (Londyn, Longmans, 1933, przedruk: Nowy Jork, Dover 1960). Pierwsze wydanie ukazało się w 1882 r. Muir zmarł w wieku lat 90 w 1934 r. Niestety jego dzieło jest źle napisane, ma zły układ i indeksy, nic więc dziwnego, że wiele z jego treści przechodzi niezauważone.

mniej niż pół tuzina ujawnia ślady uważnego śledzenia literatury. Wiele białych kropek na rysunku 4 pokazuje natomiast, jak rzadko zaglądano do tych najlepszych podręczników i do kompendiów Muira.

V. Wnioski

Uogólnianie na podstawie tak małej próbki jest rzeczą nieroztropną. Powyższe rozważania prowadzą jednak do pewnych ogólnych wniosków i stanowią ilustrację sądów wynikających z szerszej lektury i doświadczenia na wielu odcinkach informacji matematycznej. Może czytelnik wybaczy mi pomieszanie sądów opartych na tej próbce i innych źródłach i skonfrontuje je ze swymi własnymi wrażeniami.

Po pierwsze, gładki wzrost skumulowanego zasobu publikacji (rys. 1) zamazuje bardzo wyraźną zmienność produkcji w czasie (rys. 2). Oczywiście używanie krzywych skumulowanych musi być uważane za narzędzie skrajnie wygładzające. Po drugie, ogólny wzrost jest wynikiem nierównomiernego rozwoju poszczególnych tematów i działów bardzo różniących się swym przeznaczeniem i zróżnicowanych jakościowo. Po trzecie, publikacje zawierające nowe pomysły, wyniki, zastosowania, ich systematyczne opracowania oraz wysokiej klasy podręczniki stanowią mniej niż jedną trzecią część całej literatury i nie podlegają gwałtownym fluktuacjom. Zasadnicza masa materiału składa się z powtórzeń, prac trywialnych, kiepskich podręczników i przyczynków, które nie stanowią żadnego wkładu do danej dziedziny nauki, natomiast powodują większość obserwowanych zmienności w czasie. Po czwarte, rozwój niewielkiego wyodrębnionego tematu przebiega w sposób, którego łatwo oczekiwać, teoria i zastosowania współdziałają przy uzyskaniu najcenniejszych wyników, a po okresie nadprodukcji przychodzi czas na systematyzację osiągnięć i wcielenie residuum([21]) w ramy szerszych teorii. Wreszcie okazuje się, że materiał mało wartościowy produkują koła prawie nie mające nic wspólnego ze sposobami komunikowania, środkami publikacji i audytorium kręgów istotnie badawczych.

Końcowe wnioski nasuwają wiele pytań. Czyż powtórzenia, prace trywialne i mierne wprowadzenia nie odgrywają pożytecznej roli w kształceniu? Są one z pewnością świadectwem ludzkiej aktywności, lecz większość z nich jest źle ukierunkowana, to znaczy, za ich pomocą rozchodzi się równie wiele fałszywych informacji co rzetelnej wiedzy, a ponadto blokują kanały informacyjne. Co można zrobić, aby bardziej udostępnić

([21]) Terminu „residuum" użył E. T. Bell w swej książce *Development of mathematics* (2 wydanie, Nowy Jork, McGrow-Hill, 1945) dla określenia tych wyników, które przeżywają, by stać się częścią „żywej matematyki".

ogromną literaturę? Potrzebujemy niewątpliwie wielu badań naukowych w poszczególnych dziedzinach, których wynikiem będą nadające się do czytania analizy historyczne i rzeczowe opracowania idei naukowych oraz bibliografie zaopatrzone w staranne przypisy i indeksy. Lecz badania takie nie będą ani podjęte, ani wykorzystywane, dopóki przyszli matematycy nie zostaną wykształceni w takich metodach pracy i wykładu naukowego, które od dawna zostały ugruntowane w naukach humanistycznych ([22]). Co można powiedzieć o sytuacji obecnej i o przyszłości? Lubimy sobie wyobrażać, że dzisiaj sprawy stoją lepiej, że czasopisma są bardziej wymagające, a recenzenci bardziej wnikliwi. Lecz w rzeczywistości nikt nie wie, jak jest naprawdę, a ci, którzy są bliżej obznajomieni z sytuacją, są sceptyczni. I znowu prawdopodobnie tak długo poprawa sytuacji będzie tylko nieznaczna, jak długo studia historyczne i krytyczne nie staną się uznaną częścią matematycznej twórczości.

([22]) Czasopisma regularnie otrzymują prace, które powtarzają wyniki łatwe do znalezienia nawet przy pobieżnym sprawdzeniu powszechnie dostępnyh tomów Muira. Nic w tym dziwnego, skoro studenci są uczeni lekceważenia pracy bibliotecznej, jako przeciwstawnej „pracy naukowej", która często oznacza rozwiązywanie na ślepo problemów postawionych przez starszych. Większość matematyków nie jest obznajmiona z czasopismami bibliograficznymi i nigdy nie słyszała o Poggendorffie. Nie znam wykładów uniwersyteckich, na których uczono by przyszłych matematyków sposobów posługiwania się literaturą.