ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzje

Karol Borsuk i Wanda Szmielew, *Podstawy geometrii*, wydanie nowe, Biblioteka Matematyczna, tom 10, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970, str. 375, cena zł 45.—

Książka składa się z dwóch części. Pierwsza z nich poświęcona jest wykładowi geometrii absolutnej, euklidesowej i Bolyai–Łobaczewskiego, a druga, znacznie skromniejsza rozmiarami, geometrii rzutowej. Wszystkie te teorie są wyłożone aksjomatycznie, przy czym autorzy przyjmują jako teorie wcześniejsze teorię mnogości, arytmetykę liczb rzeczywistych i topologię ogólną. Teoria mnogości i topologia ogólna w zakresie potrzebnym przy czytaniu książki są wyłożone we wstępie. Wstęp zawiera ponadto krótki zarys historii rozwoju pojęć geometrycznych.

Układ pojęć pierwotnych dla geometrii absolutnej, euklidesowej i Bolyai–Łobaczewskiego pochodzi w zasadzie od Hilberta, który przyjął jako pojęcie pierwotne punkty, proste, płaszczyzny oraz pewne relacje pomiędzy punktami, prostymi i płaszczyznami. Autorzy przyjęli jako owe relacje: relację leżenia między i relację przystawania odcinków. Hilbert nie zakładał żadnych związków zachodzących pomiędzy punktami, prostymi i płaszczyznami, poza tymi, które wynikały z aksjomatów. Podobnie postępowali autorzy w pierwszym wydaniu książki. W nowym wydaniu przyjęli oni natomiast, że proste i płaszczyzny są zbiorami punktów. Takie podejście umożliwiło zastąpienie hilbertowskiej relacji incydencji przez teoriomnogościowe relacje należenia i zawierania.

Układ aksjomatów również w zasadzie pochodzi od Hilberta. Wprowadzone zostały oczywiście pewne zmiany wynikające ze zmiany układu pojęć pierwotnych. Autorzy przywiązują wielką wagę do mocy środków użytych w dowodach poszczególnych twierdzeń. Podobnie jak u Hilberta, aksjomaty zostały podzielone na grupy. Twierdzenia formułowane są stopniowo, najpierw te, które wynikają już z grupy pierwszej, odpowiadającej hilbertowskim aksjomatom incydencji. Następnie autorzy dołączają liniowe aksjomaty uporządkowania i badają ich konsekwencje. Wprowadzony tu został porządek punktów na prostej zgodny z relacją leżenia między.

Po wyczerpaniu tych środków autorzy dołączają płaski aksjomat uporządkowania, tj. aksjomat Pascha i rozwijają absolutną geometrię afiniczną (bez aksjomatu ciągłości). Ukoronowaniem tej teorii jest topologizacja płaszczyzny przeprowadzona przez wprowadzenie bazy trójkątów otwartych. Następnie zostają dołączone aksjomaty przystawania. Autorzy zastąpili tu hilbertowski aksjomat o przystawaniu kątów przez tzw. aksjomat pięciu odcinków. Rozbudowane zostały tu rachunki odcinków i kątów wraz z mnożeniem ich przez liczby dwójkowo wymierne.

Następnie, po rozwinięciu absolutnej teorii równoległości prostych i półprostych, został dołączony aksjomat ciągłości. Za pomocą tego aksjomatu wprowadzono miarę odcinków i rozwartość kątów. Za pomocą czworokąta Saccheri–Legendre'a udowodniono absolutne twierdzenie o sumie kątów w trójkącie. Rozwinięta tu została

również absolutna teoria kąta równoległości. Rozdział poświęcony geometrii absolutnej został zakończony wprowadzeniem współrzędnych na prostej i rozważaniami metageometrycznymi: Autorzy udowodnili niesprzeczność geometrii absolutnej przez podanie dwu modeli arytmetycznych: modelu kartezjańskiego i modelu Kleina. Przykłady te dowodzą równocześnie niesprzeczności geometrii euklidesowej i geometrii Bolyai–Łobaczewskiego oraz niekategoryczności geometrii absolutnej. Z niezależności aksjomatów udowodniono tylko niezależność aksjomatu ciągłości.

Rozdział drugi poświęcony geometrii euklidesowej zawiera aksjomat Euklidesa i wynikające zeń uzupełnienia geometrii absolutnej do euklidesowej. Ze względu na bardzo rozbudowaną geometrię absolutną autorzy mogli na dwunastu stronach doprowadzić do twierdzenia o kategoryczności geometrii euklidesowej.

Nieco dłuższy jest rozdział poświęcony geometrii Bolyai–Łobaczewskiego. Została tu rozwinięta teoria defektu trójkąta, wielokąta i dowolnej figury płaskiej. Analityczna postać funkcji Łobaczewskiego jest otrzymana przez badanie horycyklu. Rozdział kończy twierdzenie o kategoryczności geometrii Bolyai–Łobaczewskiego.

Część druga jest poświęcona geometrii rzutowej trójwymiarowej. Wykład geometrii rzutowej jest również prowadzony aksjomatycznie. Pojęciami pierwotnymi są punkty, proste, płaszczyzny i relacja porządku cyklicznego na prostej. Podobnie jak w części pierwszej, proste i płaszczyzny są traktowane jako zbiory punktów. Wykład geometrii rzutowej jest doprowadzony do twierdzeń o niesprzeczności i kategoryczności.

Książka była początkowo pomyślana jako podręcznik akademicki. Kompletność dowodów i obszerność wykładu zrobiło z niej jednak raczej monografię. W związku z tym należy żałować, że jest ona pozbawiona choćby częściowej bibliografii. Jedynie we wstępie podano kilka historycznie najważniejszych pozycji.

Precyzja dowodów wymagała wprowadzenia wielu specjalnych oznaczeń. Oznaczenia te odznaczają się wyjątkową konsekwencją i przejrzystością (czego nie można powiedzieć o pierwszym wydaniu). Umieszczony na końcu książki wykaz symboli z odesłaniem do definicji znacznie ułatwia czytanie.

Niniejsze wydanie książki jest zbliżone do wersji angielskiej i zawiera wiele zmian w porównaniu z poprzednim wydaniem polskim. Jednakże to, że jest ona nową wersją książki, która została wydana piętnaście lat temu, zaciążyła, jak to słusznie zauważyli we wstępie autorzy, zarówno na układzie książki, jak i na samej jej treści. Nie rozpatruje się w niej zupełnie geometrii elementarnej i zagadnień z tą teorią związanych, jakkolwiek autorzy starają się unikać, jak długo tylko można, nieelementarnego aksjomatu ciągłości. Nie rozpatruje się w tej książce zagadnień zupełności i nieroztrzygalności. Należy jednak mieć nadzieję, że autorzy przedstawią nam wkrótce nową książkę o podstawach geometrii, napisaną równie dobrze jak ta, ale zawierającą bardziej nowoczesną treść.

Lesław Szczerba

Stanisław Hartman, *Wstęp do analizy harmonicznej*, Biblioteka Matematyczna, tom 33, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1969, str. 142, cena zł 28.—

Na początku muszę podkreślić, że nie jestem specjalistą w zakresie abstrakcyjnej analizy harmonicznej i dlatego nie mogę oceniać tutaj doboru materiału w książce profesora Hartmana. Przedstawiam więc zakres materiału objętego przez książkę krótko i bezkrytycznie.