ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

wmptm 1897

Dyskusja nad terminologią i symboliką matematyczną

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W dziale tym Redakcja zamierza publikować wypowiedzi krytyczne dotyczące obecnie stosowanych terminów, symboli i utartych zwrotów matematycznych, ich zalet i wad, wypowiedzi sygnalizujące trudności związane z próbami zmiany zakorzenionego terminu, wreszcie nowe propozycje. Mogą to być wypowiedzi dłuższe, o charakterze artykułów, lub krótkie, kilkuwierszowe.

Nie wyklucza się publikowania całkowicie sprzecznych opinii. Opinie publikowane w tym dziale nie będą więc żadnymi obowiązującymi normami; chodzi jedynie o to, aby stosowanie takiego czy innego terminu przez matematyka było oparte na świadomym wyborze opartym na przemyślanych argumentach, a nie na przyzwyczajeniu lub przypadku.

Redakcja prosi o nadsyłanie materiałów do tego działu (pożądane jest, aby wypowiedzi dotyczące różnych spraw były pisane na oddzielnych kartkach).

1. Przeciw unii. W artykule Z. Semadeniego (Wiadom. Mat. 11, str. 181-185) został zaproponowany, a zarazem w następnym artykule A. Wiwegera (str. 187-199) użyty, nowy termin „unia" zamiast dotąd używanego terminu „suma", jako nazwa dla działania $\cup$ na zbiorach.

Skoro $A \cup B$ nie może być „sumą", z czym się trzeba zgodzić, to niech będzie raczej *połączeniem*, a nie „unią". Słowo „połączenie" jest długie, ale ma tę zaletę, że nie prowadzi do trudności w języku mówionym. Mówiąc „połączmy zbiory", „po połączeniu zbiorów", „zbiory A i B dają w połączeniu zbiór C" etc. nie oddalamy się zbytnio od obecnego sposobu mówienia kiedy mówimy „zsumujmy zbiory" etc. Oczywiście, że te zwroty nie należą do ścisłego słownika matematycznego (tak jak nie należy doń np. słowo „scałkować"), ale wiadomo, że z każdym terminem matematycznym związana jest pewna ilość zwrotów potocznych, które nieraz decydują o powodzeniu terminu, a jeszcze częściej o jego niepowodzeniu. Zły termin raz wprowadzony jest bardzo trudny do wyrugowania: wiadomo, że „ciało" jest złe, ale nie zanosi się tu na jakąś zmianę. Termin „unia" jest dlatego zły, bo nie ma wygodnych pochodnych zwrotów potocznych. Jak mówić: „zuni(fik)ujmy zbiory" czy „zjednoczmy zbiory" (bo unia i zjednoczenie to słowa bardzo bliskoznaczne, a więc może „zjednoczenie" zbiorów, jeszcze jeden termin do kolekcji). Innym proponowanym terminem było słowo „złącz". Ten termin jest zły, bo jest neologizmem, a w języku polskim słowa mają tyle synonimów, że wystarczy korzystać ze słów istniejących, wykorzystując je do nadawania im nowych sprecyzo-

wanych znaczeń. Poza tym „złącz" brzmi prawie tak, jak „złącze", a to znaczy miejsce styku dwu przedmiotów, więc „złącz" byłby równie dobry jako nazwa dla $A \cap B$.

Słowo „połączenie" wypróbowałem na wykładach. Jest tylko pozornie niezgrabne. Nie razi, kiedy powtarzają je studenci.

W tym samym artykule jest mowa o „sumie (rozłącznej)". Jest to nazwa połączenia $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ rozłącznych egzemplarzy zbiorów A i B. Terminem angielskim jest „free union" a rosyjskim „swobodnoje objedinienije". Pisano dawniej „disjoint union", ale zarzucono. Bo to nie suma jest rozłączna, ale zbiory. Dobrym terminem polskim byłaby „suma wolna", gdyby nie to, że słowo to już jest zajęte (czy też powinno być zajęte) jako nazwa dla sumy prostej grup, modułów etc. Stąd propozycja, by mówić *połączenie wolne.*

Jerzy Mioduszewski

Od kilku lat już stale używam terminu „złączenie" w znaczeniu „suma zbiorów". Użycie tego samego terminu „suma" w obydwu znaczeniach nie jest wskazane, szczególnie w szkole, jak również, gdy mamy do czynienia z dorosłymi, którym takie dwuznaczności mogą przeszkadzać. Wolę mówić złączenie niż unia, bo jest to termin, który mniej więcej sam wyjaśnia swoje znaczenie i łatwo się odmienia. Wolę też złączenie niż połączenie, bo jest o jedną sylabę krótsze, a poza tym potocznie termin złączenie jest mniej używany, więc użycie jego od razu zwraca uwagę, że mamy coś odrębnego na myśli. Słowo „złącz" jest zbyt niezwykłe i raczej razi.

Mówimy złączenie zbioru A z B, lub A złączone z B, lub złączenie rodziny zbiorów Z. Ale stopniowo również przyzwyczajamy się, że można także używać słowa „suma" w znaczeniu „złączenie". Zwykle „suma" jako krótsza bierze górę, ale podkreślamy w ten sposób dwa różne znaczenia tego wyrazu. Jestem za „złączeniem".

W. Zawadowski

2. Liczby naturalne. Problemem nurtującym od dawna wiele osób jest to, czy termin „liczby naturalne" powinien dotyczyć liczb $1, 2, 3, \ldots$ czy też liczb $0, 1, 2, \ldots$

W większości podręczników, w szczególności w podręcznikach szkolnych, 0 nie jest zaliczane do liczb naturalnych. Są jednak książki, w których przyjęty jest ten drugi punkt widzenia. Charakterystycznym przykładem jest *Arytmetyka teoretyczna* Sierpińskiego, w której rozdział I (napisany przez J. Łosia) dotyczy liczb naturalnych; ponieważ wygodniej było rozpoczynać wykład od liczb $0, 1, 2, \ldots$, a zero nie było zaliczane do liczb naturalnych, autor wprowadził specjalny termin „liczby podstawowe", z którego zrezygnował w dalszych wydaniach, przyjmując, że liczby naturalne zaczynają się od 0.

Jest wiele argumentów przemawiających za zaliczeniem zera do liczb naturalnych:

1) Liczbę naturalną określa się jako liczbę kardynalną zbioru skończonego; zero jest liczbą kardynalną zbioru pustego; zbiór pusty jest skończony (nota bene opory psychiczne wobec zera przypominają opory wobec zbioru pustego).

2) Zbiór $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ma element neutralny ze względu na dodawanie, a zbiór $N = \{1, 2, \ldots\}$ nie ma, co powoduje rozmaite niewygody.

3) W teorii ciągów można pisać $a_1, a_2, \ldots$ lub też $a_0, a_1, \ldots$; w zasadzie jest to obojętne. Natomiast w teorii szeregów potęgowych rozpoczynanie od 1 (tzn. rozpatrywanie szeregów bez wyrazu stałego) nie miałoby sensu; z tego powodu w teorii szeregów liczbowych również zazwyczaj zaczyna się sumowanie od 0.

4) Zbiór N nie jest zamknięty ze względu na szereg podstawowych operacji występujących w elementarnej matematyce. Oto przykłady: reszta z dzielenia liczb należących do N może nie należeć do N; przy przedstawieniu liczby w układzie pozycyjnym

$$n = a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + \ldots + a_1 g + a_0$$

($g \geqslant 2$; $a_m = 0, \ldots, g-1$) liczby $a_m, \ldots, a_1, a_0$ mogą nie należeć do N. Powoduje to liczne niezgrabności, których dobrym przykładem jest projekt programu nauczania matematyki dla klas I—IV szkoły podstawowej opublikowany w „Życiu Szkoły" nr 6 z 1968 r., w którym wielokrotnie powtarza się zwrot „liczby naturalne z zerem" (np. „arytmetyka liczb naturalnych z zerem do 20").

Liczba zero występuje w programie kl. I (zarówno dawnym, jak i nowym); już więc na samym początku nauczania zbiór N okazuje się niewystarczający(1).

5) System aksjomatów Peano można sformułować zarówno dla zbiorów N i N_0 bez większych różnic; natomiast opierając kurs arytmetyki na pojęciu sumy i iloczynu (kartezjańskiego) zbiorów skończonych otrzymujemy eleganckie ujęcie, w którym nieuwzględnianie zera byłoby sztuczne.

Istnieje zasadnicza różnica między dołączaniem zera do zbioru N a dołączaniem ułamków lub liczb ujemnych; to pierwsze nie wymaga zmiany koncepcji, a to drugie i trzecie wprowadza istotnie nowe pojęcia. Szczególnie wyraźnie widać to na przykładzie kombinatoryki, w której opuszczanie zera jest nie do przyjęcia, a z drugiej strony wszystkie podstawowe pojęcia można zdefiniować w terminach zbiorów i funkcji (np. $\binom{n}{0}$

(1) Rozporządzenie Ministra Oświaty Francji z dnia 2. I. 1970 r. wprowadzające nowy program nauczania matematyki w klasach początkowych zawiera (na str. 353) zdanie: „Zéro est un nombre naturel".

jest to liczba podzbiorów pustych zbioru n-elementowego). Natomiast ani ułamki, ani liczby ujemne nie pojawiają się w typowych zagadnieniach kombinatorycznych.

Sytuacja wydaje się więc całkiem prosta: nie zaliczanie zera do liczb naturalnych jest tylko kwestią tradycji (zero jest historycznie późniejsze niż np. ułamki) i nie jest logicznie umotywowane, podobnie jak umieszczenie zera na tarczy telefonu na końcu, a nie na początku.

W rzeczywistości sprawa jest znacznie bardziej poważna, gdyż wiąże się z zagadnieniem odliczania. Na rozkaz „Kolejno-odlicz!" żołnierze liczą „raz, dwa, trzy, ..." a nie „zero, jeden, dwa, ..." i to jest nie tylko sprawą przyzwyczajenia. Chodzi bowiem o to, aby liczebnik powiedziany przez ostatniego żołnierza był liczbą żołnierzy, zbiór $\{1, \ldots, n\}$ ma bowiem n elementów, a zbiór $\{0, \ldots, n\}$ ma o jeden więcej.

Liczby naturalne w sensie von Neumanna mogą być określone indukcyjnie: 0 jest zbiorem pustym; n jest zbiorem $\{0, \ldots, n-1\}$. W tym przypadku n jest zbiorem n-elementowym. Odpowiada to zaczynaniu od 0, które czasami jest całkiem naturalne, np. chętnie rozpatrujemy funkcje dwuwartościowe przyjmujące wartości 0, 1 (funkcje charakterystyczne), a nie wartości 1, 2. Jednakże ogólne przyjęcie zasady odliczania od 0 wydaje się niemożliwe i bezsensowne; np. w klasie I dziecko licząc przedmioty będzie liczyć 1, 2, ... tak, aby ostatnia liczba była liczbą elementów rozpatrywanego zbioru.

Mimo tych poważnych zastrzeżeń wydaje mi się, że należałoby przyjąć zasadę, że 0 jest liczbą naturalną, a przy okazji spopularyzować pisanie wskaźników od 0 tam, gdzie to odpowiada sytuacji (np. przy ciągu arytmetycznym $a_0, a_1 = a_0 + d, \ldots, a_n = a_0 + nd$).

Zbigniew Semadeni

W poprzedniej wypowiedzi przytoczono wiele argumentów za zaliczeniem zera do liczb naturalnych oraz zasadniczy argument za pozostawieniem nazwy liczb naturalnych liczbom całkowitym dodatnim. Argument ten związany jest z odliczaniem. Tutaj chcę dodać kilka uwag krytycznych na temat wspomnianych argumentów przeciwnych.

Argument 3) dotyczący numeracji wyrazów szeregu potęgowego nie wydaje się przekonywający, gdyż nie ma potrzeby, by numery wyrazów szeregu były liczbami naturalnymi (por. szeregi Laurenta).

Argument 4), że zbiór $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots\}$ nie jest zamknięty ze względu na szereg podstawowych operacji występujących w elementarnej matematyce można podważyć. Zbiór $\boldsymbol{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ również nie jest zamknięty ze względu na pewną taką operację, mianowicie operację największego wspólnego dzielnika, jeżeli termin największy pojmować w sensie

porządku naturalnego, jeżeli zaś termin ten pojmować w sensie częściowego porządku indukowanego przez relację podzielności, to wprawdzie $(0, 0) = 0$, ale występująca niezgodność obu porządków stanowi komplikację z dydaktycznego punktu widzenia. Wiąże się z tym brak dla liczby 0 kanonicznego rozkładu na czynniki pierwsze.

Dalej jeśli przy rozwinięciach systematycznych wygodnie jest operować zbiorem $\boldsymbol{N}_0$ jako zbiorem dopuszczalnych cyfr, to przy rozwinięciach na ułamki łańcuchowe wygodnie jest operować zbiorem $\boldsymbol{N}$ jako zbiorem dopuszczalnych mianowników. Najczęściej spotykane funkcje liczbowe $d(u)$, $\sigma(u)$, $\varphi(u)$ nie są określone dla $n = 0$, podczas gdy dotychczas termin „funkcja liczbowa" oznaczał funkcję określoną dla naturalnych n. Zmiana znaczenia terminu „liczba naturalna" pociągałaby więc za sobą konieczność dalszych zmian w nomenklaturze.

Andrzej Schinzel

3. Wartość bezwzględna liczby zespolonej. W terminologii polskiej używane są dwa terminy: *moduł* i *wartość bezwzględna* liczby zespolonej (pierwszy z tych terminów wydaje się częściej używany, z wyjątkiem książek tłumaczonych z języka angielskiego, gdzie używany jest wyłącznie drugi termin).

Uważam, że powinno się zaniechać „modułu liczby zespolonej" z następujących powodów: 1° słowo „moduł" używane jest w matematyce w wielu sensach, na ogół nie mających nic wspólnego z modułem liczby zespolonej; 2° używanie terminu „moduł" w przypadku ciała $\boldsymbol{C}$, a terminu „wartość bezwzględna" w przypadku ciała $\boldsymbol{R}$ jest sprzeczne z istniejącą tendencją do unifikacji terminologii i pojęć, zwłaszcza, że nieraz przyjmuje się, że $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$; 3° używanie dwóch terminów jest niewłaściwe dydaktycznie — wiadomo, że słabsi studenci „wartość bezwzględną" i „moduł" mają nieraz w „różnych szufladkach", nie widząc związku między tymi pojęciami, zwłaszcza, że w podręcznikach często nie ma wzmianki na ten temat.

Zbigniew Semadeni

4. Przeciw wskaźnikom. Używa się ich bez widocznej potrzeby, np. pisząc „$\{U_m\}_{m \in M}$ jest pokryciem zbioru X", a wystarczyłoby napisać „P jest pokryciem zbioru X". Znane są trudności ze wskaźnikami w druku. Można je nieco zmniejszyć pisząc $\{U_m\colon m \in M\}$. Ale zrozumiałe względy estetyczne to tylko jedno: nadużywanie wskaźników prowadzi do trudności matematycznych. Jeślibyśmy chcieli rozważyć zbiór wszystkich pokryć zbioru X i jednocześnie chcieli używać wskaźników, to byśmy nie mogli.

Bo byłby to zbiór wszystkich odwzorowań $f\colon M \to \exp X$ takich, że $\bigcup \{f(m)\colon m \in M\} = X$, gdzie M przebiega wszystkie zbiory, a więc wyszlibyśmy poza uniwersum zbiorów. Tymczasem zbiór wszystkich pokryć zbioru X, jeśli traktować je jako pewne rodziny podzbiorów zbioru X, jest podzbiorem zbioru $\exp\exp X$. Spotyka się dowody matematyczne, w których posługiwanie się wskaźnikami stwarza pozory korzystania z pewnika wyboru. Oto przykład (spreparowany, ale oddający pewną rzeczywistość):

TWIERDZENIE. *Podprzestrzeń domknięta A przestrzeni zwartej X jest zwarta.*

Dowód (z (nad)użyciem wskaźników). Niech $\{U_m\colon m \in M\}$ będzie pokryciem otwartym podprzestrzeni A. Dla każdego U_m, $m \in M$, weźmy (!) V_m otwarte w X takie, że $U_m = A \cap V_m$. Rodzina zbiorów $\{X - A\} \cup \{V_m\colon m \in M\}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni X. Wobec zwartości X, zawiera ona podrodzinę skończoną $\{V_{m_1}, \ldots, V_{m_k}, X - A\}$, która pokrywa X. Stąd zbiory $U_{m_1}, \ldots, U_{m_k}$ z rodziny zbiorów $\{U_m\colon m \in M\}$ pokrywają A, co daje zwartość A.

Dowód (bezwskaźnikowy). Niech P będzie pokryciem otwartym podprzestrzeni A. Weźmy pokrycie otwarte przestrzeni X złożone ze zbioru $X - A$ i zbiorów rodziny $Q = \{V\colon V \text{ otwarte w } X \text{ i } V \cap A \in P\}$. Wobec zwartości X, rodzina Q zawiera podrodzinę skończoną S, która wraz z $X - A$ pokrywa X. Stąd zbiory $V \cap A$, gdzie $V \in S$, pokrywają A. Ponieważ zbiory te należą do P, więc dostajemy zwartość A.

Jerzy Mioduszewski

5. Iniekcja, suriekcja, bijekcja? Jakich terminów polskich używać dla iniekcji, suriekcji i bijekcji? Od paru lat próbuję używać terminów „włożenie", „nałożenie" i „przeniesienie". Terminy te lekko się odmieniają i można do nich łatwo się przyzwyczaić. Powstaje pytanie, czy warto je wprowadzać. Myślę, że tylko tam, gdzie to jest uzasadnione, a więc przede wszystkim w szkole. Wprowadzanie zbyt wielu nazw obcojęzycznych w szkole nie jest dobre. Myślę jednak, że po pewnym czasie przyzwyczaimy się też do injekcji, surjekcji i bijekcji. Możemy mówić, że przekształcenie jest przeniesieniem, jeżeli „nie zlepia" i jest nałożeniem.

W. Zawadowski

6. Krata czy sieć? Myślę, że słowo „krata" w znaczeniu lattice jest niefortunne. Skojarzenia ma raczej przykre, a poza tym źle wypada w użyciu. „Krata ideałów pierścienia", brzmi o wiele gorzej niż np. „sieć ideałów". Dlatego wolę słowo „sieć" w znaczeniu „lattice". W języku angielskim lattice to nie jest krata. Lattice to jest kratka, po której np. pną się

róże w ogródku, jej oczka są w kształcie „karo", jest więc w każdym takim oczku wierzchołek najwyższy i najniższy. To jest trochę przyjemniejsze słowo niż „krata". Na kratę mówi się po angielsku „bars" i jej pręty biegną pionowo i poziomo. Wolę jednak mówić „sieć podgrup" niż „krata podgrup"(2).

W. Zawadowski

---

(2) Słowo „lattice" jest używane w fizyce w znaczeniu „sieć krystaliczna" (*przyp. red.*).