ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XII (1969)

wmptm 1897

A. Pełczyński i Z. Semadeni (Warszawa)

Uwagi o rozwoju analizy funkcjonalnej w Polsce

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Wstęp. W artykule tym chcielibyśmy omówić dotychczasowy rozwój, tsan obecny i dalsze możliwości rozwoju polskich badań w zakresie analizy funkcjonalnej i niektórych dziedzin z nią związanych na tle obecnych tendencji na świecie.

Artykuł podzielony jest na 6 paragrafów. W § 1 określamy co rozumiemy przez termin „analiza funkcjonalna". § 2 i § 3 poświęcone są krótkiemu omówieniu historii analizy funkcjonalnej w Polsce w minionym 50-leciu(1). W § 4 wymienimy kierunki, które naszym zdaniem dominują obecnie w rozwoju analizy funkcjonalnej na świecie, a w § 5 zaproponujemy pewne kierunki, które chcielibyśmy specjalnie rozwijać w najbliższym pięcioleciu w Warszawie. Wreszcie § 6 poświęcony jest sprawom organizacyjnym związanym z kształceniem młodzieży; większość uwag w tym paragrafie dotyczy w zasadzie dowolnej dziedziny matematyki, niekoniecznie analizy funkcjonalnej.

Zasadniczo artykuł składa się z 3 samodzielnych, choć ściśle powiązanych części: § 2 i § 3 (uwagi historyczne), § 1, § 4, § 5 (stan obecny i dalsze możliwości) i § 6 (organizacja kształcenia).

Artykuł ma charakter dyskusyjny, a opinie w nim zawarte odzwierciedlają osobisty punkt widzenia autorów (uzupełniony niektórymi opiniami innych matematyków). Wiadomo, że prognozy rozwojowe w nauce w ciągu np. kilkunastu lat są równie niepewne, jak długofalowe prognozy pogody. W naszym przypadku również sam sens pojęcia „analiza funkcjonalna" jest dyskusyjny i rozmaicie rozumiany przez różne szkoły matematyczne.

Rozwój jakiejkolwiek dziedziny matematyki w Polsce zależy głównie od ilości i jakości młodych matematyków i od wybranych przez nich kierunków, a wybór kierunku zależy od indywidualnych uzdolnień i upodobań, od układu wykładów, seminariów i osób prowadzących zajęcia w końcowych latach studiów danego absolwenta, od jego kolegów.

---

(1) W 1969 roku mija 50 lat od chwili ukazania się pierwszej polskiej pracy z analizy funkcjonalnej; była nią praca Steinhausa [10].

Postęp danej dziedziny zależy również od innych, nieraz losowych czynników; od wolnych etatów, od środowisk zagranicznych, do których jadą młodzi stażyści, od niektórych przyjazdów matematyków zagranicznych, od wstępnych powodzeń czy niepowodzeń w wybranej dziedzinie, czy nawet od przyczyn natury osobistej. I oczywiście też zależy od rozwoju tej dziedziny w innych krajach i od innych dziedzin.

Artykuł ten piszemy przede wszystkim dlatego, aby w oparciu o rozeznanie obecnego stanu i możliwości matematyki polskiej oraz obecnego stanu i tendencji rozwojowych matematyki światowej zdać sobie sprawę z tego, jak należy kształcić studentów i asystentów. Kształcenie młodzieży ma bowiem istotny wpływ na losy zarówno jednostek, jak i całych środowisk matematycznych. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Wiadomo, że kilkuosobowa silna grupa warszawskich matematyków w wieku około 37 lat zajmuje się w roku 1969 analizą funkcjonalną głównie dlatego, że 15 lat wcześniej przyciągnęła ich indywidualność prof. Mazura, a w okresie „dojrzewania" naukowego prof. Mazur troskliwie opiekował się nimi. Ponieważ z kolei działalność tej grupy wywiera pewien wpływ na inne ośrodki (np. poznański czy gdański) i na liczne roczniki studentów, można powiedzieć, że sposób i kierunek kształcenia tej grupy (jako studentów, a później asystentów lub aspirantów) w latach 1954-1958 zaważyły na całej polskiej analizie funkcjonalnej.

Końcowe lata studiów i pierwsze lata asystentury mają ogromny wpływ na profil młodego matematyka. Decydują one zarówno o jego kierunku badań (na ogół na długie lata), jak i o jakości tych badań. Jeżeli ten okres jest zmarnowany, to go już później nie można odrobić. Z tego powodu w naszym artykule szczególnie duży nacisk położymy na kształcenie młodzieży; dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że przez słowo „młodzież" będziemy rozumieć studentów III, IV i V roku, doktorantów oraz asystentów przez pierwsze trzy lata po studiach. O starszych asystentach nie będziemy tu dyskutować, bowiem uważamy, że w normalnych warunkach po trzech latach zdolny asystent powinien mieć napisaną lub zaawansowaną pracę doktorską lub co najmniej powinien mieć wyraźnie ukształtowany kierunek badań.

Artykuł napisaliśmy z inicjatywy doc. M. Starka. Chcielibyśmy tu podziękować przedstawicielom dyrekcji IM PAN, dyrekcji IM UW i Komitetu Nauk Matematycznych za okazaną pomoc i szereg cennych uwag oraz naszym kolegom za przedyskutowanie z nami przedstawionych tu zagadnień.

§ 1. Określenie analizy funkcjonalnej. W matematyce można wyodrębnić cztery główne dyscypliny: algebrę, geometrię z topologią, analizę, matematykę stosowaną oraz „dyscyplinę dodatkową": podstawy matematyki. Każda z tych dyscyplin składa się z wielu działów. Analizę funkcjo-

nalną uważamy za poddyscyplinę analizy matematycznej (w przeciwieństwie do zwykłych działów, jak np. „funkcje analityczne jednej zmiennej zespolonej").

Przyjmiemy określenie następujące:

Przez analizę funkcjonalną rozumiemy zespół teorii badających zbiory funkcji i zbiory operatorów działających między zbiorami funkcji, jeśli zbiory te zaopatrzone są w pewną strukturę topologiczną i zgodną z nią strukturę algebraiczną lokalnie liniową nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Można tu przyjąć określenie nieco ogólniejsze, mówiąc o „strukturach algebraicznych lokalnie liniowych nad pewnym ciałem lokalnie zwartym". Jak wiadomo, każde ciało lokalnie zwarte jest skończonym rozszerzeniem jednego z następujących ciał: ciała $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych, ciała Q_p liczb p-adycznych, lub ciała formalnych szeregów Laurenta nad pewnym ciałem skończonym. Zamiast ciał lokalnie zwartych można by też mówić o ciałach z waluacją. Takie ogólniejsze ujęcie objęłoby również m. in. analizę niestandardową oraz niearchimedesowskie przestrzenie Banacha, które były przedmiotem pewnej liczby prac (por. [7], [9]).

Typowym obiektem o globalnej strukturze liniowej jest przestrzeń Banacha (reprezentowana jako przestrzeń pewnych funkcji ciągłych na zbiorze zwartym). Przykładem obiektu o lokalnej strukturze liniowej jest grupa Liego (reprezentowana jako grupa pewnych operatorów na przestrzeni Hilberta).

W Polsce przez analizę funkcjonalną tradycyjnie rozumiano to, co zostawiła nam w spadku szkoła lwowska, a co można ująć skrótowo jako badanie przestrzeni liniowo-topologicznych i operatorów na takich przestrzeniach.

Z formalnego punktu widzenia sprawa nazwy jakiejś dziedziny jest drugorzędna; jednakże wąskie rozumienie zakresu analizy funkcjonalnej (uwzględniające tylko zbiory o globalnej strukturze liniowej) powoduje rozproszenie obiektów o lokalnej strukturze liniowej po innych działach matematyki.

Obecnie większość teorii badających obiekty o globalnej strukturze liniowej jest już w zasadzie ukształtowana, podczas gdy obiekty o lokalnej strukturze liniowej odgrywają istotną rolę w najwybitniejszych osiągnięciach matematyki w ostatnim dziesięcioleciu. Wąskie rozumienie analizy funkcjonalnej może więc przynieść szkodliwy efekt: mimowolną izolację od trudnych, awangardowych teorii, mających ścisłe powiązania z klasyczną analizą funkcjonalną. Warto przy tym podkreślić, że zarówno w ZSRR, jak i we Francji analizę funkcjonalną rozumie się w bardzo szerokim sensie (por. [4], [1]).

Warto jeszcze zacytować znany pogląd (głoszony m. in. przez I. M. Gelfanda), że analiza funkcjonalna nie jest dziedziną matematyki lecz metodą (czy też punktem widzenia).

§ 2. Rozwój analizy funkcjonalnej w Polsce do II wojny światowej. Analiza funkcjonalna wyrosła na gruncie wielu idei rozwijanych w matematyce na przełomie XIX i XX w., a bezpośredni impuls otrzymała z teorii równań całkowych Volterry i Fredholma, teorii równań liniowych o nieskończenie wielu niewiadomych, teorii całki i pewnych zagadnień rachunku wariacyjnego.

Epokowe znaczenie miały: cykl sześciu prac Hilberta o równaniach całkowych (1904-1910) i prace E. Schmidta (1907-1908). W 1905 r. Fréchet sformułował pojęcie przestrzeni metrycznej. W 1909 r. F. Riesz znalazł ogólną postać funkcjonału liniowego na C [0, 1]. W tych również latach Fréchet i Riesz badają przestrzenie L_p i ich sprzężone, a nieco później (przed 1914 r.) Helly i Riesz publikują twierdzenia o momentach i o rozwiązywaniu równań liniowych, które są bardzo bliskie twierdzeniu Hahna-Banacha.

W tych warunkach dojrzewała synteza pojęć i metod. Można powiedzieć, że analiza funkcjonalna jako oddzielna gałąź matematyki powstała około 50 lat temu. Wielu autorów(2) wprowadziło w swych pracach aksjomaty przestrzeni liniowej unormowanej.

Wprowadzenie aksjomatów to nie wszystko, ważne są głębokie twierdzenia. Trzy najważniejsze twierdzenia analizy funkcjonalnej (twierdzenie Hahna–Banacha, twierdzenie Banacha–Steinhausa, twierdzenie o ciągłości operatora odwrotnego) są związane z nazwiskiem Banacha, a najważniejsze to chyba to, że we Lwowie rozumiano znaczenie tych twierdzeń i pokazano ich liczne zastosowania. Można zaryzykować tezę, że w latach dwudziestych i na przełomie lat trzydziestych najważniejszy ośrodek analizy funkcjonalnej na świecie znajdował się w Polsce.

Okresu tego nie będziemy tutaj omawiać, jest on stosunkowo najlepiej znany, a dokładniejsze jego omówienie wymagałoby głębokiego studium.

Kulminacyjnym osiągnięciem szkoły lwowskiej była monografia Banacha (1932). Książka ta, trwały pomnik polskiego wkładu do analizy funkcjonalnej, ukazała się pod koniec okresu naszego dominowania w analizie funkcjonalnej. W połowie lat trzydziestych wyrośli bowiem nowi poważni „konkurenci": Związek Radziecki i Stany Zjednoczone, a na przełomie lat trzydziestych i czterdziestych dwaj dalsi: Francja i Japonia. Nadal utrzymywali swą doskonałą pozycję Węgrzy.

Warto wymienić nazwiska: ZSRR — Kołmogorow, M. G. Krein, S. L. Sobolew, Kantorowicz, Gelfand, Najmark, Szmulian, Szyłow, Rajkow, D. A. Milman, Plesner, Wulich, Pinsker; USA — Wiener, J. von Neumann, M. H. Stone, Bochner, Hille, Hildebrandt, Dunford, Pettis, Bohnenblust, Phillips, M. M. Day, E. R. Lorch, A. E. Taylor; Francja — Leray, A. Weil, Dieudonné, L. Schwartz; Japonia — Kakutani, Yosida, Nakano; Węgry — F. Riesz, B. Szökefalvi-Nagy.

Wydaje się nam, że polska analiza funkcjonalna, jakkolwiek nadal świetna, już przed 1939 rokiem straciła swą czołową pozycję.

---

(2) Dokładniejsze omówienie i nazwiska można znaleźć w [2], str. 85.

Pojawiły się bowiem nowe, bardzo ważne dziedziny analizy funkcjonalnej, którymi w Polsce nie zajmowano się wcale lub zajmowano się za mało, przede wszystkim teoria przestrzeni Hilberta, która dzięki pracom Schrödingera, Heisenberga i von Neumanna stała się (po 1926 r.) podstawowym narzędziem mechaniki kwantowej. Teorią operatorów na przestrzeniach Hilberta (wraz z teorią spektralną operatorów różniczkowych) stała się dominującym działem analizy funkcjonalnej (pod względem liczby publikacji, zagadnień i wyników dział ten można porównać z całą resztą analizy funkcjonalnej). Z innych „niepolskich" dziedzin wymienimy półgrupy operatorów na przestrzeniach Banacha, teorię ergodyczną, funkcje prawie okresowe i teorię reprezentacji grup Liego.

Jedną z przyczyn, dla których w Polsce nie uprawiano tych dziedzin, był brak dostatecznej liczby ludzi, częściowo spowodowany bardzo małą liczbą etatów na uniwersytetach. Należy sobie uświadomić, że w całym międzywojennym dwudziestoleciu można się doliczyć około 20 osób, które opublikowały prace z analizy funkcjonalnej, a na raz zajmowało się nią znacznie mniej (obecnie w Polsce jest trzykrotnie więcej osób zajmujących się tą dziedziną).

Najlepsze osiągnięcia polskiej analizy funkcjonalnej z lat trzydziestych to prace Schaudera (równania różniczkowe i metody topologiczne w analizie nieliniowej). Warto tu dodać, że wyniki Marcinkiewicza w teorii interpolacji, jakkolwiek nie zaliczane w zasadzie do analizy funkcjonalnej, wywarły w ćwierć wieku później wielki wpływ na teorię operatorów liniowych.

Ponadto szkoła lwowska zaczynała budowę nowych, wielkich teorii; niestety, wiele wyników nie było wówczas publikowanych i dlatego nie wpłynęły one na rozwój tych teorii na świecie.

Wymienimy tu przede wszystkim teorię przestrzeni B_0 zapoczątkowaną przez Mazura i Orlicza w 1933 r. (główna część opublikowana została dopiero w 1948 r.). W teorii tej próbowano przede wszystkim uogólniać znane właściwości przestrzeni Banacha, uzyskując ciekawe zastosowania do teorii sumowalności i do równań liniowych o nieskończenie wielu niewiadomych. Okazało się jednak później, że najciekawsze są te własności przestrzeni B_0, których nie mogą mieć nieskończenie wymiarowe przestrzenie Banacha (zasługą szkoły francuskiej jest wyodrębnienie i zbadanie przestrzeni montelowskich, przestrzeni Schwartza i przestrzeni nuklearnych Grothendiecka).

Próbowano również rozwijać teorię operatorów nieliniowych (która zresztą dziś jeszcze czeka na jednolite ujęcie); wymienić tu należy prace Mazura i Orlicza o operatorach wielomianowych (1935). Zwróćmy uwagę, że polskie wydanie książki Banacha z 1929 r. nosiło tytuł *Teoria operacyj*, Tom I. *Operacje liniowe*, co wskazuje na projekt pisania tomu II o operacjach nieliniowych.

Wreszcie we Lwowie zapoczątkowano teorię algebr Banacha (Mazur, Eidelheit, Turowicz).

Patrząc na wielkie osiągnięcia ówczesnej polskiej analizy funkcjonalnej, warto uzmysłowić sobie pewne słabe jej punkty.

Po pierwsze, polska analiza funkcjonalna była „rzeczywista"; w niedostatecznym stopniu używane były metody teorii funkcji analitycznych (brak ten w zasadzie występuje nadal w obecnej naszej analizie funkcjonalnej). Za słabe były powiązania z analizą klasyczną, co wynikało z niedostatecznej znajomości tego przedmiotu.

Po drugie, niesłusznie zaniedbano operatory liniowe nieograniczone (w polskiej terminologii operator liniowy był ex definitione ciągły), przez co nie objęto bardzo ważnego działu operatorów różniczkowych, które są na ogół nieciągłe (zagadnienia różniczkowe formułowano w postaci całkowej, aby zapewnić sobie ciągłość operatorów).

Po trzecie, pod koniec lat trzydziestych, gdy w wielu krajach zwyciężało „otoczeniowe" traktowanie topologii, w Polsce nadal operowano metryką, co często zmuszało do niepotrzebnego zakładania ośrodkowości rozpatrywanych przestrzeni Banacha (np. przy badaniu słabych topologii). Było to niewątpliwie odbiciem charakteru całej ówczesnej polskiej topologii, która była „metryczna i ośrodkowa" (ten słaby punkt był zresztą najłatwiejszy do usunięcia i powojenne pokolenie nie miało już z tym trudności.).

§ 3. Rozwój analizy funkcjonalnej w Polsce po II wojnie światowej. Wojna rozbiła doszczętnie polską szkołę analizy funkcjonalnej; ilość ocalałych osób można było policzyć na palcach jednej ręki. Prof. Mazur w Warszawie i prof. Orlicz w Poznaniu zaczęli odbudowywać naszą analizę funkcjonalną i szkolić nowy narybek. Tymczasem dziedzina ta poszła znacznie naprzód. Polskie wyniki z teorii przestrzeni B_0 zostały wchłonięte przez zbudowaną w międzyczasie teorię przestrzeni lokalnie wypukłych; polskie wyniki z zakresu algebr Banacha zostały wchłonięte przez wyniki Gelfanda i jego szkoły. Powstały nowe działy, np. teoria dystrybucji, a dawne działy znacznie się rozrosły.

Zmieniła się też rola analizy funkcjonalnej w matematyce. Przestała być wyłączną domeną specjalistów, stała się częścią ogólnego wykształcenia matematycznego. Nawet inżynierowie zaczęli używać pojęcia normy.

Po wojnie niemal w każdym ośrodku w Polsce zaczęto uprawiać analizę funkcjonalną. Obok warszawskich i poznańskich znaczny wkład wnieśli matematycy wrocławscy (szczególnie w związku z probabilistyką i analizą harmoniczną) oraz krakowscy, którzy m. in. używali analizy funkcjonalnej jako narzędzia w teorii równań różniczkowych.

Obecnie wyliczymy te dziedziny analizy funkcjonalnej, którymi polscy matematycy zajmowali się w minionym 25-leciu. Nie chcemy oceniać znaczenia tych dziedzin w całokształcie matematyki ani znaczenia naszych w nich wyników. Mimo to spróbujemy podzielić te dziedziny na dwie grupy.

(A) Teorie w pełni ukształtowane: Ogólna teoria przestrzeni liniowo-topologicznych, funkcje wektorowe, ogólna teoria sumowalności, przestrzenie Saksa i dwunormowe, liniowo-topologiczna klasyfikacja przestrzeni Banacha, bazy, ogólne własności przestrzeni L^p, przestrzenie Orlicza i modularne, operatory wielomianowe i analityczne, produkty tensorowe, wyznacznikowa teoria równań liniowych, przestrzenie nuklearne, wymiar aproksymatywny, ogólna teoria algebr topologicznych, algebry C^*, teoria reprezentacji grup, operatorowe reprezentacje algebr funkcyjnych, przestrzenie funkcji ciągłych, abstrakcyjna analiza harmoniczna, teoria pojedynczych operatorów na przestrzeniach Hilberta, teoria spektralna, półgrupy operatorów, rachunek operatorów Mikusińskiego, teoria dystrybucji, zastosowania do teorii ergodycznej i procesów stochastycznych, zbiory wypukłe, zastosowania do metod numerycznych.

Kolejność wymienionych tu kierunków jest w pewnym stopniu przypadkowa, pomimo starań, aby kierunki związane ze sobą leżały możliwie blisko i aby zaczynać od kierunków ogólnych, a kończyć na zastosowaniach. Wydaje się przy tym, że zainteresowanie trzema pierwszymi kierunkami na świecie wybitnie zmalało, a ogólnie biorąc — zainteresowanie przesuwa się w stronę kierunków później wymienionych.

(B) Teorie rozwijające się: nieskończenie wymiarowa topologia, metody topologii algebraicznej w analizie funkcjonalnej, metody teorii kategorii, ideały w kategoriach przestrzeni Banacha, miary w przestrzeniach liniowo-topologicznych, zastosowania do teorii sterowania.

Niektóre z kierunków wymienionych w (B) będą dokładniej omówione w § 5.

Obecnie polska analiza funkcjonalna ma mocną pozycję w matematyce światowej i wyniki osiągane w Polsce są wysoko cenione przez specjalistów zagranicznych. W rozwoju nowych teorii w Polsce i w popularyzowaniu polskich osiągnięć niepoślednią przy tym rolę odegrały długoterminowe wyjazdy matematyków polskich za granicę, a zwłaszcza do ZSRR i USA.

Spróbujmy teraz przyjrzeć się rozwojowi ilościowemu naszej „kadry" po II wojnie światowej. Zestawimy mianowicie liczby dotyczące polskich matematyków, którzy po wojnie pracowali w analizie funkcjonalnej lub w badaniach swoich w istotny sposób używali pewnych metod analizy funkcjonalnej; nie wliczamy natomiast ani matematyków, dla których analiza funkcjonalna była marginesem zainteresowań, ani tych, którzy mieli w niej wyniki już przed wojną. Dla uproszczenia liczymy tylko

osoby z doktoratem lub niemal napisaną pracę doktorską. W nawiasach podana jest liczba osób, które obecnie (1969 r.) są samodzielnymi pracownikami naukowymi.

Rok rozpoczęcia studiów	Wychowankowie warszawscy	Wychowankowie pozawarszawscy	Razem
$\leqslant$ 1948	12(10)	10(10)	22(20)
1949—1951	14(8)	12(10)	26(18)
1952—1960	12(0)	8(2)	20(2)
Razem	38(18)	30(22)	68(40)

Wobec trudności określenia kogo jeszcze zaliczyć do osób w „istotny sposób używających metod analizy funkcjonalnej", a kogo już nie (wahania rozstrzygaliśmy na korzyść zaliczania), podane liczby mają charakter orientacyjny i porównawczy (ograniczenie się do analizy funkcjonalnej w ściślejszym tego słowa znaczeniu zredukowałoby podane powyżej liczby mniej więcej o połowę).

Pierwsza rubryka (rok rozpoczęcia studiów $\leqslant$ 1948) dotyczy zarówno tych matematyków, którzy rozpoczęli studia przed wojną lub w czasie wojny (ale nie mieli jeszcze prac z analizy funkcjonalnej przed 1939 r.), jak i tych, którzy przyszli na studia w latach 1945-1948.

Rok rozpoczęcia studiów uważamy za lepszy wskaźnik niż np. rok ukończenia studiów, bowiem właściwe kształcenie matematyka zaczyna się zwykle z rozpoczęciem studiów.

Wyróżniliśmy rok 1949 z tego powodu, że wprowadzono wówczas w Polsce nowy, sztywny system studiów ze ściśle określonymi przedmiotami i terminami egzaminów; zmienił się przez to zasadniczo sposób kształcenia studentów. Roczniki zaczynające studia w 1949 r. i 1950 r. miały studia dwustopniowe (3 lata+2 lata), znacznie lepsze dla kandydatów na pracowników naukowych niż obowiązujące później przez wiele lat jednostopniowe studia magisterskie. Rocznik 1951 miał jednostopniowe czteroletnie studia magisterskie (ukończył je w roku 1955 razem z rocznikiem 1950). Był to rocznik szczególnie liczny i wyselekcjonowany, bowiem maturę w tym roku zdawał równocześnie ostatni rocznik dwunastolatki i pierwszy rocznik jedenastolatki (podwójna ilość uczniów była przyczyną ostrej selekcji po IX klasie, tzn. po dawnej „małej maturze", w efekcie której do X i XI klasy liceum ogólnokształcącego przyjęto tylko połowę uczniów). Warto jeszcze dodać, że w 1950 r. odbyła się I Olimpiada Matematyczna. Tak więc tytuł magistra matematyki w 1955 r. uzyskała młodzież wyselekcjonowana z 3 roczników szkolnych (urodzonych 1932-1934), z dwóch kolejnych Olimpiad 1950 i 1951.

Z trzech roczników 1949-1951 mamy 26 osób w tabelce (tj. niemal 9 osób na rok). Z następnych 9 roczników 1952-1960 mamy około 20 osób; nawet jeżeli ta liczba nieco wzrośnie po nowych pracach doktorskich w roku 1970 i następnych (rocznik 1960 ukończył studia w 1965 r.), to otrzymamy niespełna 3 osoby na rocznik.

Obraz ten staje się jeszcze bardziej niepokojący, gdy przeanalizujemy dokładniej długość okresów między otrzymaniem dyplomu magistra a uzyskaniem doktoratu, biorąc pod uwagę np. 10 najszybszych doktoratów. Okazuje się bowiem, że dla roczników 1949-1951 typowy jest okres 3 lat, podczas gdy analogiczny okres dla roczników 1952-1960 wynosi 5 lat.

Złożyło się na to wiele przyczyn. Niewątpliwie wpłynęły na to jednolite studia magisterskie bez podziału na sekcje, które przewidywały ten sam program dla pracowników naukowych co dla nauczycieli. Zmniejszyła się też liczba laureatów Olimpiad przychodzących na matematykę. Wydaje się jednak, że niepoślednią rolę odegrało też niewłaściwe szkolenie asystentów. Wśród tych bowiem, którzy potrzebowali pięciu lat na doktorat, są wybitnie zdolne jednostki.

Z przedstawionej tabelki wynika, że ponad połowa „produkcji" matematyków zajmujących się analizą funkcjonalną przypada na ośrodek warszawski. Szkolenie matematyków warszawskich ma więc decydujący wpływ na całą polską analizę funkcjonalną.

Jeżeli chodzi o doktoraty warszawskie, to najsłabszy okres przypadł na pięciolecie akademickie 1963/64-1967/68. W pięcioleciu tym w Instytucie Matematycznym UW odbyły się dwie obrony prac doktorskich z analizy funkcjonalnej i jedna z pogranicza. W tym samym czasie w Dziale Analizy Funkcjonalnej IM PAN w Warszawie nie było żadnej obrony — nie było w ogóle ani jednego pomocniczego pracownika naukowego, ani jednego doktoranta.

Na Uniwersytecie Warszawskim wyjątkowo urodzajny w talenty matematyczne był rocznik 1959. Wpłynął on pokaźnie na poprawę odpowiedniej rubryki w tabelce. (W 1968 r. odbyły się pierwsze obrony prac doktorskich z tego rocznika, a kilka dalszych prac jest zaawansowanych.) W roku akademickim 1962/63, gdy studenci ci byli na IV roku, prof. Mazur zainicjował eksperymentalny podział III i IV roku (równocześnie obu) na sekcje. Eksperyment ten całkowicie się udał i w dwa lata później podział na sekcje po II roku obowiązywał już na innych polskich uniwersytetach.

Jeżeli chodzi o szkolenie studentów, to sytuacja jest obecnie bardzo dobra. Podział na sekcje, utworzenie sekcji teoretycznej i reforma programu połączona z dużą ilością wykładów monograficznych spowodowała, że (przynajmniej w Warszawie) absolwenci są lepiej przygotowani do pracy naukowej niż kiedykolwiek dotąd.

Obecnie na IV i V roku matematyki UW jest grupa wyróżniających się studentów, zajmująca się intensywnie analizą funkcjonalną. Ponadto mamy sporą grupę profesorów i docentów pracujących w analizie funkcjonalnej i mogących szkolić innych. Mamy więc dobre warunki do szkolenia. W następnych paragrafach spróbujemy dać odpowiedź na pytanie: w jakim kierunku szkolić i jak szkolić?

§ 4. Kierunki dominujące obecnie w rozwoju analizy funkcjonalnej na świecie. Analiza funkcjonalna wyrosła z klasycznej, a w ciągu pół wieku swego istnienia przeszła długą ewolucję. Odegrała ona i wciąż

odgrywa ważną rolę w rozwoju całej matematyki oraz fizyki teoretycznej, a jej najważniejsze działy były zawsze związane z badaniami konkretnych obiektów występujących w analizie, topologii, matematyce stosowanej i w fizyce teoretycznej.

Poniżej podamy 10 kierunków, które według nas dominują obecnie na świecie w rozwoju analizy funkcjonalnej. Przed wymienieniem ich chcielibyśmy się zastrzec, że nie wyczerpują one wszystkich wciąż jeszcze aktywnie się rozwijających teorii (takich, jak np. przestrzenie funkcji ciągłych, bazy i układy biortogonalne, przestrzenie modularne, teoria Choqueta).

1. Teoria spektralna, teoria operatorów nieograniczonych, półgrupy operatorów, algebry C^* (w szczególności algebry von Neumanna), zastosowania w fizyce teoretycznej.

2. Teoria reprezentacji grup topologicznych (w szczególności klasycznych grup Liego), przestrzenie jednorodne, funkcje automorficzne.

3. Algebry miarowe i analiza fourierowska na grupach i półgrupach abelowych lokalnie zwartych.

4. Algebry funkcyjne i przestrzenie funkcji analitycznych (przede wszystkim wielu zmiennych), snopy kiełków funkcji analitycznych.

5. Teoria dystrybucji, operatory splotowe, przestrzenie rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych, snopy kiełków funkcji różniczkowalnych.

6. Ideały w kategoriach przestrzeni Banacha, ogólna teoria perturbacji, przestrzenie nuklearne, wymiar aproksymatywny, twierdzenia interpolacyjne typu Riesza-Thorina.

7. Teoria indeksu dla operatorów eliptycznych oraz algebry operatorów pseudoróżniczkowych.

8. Analiza globalna i topologia nieskończenie wymiarowa. Kierunek ten obejmuje: klasyfikację topologiczną, homotopijną i dyfeomorficzną przestrzeni liniowo-topologicznych i rozmaitości modelowanych nad przestrzeniami Frécheta (w szczególności rozmaitości hilbertowskich), badanie funktorów z kategorii Leraya-Schaudera w kategorię grup (czyli konstrukcja rozmaitych grup topologii algebraicznej dla regularnych podzbiorów przestrzeni liniowo metrycznych), punkty stałe odwzorowań, nieskończenie wymiarowa teoria Morse'a (zbudowana przez Palais i Smale'a), teoria struktur analitycznych (Douady).

9. Aparat analizy funkcjonalnej w rachunku prawdopodobieństwa. Kierunek ten obejmuje: procesy Markowa i ich powiązania z teorią półgrup operatorów i abstrakcyjną teorią potencjału, teorię ergodyczną, teorię przewidywania, miary nieskończenie wymiarowe i ich uogólnienia, zastosowania w fizyce statystycznej.

10. Analiza wypukła, zastosowania w teorii programowania liniowego i w teorii sterowania, teoria aproksymacji i metody gradientowe w zagadnieniach numerycznych, geometria ciał wypukłych.

Przy wymienianiu tych kierunków kierowaliśmy się następującymi kryteriami:

1° wyjątkowe bogactwo związków z innymi działami matematyki,

2° różnorodność stosowanych metod,

3° dynamika rozwoju w ostatnich latach.

Dla przykładu chcielibyśmy spojrzeć z tego punktu widzenia na kierunek 7 — może najbardziej ekskluzywny z kierunków uprzednio wymienionych.

Co to jest indeks eliptycznego operatora różniczkowego? Bardzo nieprecyzyjnie mówiąc, postępuje się następująco: Eliptyczny operator różniczkowy traktujemy jako element pewnej algebry operatorów określonych na klasie dostatecznie porządnych funkcji na rozmaitości — tzw. algebry operatorów pseudoróżniczkowych, zawierającej w najprostszym przypadku operatory skończenie wymiarowe, operatory typu operatora Hilberta

$$\Phi f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{y-x}\,dx$$

(wartość główna całki) i operatory różniczkowe typu operatora Laplace'a. Na ogół nie jest to algebra przemienna, ale jej „nieprzemienność" jest „mała", tzn. po podzieleniu przez (banachowski) ideał operatorów zwartych otrzymujemy przemienną algebrę Banacha. Symbol operatora pseudoróżniczkowego, to wartość transformaty Gelfanda tej algebry ilorazowej na klasie wyznaczonej przez dany operator w algebrze ilorazowej, a więc odwzorowanie przestrzeni ideałów maksymalnych w płaszczyznę zespoloną. Stopień tego odwzorowania, to — z grubsza mówiąc — indeks operatora. Z drugiej strony indeks wyraża miarę pertubacji operatora identycznościowego przez dany operator różniczkowy.

W teorii indeksu imponująca jest zarówno wielorakość związków z innymi działami matematyki, jak i bogactwo stosowanych metod. Mamy tu twierdzenia interpolacyjne i głębokie metody „twardej" analizy w dowodzie rozmaitych własności operatorów pseudoróżniczkowych (Calderòn, Zygmunt, Hörmander, Cohn, Nirenberg), transformaty Gelfanda dla nowej klasy algebr Banacha, teorię perturbacji (Gohberg, Kato, M. G. Krein) i wreszcie zaawansowane subtelne metody topologii algebraicznej i różniczkowej, (Atiyah, Bott, Grothendieck, I. M. Singer). Sprawę dodatkowo komplikuje to, że zagadnienie indeksu operatora eliptycznego rozpatruje się dla operatorów określonych na wiązkach stycznych do rozmaitości.

Polska analiza funkcjonalna reprezentowana jest w każdym z wyżej wymienionych 10 kierunków (jakkolwiek nie w każdej z wymienionych tam teorii).

Po napisaniu powyższej listy dominujących kierunków porównaliśmy ją z projektowaną listą sekcji na Kongresie w Nicei([4]) Nie jesteśmy kompetentni, aby ocenić trafność tego podziału, ale wydaje się nam, że jest to najciekawszy podział, z jakim spotkaliśmy się w ostatnich latach i niewątpliwie wart jest on przemyślenia. Komitet ustalający tę listę miał nieco inne zadanie niż na poprzednich kongresach — w Nicei indywidualne komunikaty nie będą wygłaszane (wszyscy prelegenci będą zaproszeni). Z tego powodu lista sekcji w Nicei jest nie tyle aktualnym podziałem matematyki, co raczej podziałem kierunków, w których osiągane są obecnie najlepsze wyniki.

Zwróćmy uwagę na charakterystyczny przykład. Ogólna teoria kategorii była w czołówce rozwoju matematyki w latach 1945-1965; natomiast gdy najważniejsze problemy zostały już w niej rozwiązane i najlepsi matematycy przestali się nią zajmować, teoria kategorii stała się modna i zaczęto na jej temat pisać setki prac.

Na kongresie w Nicei analiza podzielona będzie na 12 działów: (D_1) przestrzenie liniowo-topologiczne, (D_2) algebry operatorów i reprezentacja grup lokalnie zwartych, (D_3) teoria spektralna, (D_4) algebry funkcyjne i analiza fourierowska, (D_5) teoria potencjału i procesy Markowa, (D_6) probabilistyka, teoria miary i całki, (D_7) funkcje analityczne jednej zmiennej, (D_8) funkcje i przestrzenie zespolone analityczne, (D_9) zbiory wyjątkowe w analizie, (D_{10}) analiza funkcjonalna liniowa i równania różniczkowe cząstkowe liniowe, (D_{11}) analiza funkcjonalna nieliniowa i równania różniczkowe cząstkowe nieliniowe, (D_{12}) systemy dynamiczne i równania różniczkowe zwyczajne.

Warto zwrócić uwagę na kilka aspektów tego podziału.

Po pierwsze, w przeciwieństwie do ostatniego kongresu, analiza funkcjonalna nie jest oddzielona od klasycznej, ale występuje (explicite lub implicite) w niemal każdym z wymienionych dwunastu działów. Można by rzec, że podział analizy jako całości indukuje odpowiedni podział analizy funkcjonalnej.

Po drugie, zgodnie z obserwowaną od lat tendencją, nastąpiła parcelacja rachunku prawdopodobieństwa i jego teoretyczną część złączono z analizą, a niektóre inne działy (teoria kontroli, teoria informacji) uzyskały autonomię w ramach „matematyki stosowanej".

§ 5. Dziedziny, które warto rozwijać. Przechodzimy teraz do najistotniejszego punktu artykułu. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, szkolenie młodego narybku ma decydujący wpływ na rozwój każdej dyscypliny. Tak jak na każdym pokoleniu matematycznym, ciąży na nas odpowiedzialność za właściwy wybór kierunku szkolenia, przy czym należy wybierać nie to, czym my sami się zajmujemy, ale to, co w miarę naszego rozeznania i możliwości jest najlepsze dla nadchodzącej generacji.

Nie sądzimy, aby było możliwe planowanie badań matematycznych. Można jednak świadomie wybrać pewne kierunki badań i sugerować je młodzieży jako punkt wyjścia do pracy naukowej. Jeżeli chodzi o matema-

([3]) Listę tę można znaleźć na str. 153-155; warto ją również porównać z analogiczną listą dla poprzedniego kongresu (Wiadom. Mat. 10 (1968), str. 240).

tyków średniego pokolenia, to trudno jest wymagać od nich porzucenia własnej tematyki badań i przestawienia się na inną. Można jednak i należy przekonywać ich do tego, aby odpowiednio kształtowali profil seminariów i wykładów monograficznych przez siebie prowadzonych, nawet jeżeli wymagałoby to dodatkowej pracy. Oczywiście IM PAN, instytuty matematyczne uniwersytetów i PTM mogą preferować pewne kierunki badań przez urządzanie odpowiednich konferencji krajowych i międzynarodowych, szkół letnich, przez zapraszanie większej ilości specjalistów zagranicznych z danego kierunku, a przy wysyłaniu stażystów za granicę — przez faworyzowanie ośrodków związanych z tymi kierunkami.

Jesteśmy krajem małym, w którym pracuje naukowo w danym roku od 100 do 150 matematyków i przy najbardziej optymistycznym obliczeniu z trudem doliczymy się 50 osób zajmujących się analizą funkcjonalną lub jej zastosowaniami. Jest więc fizycznym niepodobieństwem uprawiać wszystkie kierunki analizy funkcjonalnej równocześnie. Należy przy tym pamiętać, że nowoczesna matematyka rozwija się bardzo szybko i wymaga w coraz większym stopniu pracy kolektywnej, co jeszcze zmniejsza ilość potencjalnych kierunków.

Chcąc nie chcąc, musimy więc dokonać jakiegoś wyboru. Zarówno szkolenie we własnej specjalności (to najłatwiejsze), jak i zostawienie tego wyboru samej młodzieży grozi zbytnim rozproszeniem, niemożliwością pracy zespołowej i wejściem na boczne odnogi własnej drobnej problematyki.

Dlatego jesteśmy zwolennikami świadomego wyboru kierunków badań, na które należy „programować" młodzież i które należy w miarę własnych możliwości uprawiać samemu. Powinniśmy się przy tym kierować następującymi kryteriami:

1° Wybrana tematyka powinna być blisko związana z co najmniej jednym z dominujących kierunków analizy funkcjonalnej.

2° Wybrana tematyka powinna być związana z tym, w czym aktualnie jesteśmy silni, co w jakimś stopniu już umiemy, tak aby można było od razu przystąpić do pracy twórczej, a równocześnie douczać się.

3° Wskazane jest, abyśmy mieli możliwie bliskie kontakty naukowe z tymi ośrodkami na świecie, w których uprawia się tematykę podobną do wybranej przez nas; ważne jest bowiem, abyśmy byli informowani na bieżąco o tym, co się z tego zakresu robi na świecie.

Nie wydaje się natomiast słuszne duże „inwestowanie" w dziedziny, w których jesteśmy bardzo słabi i mamy dotkliwe luki. Wypełnianie bowiem tych luk jest możliwe jedynie kosztem długoletniego wysiłku wielu osób, a w tym czasie teoria ta może pójść znacznie naprzód tak, że nasz dystans od światowej czołówki może wcale nie zmniejszyć się. Ponadto może się zdarzyć, że w momencie, gdy opanujemy dostatecznie

taką dziedzinę, to nie będzie już ona tak ważna, jak poprzednio, lub że najciekawsze problemy będą wyczerpane. Tego rodzaju intensywne „inwestowanie" byłoby usprawiedliwione tylko w dziedzinach wyjątkowo ważnych dla innych.

Należy jednakże starać się, aby nie było w Polsce wielkich białych plam w znajomości matematyki, aby w każdej ważnej dziedzinie polska matematyka miała choć jednego specjalistę.

Obecnie omówimy cztery grupy tematów, które naszym zdaniem warto zalecić warszawskiemu środowisku analizy funkcjonalnej na najbliższe pięciolecie.

A. Topologia nieskończenie wymiarowa i niektóre działy analizy globalnej.

B. Niektóre zagadnienia analizy funkcjonalnej związane z rachunkiem prawdopodobieństwa.

C. Ideały w kategoriach przestrzeni Banacha, teoria perturbacji, przestrzenie nuklearne, wymiar aproksymatywny.

D. Analiza wypukła, geometria afiniczna ciał wypukłych, zastosowania i związki z programowaniem liniowym i teorią sterowania.

Każdą z tych dziedzin omówimy teraz szerzej z pozycji matematyki polskiej.

A. Topologia nieskończenie wymiarowa i niektóre działy analizy globalnej.

W tej intensywnie rozwijającej się dziś dziedzinie mamy silne tradycje oparte na dwóch różnych nurtach:

a) Klasyfikacja odwzorowań (nieliniowych) zwartych. Problematyka ta wywodzi się od Schaudera i jest kontynuowana przez grupę gdańską.

b) Topologiczna klasyfikacja przestrzeni liniowo metrycznych. Problematyka ta przez długi czas koncentrowała się wokół pytania Frécheta: „czy wszystkie nieskończenie wymiarowe ośrodkowe przestrzenie Banacha są homeomorficzne?" Pierwsze wyniki zostały uzyskane w 1929 r. przez Mazura, a później liczne wyniki częściowe. Dopiero w roku 1966 Kadec i Anderson pokazali, że wszystkie ośrodkowe, nieskończenie wymiarowe przestrzenie lokalnie wypukłe, metryzowalne i zupełne są homeomorficzne między sobą. Opierali się oni przy tym w istotny sposób na wynikach polskich.

W teorii rozmaitości hilbertowskich mamy na koncie matematyki polskiej jeden z bardziej zaskakujących wyników, pokazujący natychmiast istotne różnice między przypadkami skończenie wymiarowymi a nieskończenie wymiarowymi, a mianowicie: *przestrzeń Hilberta jest dyfeomorficzna ze swoją sferą jednostkową.*

Wynik ten posłużył niedawno do udowodnienia (Kuiper, Burghelea, Eels i Elsworthy) faktu, że każda ośrodkowa rozmaitość hilbertowska, do-

puszcza dostatecznie regularną funkcję Morse'a i jest dyfeomorficzna z podzbiorem otwartym przestrzeni Hilberta.

Przykład ten pozwala zrozumieć paradoksalny, zdawać by się mogło, fakt, że aby uprawiać nieskończenie wymiarową topologię można umieć znacznie mniej topologii różniczkowej i algebraicznej niż do uprawiania topologii klasycznej. Mimo to brak wiedzy topologicznej jest wciąż piętą achillesową tych matematyków, którzy przyszli do topologii nieskończenie wymiarowej z analizy funkcjonalnej.

Analiza globalna ma w Warszawie swoich przedstawicieli również wśród uczniów prof. Maurina, którzy uzyskali ciekawe rezultaty dotyczące związków pewnych rozmaitości nieskończenie wymiarowych z klasycznym rachunkiem wariacyjnym.

Jeżeli chodzi o kontakty zagraniczne w tej dziedzinie, to bez przesady można stwierdzić, że są one bardzo dobre, często przyjacielskie. Utrzymujemy ścisłą łączność mniej więcej z całą czołówką USA, Europy Zachodniej i ZSRR.

B. Aparat analizy funkcjonalnej w rachunku prawdopodobieństwa.

Mamy w Polsce dobre tradycje z ogólnej teorii miary i osiągnięcia probabilistyczne szkoły wrocławskiej. W Warszawie zaktywizowały się ostatnio dwie grupy: jedna zajmująca się teorią ergodyczną i układami dynamicznymi, a druga probabilistycznymi aspektami teorii potencjału. Ponadto ostatnio wzrosło w Warszawie zainteresowanie miarami nieskończenie wymiarowymi.

Jeżeli chodzi o kontakty międzynarodowe w tej dziedzinie, to naszym zdaniem są one jeszcze niedostateczne. Wydaje się jednak, że ilość i jakość młodych matematyków działających w tej problematyce napawa optymizmem.

Pewne interesujące rezultaty zostały już uzyskane w „półklasycznej" teorii potencjału i teorii miar nieskończenie wymiarowych. O tych ostatnich rezultatach będzie jeszcze mowa poniżej.

C. Ideały w kategoriach przestrzeni Banacha, teoria perturbacji, przestrzenie nuklearne, wymiar aproksymatywny.

W teorii przestrzeni nuklearnych jesteśmy silni i mamy pewien wkład, ale tematyka ta wydaje się już trochę przebrzmiała. Natomiast odczuwa się potrzebę rozwijania teorii obiektów o lokalnej strukturze nuklearnej, np. grup i rozmaitości nuklearnych. W tym kierunku warto skierować nasze wysiłki.

Jeżeli chodzi o wymiar aproksymatywny, to aktualnie w Polsce nie prowadzi się badań z tego zakresu. Teoria ta wciąż oczekuje na eleganckie monograficzne ujęcie, być może na funktorialne potraktowanie rozmaitego rodzaju „wymiarów". Ciekawe byłoby bliższe zbadanie związków wymiaru aproksymatywnego z miarami nieskończenie wymiarowymi i być

może z pewnymi aspektami topologii nieskończenie wymiarowej (badanie przekształceń jednostajnie ciągłych).

W Warszawie badano też algebraiczną stronę teorii perturbacji. Wydaje się, że w przyszłości należałoby zająć się również zagadnieniami analitycznymi teorii perturbacji. Problematyka ta jest blisko związana z teorią wyznaczników w przestrzeniach Banacha.

Przez *ideał liniowo-topologiczny* rozumiemy dowolną klasę J operatorów liniowych i ograniczonych działających z przestrzeni Banacha do przestrzeni Banacha, spełniającą następujące warunki:

1° Dla ustalonych przestrzeni Banacha X, Y zbiór $J(X,Y) = J \cap B(X,Y)$ jest podzbiorem liniowym zbioru $B(X,Y)$ wszystkich operatorów liniowych ograniczonych z X do Y.

2° Wszystkie operatory jednowymiarowe należą do J.

3° Jeżeli $A \in J$ oraz B, C są operatorami liniowymi ograniczonymi takimi, że złożenie BAC jest wykonalne, to $BAC \in J$.

4° Każde $J(X,Y)$ jest przestrzenią liniowo-topologiczną.

5° Włożenie $J(X,Y) \to B(X,Y)$ jest ciągłe względem topologii normy operatorowej $\| \ \|$ w $B(X,Y)$.

6° Dla ustalonych przestrzeni Banacha X_1, X_2, X_3, X_4 przyporządkowanie

$$B(X_1, X_2) \times J(X_2, X_3) \times B(X_3, X_4) \to J(X_1, X_4),$$

określone wzorem $(B, A, C) \to BAC$, jest ciągłe.

Ideał J nazywamy *banachowskim*, jeżeli w każdym $J(X,Y)$ jest zadana norma $a_J = a_{J(X,Y)}$ taka, że $J(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha oraz

2′ jeżeli A jest operatorem jednowymiarowym, to $a_J(A) = \|A\|$,

5′ $a_J(A) \geqslant \|A\|$ dla $A \in J(X,Y)$,

6′ $a_J(BAC) \leqslant a(A)\|B\| \, \|C\|$ gdy $A \in J$ i złożenie BAC istnieje.

Pojęcie ideału banachowskiego zostało wprowadzone w 1968 r. przez Pietscha (por. [6]), ale „dojrzewało" już od dawna. Większość ważnych klas operatorów liniowych badanych w analizie funkcjonalnej, to ideały banachowskie, bądź ideały liniowo-topologiczne. Wymienimy tu operatory skończenie wymiarowe, zwarte, nuklearne, ściśle singularne w sensie Kato, absolutnie sumujące itd. Ponadto naturalne klasy operatorów, którymi można perturbować identyczność tak, aby istniał system wyznacznikowy, tworzą też ideały liniowo-topologiczne.

Teoria ideałów liniowo-topologicznych, to nie tylko pewien język teorii operatorów liniowych. Badanie konkretnych ideałów prowadzi często do nietrywialnych nierówności i twierdzeń faktoryzacyjnych. Ideały takie dają czasami zupełnie nowe spojrzenie na rozmaite fakty matematyczne. Dla przykładu pozwolimy sobie podać następujące za-

stosowanie teorii ideałów liniowo-topologicznych do teorii miar w przestrzeniach Banacha. W 1967 roku L. Schwartz [8] wprowadził następującą definicję:

Operator $A: X \to Y$ nazywa się *radonizujący*, jeżeli przeprowadza każdą skalarnie skoncentrowaną premiarę na X w miarę Radona na Y. (*Premiara* na X jest to, mówiąc nieściśle, rodzina miar określonych na podprzestrzeniach skończenie wymiarowych przestrzeni X i spełniająca pewne naturalne warunki zgodności sformułowane za pomocą operatorów skończenie wymiarowych.) Każda miara Radona na X wyznacza (poprzez warunki zgodności) pewną premiarę na X; istnieją jednakże premiary nie odpowiadające żadnej mierze Radona (taką premiarą jest np. tzw. biały szum określony na skończenie wymiarowych podprzestrzeniach ośrodkowej przestrzeni Hilberta H za pomocą gęstości $e^{-\|x\|^2}$).

Ważne twierdzenie Minlosa–Sazonowa orzeka, że każdy operator Hilberta–Schmidta z H do H jest radonizujący. Dotychczasowe dowody tego twierdzenia były dość długie i trudne do opowiedzenia. Ostatnio pewien młody matematyk warszawski znalazł nowy dowód twierdzenia Minlosa–Sazonowa, którego idea jest następująca: Korzystamy z faktu, że każdy operator Hilberta–Schmidta A faktoryzuje się przez tożsamościowe włożenie $I_{1,2}: l_1 \to l_2$, tzn. pisze się w postaci $A = BI_{1,2}C$. Stwierdzamy, że klasa R operatorów radonizujących jest ideałem liniowo-topologicznym i w ten sposób sprowadzimy naszą inkluzję do pytania, czy $I_{1,2}$ jest operatorem radonizującym, a to okazuje się konsekwencją klasycznego twierdzenia Kołmogorowa o układzie Rademachera. Warto zwrócić uwagę na to, że w rozumowaniu tym, aby udowodnić fakt o przestrzeni Hilberta, wychodzi się poza tę przestrzeń.

W związku z problematyką wymienioną w punkcie C warto jeszcze dodać, że nasze kontakty w tej dziedzinie są bardzo dobre.

D. Analiza wypukła, geometria afiniczna ciał wypukłych i ich związki z programowaniem liniowym i teorią sterowania.

Dział ten jest ważny ze względu na jego zastosowania. Szczególnie warta uwagi jest geometria afiniczna ciał wypukłych. Jest to w pewnym sensie zbiór pojedynczych problemów i (często bardzo trudnych) twierdzeń. Jako typowy przykład wymienimy twierdzenie Dvoretzky'ego, że dla każdej bryły wypukłej o dostatecznie dużym wymiarze, mającej środek symetrii, istnieje przekrój „niemal sferyczny" płaszczyzną ustalonego wymiaru.

W teorii tej nieraz używa się bardzo skomplikowanych metod z topologii algebraicznej, teorii miar inwariantnych i teorii reprezentacji grup. Wiele takich twierdzeń zostało udowodnionych przed wojną w Polsce przez Aronszajna, Auerbacha, Mazura i Ulama. Wiedza z tego zakresu

w naszym środowisku jest wciąż duża. Warto by ją wykorzystać, połączyć stare tradycje z nowoczesnymi metodami „struktur lokalnych" i znaleźć dobre zastosowania.

Obecnie wymienimy pewne wykłady monograficzne, jakie naszym zdaniem powinny być uwzględnione w długofalowym planie szkolenia w środowisku warszawskim. Podzielimy je na kilka grup.

I. Monograficzne wykłady z analizy funkcjonalnej. Nie będziemy tu dokładniej wymieniać poszczególnych tematów, bowiem jest ich zbyt dużo. Część z nich powinna być dopasowana do bieżących planów badawczych i do kierunków omówionych powyżej, część zaś powinna przyczyniać się do zwiększenia znajomości różnych działów analizy funkcjonalnej.

II. Podniesienie ogólnej znajomości niektórych działów analizy, a w szczególności tzw. „twardej analizy".

1) Przekształcenia Fouriera w R^n i niektóre zagadnienia klasycznej analizy harmonicznej.

2) Funkcje analityczne wielu zmiennych i niektóre zagadnienia z teorii funkcji jednej zmiennej.

3) Teoria dystrybucji ze szczególnym uwzględnieniem zastosowań do równań różniczkowych.

4) Teoria potencjału i jej związek z procesami stochastycznymi.

5) Nowoczesny rachunek wariacyjny.

6) Elementy geometrii różniczkowej, w szczególności teoria form zewnętrznych.

7) Operatory pseudoróżniczkowe i twierdzenia interpolacyjne.

Pożądane jest, aby w nadchodzących kilku latach każdy z tych tematów był wyłożony 2-3 razy przez różnych wykładowców.

III. Podniesienie kultury topologicznej, w szczególności z zakresu topologii różniczkowej, teorii wiązek, teorii snopów i wybranych działów topologii algebraicznej. Chodzi tu znów o 2-3 niezależne wykłady z następujących dziedzin, że szczególnym uwzględnieniem ich związków z analizą funkcjonalną.

1) Teoria Morse'a z elementami nieliniowej analizy funkcjonalnej.

2) K-teoria wraz z jej niektórymi zastosowaniami.

3) Topologia grup klasycznych i przestrzeni jednorodnych.

4) Teoria kohomologii dla snopów z zastosowaniem do teorii funkcji analitycznych wielu zmiennych.

5) Teoria ciągów spektralnych i elementy ogólnej teorii kohomologii.

6) Teoria grup i algebr Liego.

IV. Wykłady z fizyki teoretycznej, w szczególności z mechaniki kwantowej. Chodzi tu o wykłady robione przez matematyków (lub fizyków bardzo dobrze znających matematykę), dla matematyków obznajomionych z analizą funkcjonalną.

V. Pojedyncze cykle wykładów na różne tematy, np.:

1) Metody teorii kategorii w analizie funkcjonalnej.

2) Metody analizy niestandardowej.

3) Analiza w ciałach p-adycznych.

Zdajemy sobie sprawę z tego, że nie sposób zrealizować całego tego programu, warto jednak, aby poszczególni przedstawiciele środowiska nie żałowali trudu przy opracowywaniu istotnie nowych wykładów monograficznych.

§ 6. Kształcenie młodzieży. Mówiliśmy, że jesteśmy zwolennikami kształcenia młodzieży w świadomie wybranych kierunkach. Obecnie omówimy organizacyjne aspekty tego kształcenia. Zaczniemy od pewnych uwag ogólnych, dotyczących zasadniczo dowolnej dyscypliny matematycznej i dowolnego ośrodka.

Przy rozwijaniu matematyki przede wszystkim trzeba stawiać na młodzież, która ma ogromne, potencjalne możliwości do pracy naukowej (wielokrotnie bardzo silnie podkreślali to I. M. Gelfand, L. Infeld i inni).

To właśnie młodzi matematycy polscy pół wieku temu w Warszawie i we Lwowie podjęli śmiały atak na matematykę, skoncentrowali się na trafnie wybranych dziedzinach i stworzyli polską szkołę matematyczną. Wzorem Janiszewskiego nie należy bać się szybkiego ataku na wybraną, awangardową dziedzinę, ani „mierzenia sił na zamiary".

Do zagadnienia kształcenia młodzieży powinno się podchodzić w sposób „mnogościowy". „Klasyczny" punkt widzenia można określić jako kształcenie pojedynczego asystenta przez przydzielonego mu opiekuna; „mnogościowy" punkt widzenia — to kształcenie pewnego zbioru matematyków przez pewien zbiór matematyków (zbiory te nie muszą być rozłączne). W kształceniu powinno brać udział całe środowisko matematyczne.

Wartość naukowa matematyka w sensie wartości jego publikacji jest czymś innym niż wartość tego matematyka dla jego środowiska (która m. in. zależy od jego komunikatywności, od uwag wtrącanych w czasie seminarium, od „konsultacji" udzielanych innym specjalistom, od zdolności do współpracy i wielu innych czynników). Należy się starać o to, aby nie tylko każdy matematyk osiągał wartościowe wyniki, lecz także by był możliwie wartościowy dla środowiska.

Dla całości środowiska ważne jest również, aby nie było „białych plam" w znajomości działów związanych z uprawianymi. Z tego powodu w najbliższych kilku latach powinniśmy starać się wykształcić specjalistów we wszystkich 10 wymienionych dziedzinach analizy funkcjonalnej.

Przez wykształconego specjalistę rozumiemy osobę, która orientuje się w aktualnych problemach danej dziedziny, potrafi prowadzić wykład monograficzny, recenzować pracę i kierować pracą doktorantów z tej dziedziny i w razie potrzeby udzielić „konsultacji" innym matematykom; natomiast mniej istotne jest to czy ta osoba sama ma dorobek w tej dziedzinie. Oczywiście dobry pracownik naukowy musi być nie tylko nosicielem wiedzy matematycznej, ale również jej twórcą. Jest bowiem bardzo trudno głębiej rozumieć matematykę i wdrażać innych do samodzielnych badań, jeżeli samemu nigdy się takich badań nie prowadziło.

Wychowanie dobrego matematyka jest rzeczą trudną, wymagającą wielu sprzyjających czynników i znacznie mniej jest dobrych matematy-

ków niż zdolnych studentów, którzy nie spełnili pokładanych w nich nadziei. Należy cenić każdy talent matematyczny i traktować go jako dobro społeczne, którego nie wolno zmarnować. Młodzież wyróżniająca się zapałem do pracy naukowej powinna być przez kierownictwo otaczana szczególną opieką.

Istnieją bardzo różne typy młodych matematyków. Niektórzy mają w sobie wiele pasji do pracy naukowej i wytrwałości; ci będą pracować w każdych warunkach, a ich rozwoju nie można wstrzymać, można go tylko opóźnić. Częściej jednak zdarzają się ludzie bardzo zdolni, lecz wymagający opieki psychicznej, odpowiednich bodźców: zachęty, pochwały lub nawet nagany.

Jeżeli młody matematyk uzyska jakiś wynik, powinien mieć możność mówić o nim na seminarium i opublikować go w porę. Redagowanie prac, choć bardzo pracochłonne, jest również ważnym czynnikiem kształcącym, a wczesny debiut jest czynnikiem pobudzającym do pracy (natomiast należy hamować asystentów, jeżeli zauważy się u nich skłonność do pisania większej liczby prac na mało wartościowe tematy).

Niewłaściwa i szkodliwa, choć psychologicznie zrozumiała, jest tendencja doktoryzowania asystentów w zależności od wysługi lat (niezależnie od ich pracy ze studentami i osiągniętych wyników naukowych). Najgorzej jest zaś wówczas, gdy asystent uwierzy, że powinien cierpliwie czekać na dzień, w którym wezwie go profesor i powie: „trzeba pomyśleć o pana doktoracie".

Wiadomo z historii, że społeczeństwa były prężne i dynamiczne, gdy ludzie mieli możliwość szybkiego awansu za swe rzeczywiste kwalifikacje i zasługi; podobnie ważne jest, aby (tak jak w ZSRR i w USA) młody, zdolny i zapalony do pracy naukowej matematyk mógł szybko (w 3 lata po studiach) zrobić doktorat i awansować. Daje mu to bodziec do dalszej pracy, ułatwienie w różnych formalnościach oraz — co nie jest drugorzędne — lepszą pensję. Przypomnijmy tu klasyczny dylemat asystentów: czy męczyć się wiele lat, aby zrobić doktorat, skoro można łatwiej zarobić pieniądze korepetycjami, tłumaczeniami książek, czy zajęciami nadliczbowymi na studiach zaocznych?

Oczywiście nie każdy asystent jest w stanie zrobić szybko doktorat. Wydaje się jednak, że zdolny asystent, mający wartościowe wyniki, powinien być szybko doktoryzowany, bez czekania na jeszcze lepsze wyniki, godne jego talentu czy jego promotora. Wówczas taki doktorat staje się jednym z etapów rozwoju naukowego. Natomiast doktorat wymęczony po wielu latach staje się na ogół zakończeniem i „ukoronowaniem" rozwoju naukowego. Trzeba pamiętać, że pierwsze lata asystentury są trudne materialnie i wymagają pewnych wyrzeczeń. Trudno długo utrzymać ten stan, przychodzą obowiązki rodzinne, konieczność posiadania mieszkania i chęć stabilizacji.

Sposób kształcenia asystentów i doktorantów zależy od ich zdolności. Przeciętnym można i należy narzucić temat pracy doktorskiej, jeśli sami nie potrafią go sobie znaleźć. Natomiast w wypadku wybitnie zdolnych osób należy ograniczyć się do nauczenia ich pewnych ważnych dziedzin matematyki i ważnych metod; temat powinien znaleźć sobie adept sam. Świeże, nie obciążone spojrzenie daje mu bowiem możliwość znalezienia istotnie nowych problemów czy istotnie nowych metod. Wiele wybitnych wyników w ostatnich latach osiągniętych zostało przez bardzo młodych ludzi, którzy po odpowiednim przeszkoleniu zapoznali się z zaledwie kilkoma bardzo ważnymi pracami; nieobciążenie ich umysłów encyklopedyczną wiedzą było w tym przypadku pożyteczne (podkreślamy, że dotyczy to tylko wyjątkowo zdolnych matematyków).

Bardzo ważne jednak jest nowoczesne spojrzenie na daną dziedzinę. Nie należy bać się bardzo abstrakcyjnych pojęć, gdy są ważne i trafne. Zdolna młodzież uczy się ich na ogół bardzo szybko, a teorie ogólnie uznane za bardzo abstrakcyjne i trudne dla jednej generacji są naturalne i łatwe dla następnej, jeśli tylko są umiejętnie podane i przyswojone w młodym wieku.

Pół wieku temu całka Lebesgue'a była pojęciem nowym i trudnym; dziś jest ona przedmiotem kursowego egzaminu na II roku. Jeszcze kilka lat temu teorię mnogości wykładało się na III roku. Dziś przeszła ona na I rok, a elementy jej weszły do szkoły średniej (i tam sprawiają trudności raczej nauczycielom niż uczniom). Teoria kategorii sprawia obecnie znacznie większe trudności średniemu pokoleniu matematyków niż studentom sekcji teoretycznej.

Na wtorkowym seminarium z analizy funkcjonalnej w Warszawie obserwujemy pewną paradoksalną sytuację: większość uczestników ma kłopoty z podstawowymi pojęciami geometrii różniczkowej (takimi jak np. wiązka styczna do rozmaitości); najmniej kłopotu mają z tym najmłodsi uczestnicy, ci bowiem przeszli już na studiach nowoczesny kurs geometrii różniczkowej.

Pomimo konieczności koncentracji na pewnych, wybranych dziedzinach uważamy, że należy dążyć do maksymalnej wiedzy w danym środowisku tak, aby każdy matematyk znał dostatecznie dużo „dobrej matematyki" i w miarę możności był specjalistą w jakiejś dziedzinie, i aby dla każdej dziedziny analizy funkcjonalnej był w Polsce specjalista z tego kierunku.

Upraszczając bardzo zagadnienie można stwierdzić, że szkolenie matematyczne składa się z następujących elementów: 1) zwiększanie wiedzy, 2) rozwijanie umiejętności samodzielnego stawiania pytań, 3) rozwijanie umiejętności rozwiązywania zagadnień. Wiadomo, że są matematycy o dużej wiedzy, którzy nic sami nie potrafią zrobić; są matematycy, którzy świetnie rozwiązują zadania, a nie potrafią sami sformułować żadnego pytania; są wreszcie matematycy wyspecjalizowani w wąskiej dziedzinie, robiący ładne i trudne twierdzenia, którzy prawie nic nie

umieją. W dużym stopniu zależy to od indywidualnych uzdolnień, ale prawidłowe szkolenie winno rozwijać te trzy umiejętności harmonijnie i w ścisłym powiązaniu jednych z drugimi.

Wydaje się nam, że w Polsce kładzie się nacisk na 2) i 3), ale za mało zwraca się uwagę na 1); wynikiem tego jest spora liczba publikowanych prac, a jednocześnie ogólne niedouczenie młodych polskich matematyków pracujących w analizie funkcjonalnej, które szczególnie rażąco wypada przy zestawieniu z matematykami moskiewskimi.

Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest za mała rola wykładów w szkoleniu asystentów. Podstawą szkolenia jest u nas seminarium. Jest to niewątpliwie świetna forma kształcenia, wyrabiająca samodzielność uczestników, ale ma też pewne wady, jeżeli chodzi o opanowanie jakiejś teorii. Seminarium jest sposobem mniej ekonomicznym i nie zastąpi dobrych, systematycznych wykładów.

Nie sprecyzowane są u nas (może słusznie) wymagania dotyczące bieżącej pracy naukowej asystenta, poza zrobieniem doktoratu, co dla wielu jest bodźcem zbyt odległym; jedynie na studiach doktoranckich są pewne rygory. Asystenci nie muszą uczęszczać na żadne wykłady ani zdawać żadnych egzaminów (z wyjątkiem, po kilku latach, doktorskiego). W USA natomiast każdy asystent (aż do doktoratu) obowiązany jest uczęszczać na jeden lub dwa wykłady tygodniowo i przerobić obowiązkowe zadania domowe. Na Uniwersytecie Moskiewskim niemal każdy pracownik jest wpierw aspirantem, a pracownikiem naukowo-dydaktycznym zostaje po uzyskaniu stopnia kandydata nauk; aspiranci w ZSRR, oprócz napisania pracy, muszą zdać szereg poważnych egzaminów. U nas niestety jedynie niewielka część matematyków przechodzi przez studia doktoranckie.

Tego rodzaju studia doktoranckie są najlepszą formą kształcenia zdolnych matematyków. Młody doktorant zostaje na 3 lata odciążony od pracy dydaktycznej. Dla niego jest to życiowa szansa szybkiego rozwoju. Natomiast dla środowiska ma to jeszcze inne znaczenie: doktorant powinien nie tylko napisać dobrą pracę doktorską, lecz również rozszerzyć wiedzę środowiska w jakimś kierunku. Dlatego należy wymagać, aby doktoranci uczęszczali na odpowiednie wykłady i aktywnie uczyli się w domu.

Jeżeli chodzi o środowisko warszawskie, to doskonałe wyrunki kształcenia doktorantów z analizy funkcjonalnej ma Instytut Matematyczny PAN; jest tam obecnie 8 samodzielnych pracowników nauki zajmujących się tą dziedziną. Jednakże, jak już wspomnieliśmy, w ciągu 5 lat 1963-1968 w Dziale Analizy Funkcjonalnej nie było w Warszawie ani jednego doktoranta. W 1968 r. przyjęcia na studia doktoranckie w IM PAN w Warszawie odbywały się pod koniec lata. Jest to termin spóźniony, bowiem najlepsi absolwenci zwykle w tym czasie już są zatrudnieni.

Typowanie na studia doktoranckie powinno odbywać się przed egzaminem magisterskim (przez komisję złożoną z przedstawicieli IM UW i IM PAN).

Pewną przeszkodą w najlepszym wykorzystaniu studiów doktoranckich jest niewłaściwe rozumienie roli stypendiów naukowych, które dostają najlepsi studenci III, IV i V roku. W roku 1968 mieli oni zamknięte drogi do aspirantury w PAN; argumentowano przy tym, że stypendium naukowe jest stypendium fundowanym przez uniwersytet, więc absolwent, który pobierał takie stypendium, obowiązany jest do pracy w uniwersytecie. (Polska Akademia Nauk nie ma w ogóle stypendiów fundowanych.) Nie postulujemy tutaj, aby najlepsi absolwenci koniecznie szli do IM PAN. Jednakże paradoksem jest, że Instytut Matematyczny PAN, mający najlepsze warunki szkolenia doktorantów, jest jednocześnie odcięty od najlepszych absolwentów.

Najlepszym rozwiązaniem byłyby wspólne studia doktoranckie, z równymi prawami dla obu instytucji. Wykłady organizowane byłyby wspólnie, a ich plan i obsada opracowywane byłyby przez kilkuosobową komisję złożoną z przedstawicieli IM UW i IM PAN; podobnie rekrutacja powinna być przeprowadzana w drodze konkursu przez (inną) wspólną komisję.

Bardzo ważne jest, aby każdego roku kilku najlepszych absolwentów szło na studia doktoranckie bezpośrednio po studiach. Z jednej strony jest to premia dla najlepszych i silny bodziec do intensywnej pracy na IV i V roku (zwłaszcza, że uposażenie doktoranta jest wyższe od uposażenia asystenta). Z drugiej strony, zważywszy na to, że studia doktoranckie trwają 3 lata, przyjęcie bardzo zdolnego absolwenta dopiero w rok po studiach oznacza, że z góry przewiduje się, że jego doktorat trwać będzie 4 lata zamiast co najwyżej 3, jak być powinno. Laureaci konkursów im. Marcinkiewicza powinni mieć pierwszeństwo przy przyjmowaniu na studia doktoranckie.

Chcemy wyraźnie podkreślić, że podstawowym warunkiem rozwoju młodej kadry w analizie funkcjonalnej w Warszawie jest ścisła współpraca IM UW i IM PAN. Pierwszy z nich ma bowiem wielu zdolnych asystentów, a drugi ma kadrę do ich kształcenia. Pewne kroki w tym kierunku zrobiono — kilku asystentów z IM UW zostało w 1967 i 1968 roku przydzielonych pracownikom IM PAN pod opiekę (między innymi czterech do Gdańska), co dało już konkretne wyniki w postaci napisanych lub zaawansowanych prac doktorskich. Jednakże, jak już powyżej napisaliśmy, do właściwego szkolenia potrzebny jest wysiłek całego środowiska, a nie pojedynczego opiekuna.

Postulujemy, aby w Warszawie każdego roku przedyskutować plan kształcenia młodej kadry na 3 następne lata. Plan ten powinien być co roku rewidowany i w żadnym wypadku nie może być sztywnym wymogiem.

Powinien obejmować wszystkie wykłady monograficzne i specjalne oraz seminaria w IM UW i IM PAN. Jest ich dużo; przy pewnych uzupełnieniach mogłyby doskonale być wykorzystane do kształcenia asystentów i doktorantów. Wszyscy wykładający z obu instytucji powinni być do dyspozycji tego szkolenia.

Tematy wykładów monograficznych i seminariów zostawiane są zazwyczaj do wyboru prowadzących, którzy rzadko uzgadniają tematy jedni z drugimi, a już nikt na ogół nie orientuje się, jakie będą wykłady za rok i dwa. Na skutek tego niektóre wykłady są nieświadomie dublowane, a za to niektóre inne bardzo ważne dziedziny nie są w ogóle całymi latami wykładane, bo akurat nikt się takim wykładem nie zainteresował (np. w Warszawie przez ostatnich kilka lat nie było żadnego wykładu poświęconego przekształceniom Fouriera). Niektóre wykłady specjalnie wymagają 2 lub 3 lat na wyłożenie materiału; po trzech latach można ten wykład zacząć od nowa dla następnych roczników studentów. Pewne wreszcie wykłady wymagają wykładów przygotowawczych z innych dziedzin i należy to zawczasu zaplanować. W związku z tym postulujemy, aby raz na rok (np. w czerwcu) zebrać jednocześnie wszystkich potencjalnych wykładowców z IM UW i IM PAN i omówić dokładny plan wykładów monograficznych na następny rok akademicki i wstępnie przedyskutować plan wykładów na następne dwa lata.

L. Infeld ogromny nacisk kładł na ciągłą rotację osób prowadzących wykłady i ćwiczenia w celu uniemożliwienia zasklepiania się w jednej specjalności i tworzenia monopoli dydaktycznych, przy czym cele dydaktyczne Instytut Fizyki Teoretycznej UW realizował jako całość. Wydaje się natomiast, że zasada ta była niedoceniana w Instytucie Matematycznym UW. Niewątpliwie szykowanie nowego wykładu wymaga dużego wkładu pracy, ale wydaje się, że warto zmieniać wykładowców (zwłaszcza na sekcji teoretycznej) nawet kosztem pewnego obniżenia poziomu wykładów. Ważne jest, aby każdego roku dokonywać innej selekcji materiału i przedstawiać go w innym ujęciu; chodzi o to, aby młodzi adepci mieli szerszy wachlarz zainteresowań, a środowisko większą wiedzę; najprostszym rozwiązaniem jest rotacja wykładowców.

Dorzucimy jeszcze kilka uwag o sprawach wymagających dokładniejszego przedyskutowania.

Warto opracować kilkuletni program kursów, konferencji i szkół letnich z analizy funkcjonalnej.

Warto również wstępnie przygotować długoterminowy plan zapraszania gości zagranicznych (obecnie każdego roku, gdy przyjdzie termin zgłaszania, podaje się — nieraz przypadkowo — kandydatury na następny rok). Warto wreszcie zastanowić się czy nie opłacałoby się prowadzić u nas długofalowego szkolenia cudzoziemców z analizy funkcjonalnej.

Niewykorzystane są w pełni możliwości stażów zagranicznych, zwłaszcza w krajach kapitalistycznych.

Ciągle niedostateczna jest współpraca z matematyką radziecką. Szczególnie cenne byłyby dla nas długoterminowe przyjazdy wybitniejszych matematyków radzieckich w celu prowadzenia systematycznych wykładów z dziedzin za słabo znanych w Polsce. Można też pomyśleć o tzw. aspiranturze zaocznej w ZSRR (mają taką Węgrzy; polega ona na tym, że jeżeli w danej specjalności nie ma odpowiedniego opiekuna dla młodego matematyka, to może on — pracując na swoim uniwersytecie — być pod opieką uczonego radzieckiego i jeździć do niego 2 razy w roku na dwutygodniowy pobyt.)

Artykuł nasz zakończymy powtórzeniem najważniejszych wniosków. Mamy dobrą kadrę reprezentującą niemal każdy kierunek analizy funkcjonalnej. Mamy wielu zdolnych studentów, dobrze kształconych na studiach. Aby wychować z nich dobrych matematyków i rozwinąć analizę funkcjonalną w Polsce, powinniśmy zmodyfikować sposób ich kształcenia. Postulowane zmiany nie wymagają żadnych istotniejszych zmian organizacyjnych, przekraczających możliwości zainteresowanych matematyków. Potrzebne jest tylko lepsze przemyślenie i koordynacja szkolenia, atmosfera pracy naukowej wśród młodzieży i lepsza współpraca uniwersytetu z IM PAN.

Jesteśmy przekonani, że dwutorowość rozwoju polskiej matematyki (szkoły wyższe — PAN) jest celowa i pożyteczna, bowiem uniwersytety mają inne zadania, a PAN inne. W szczególności IM PAN ma znacznie lepszą strukturę do wykonywania rozmaitych ważnych zadań organizacyjnych (np. konferencji) i połączenie tych placówek przyniosłoby szkodę polskiej matematyce. Natomiast znacznie ściślejsza współpraca tych instytucji jest konieczna i pożądana.

Prace cytowane

[1] J. Dieudonné, *Recent developments in mathematics*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), str. 239-248; rosyjskie tłumaczenie: Matiematika 10 (1966), zeszyt 3, str. 3-11.

[2] N. Dunford i J. T. Schwartz, *Linear operators*, I. New York 1958.

[3] I. M. Gelfand, *Об эллиптических уравнениях*, Uspiechi Mat. Nauk 15, nr 3 (1960), str. 121-132.

[4] M. G. Krein i L. A. Lusternik, *Функциональный анализ*, w tomie Математика в СССР за тридцать лет, Moskwa 1948, str. 608-697.

[5] R. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Annals of Math. Studies 57, Princeton 1965.

[6] A. Pietsch i H. Triebel, *Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren*, Studia Math. 31 (1968), str. 95-109.

[7] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Amsterdam 1966.
[8] L. Schwartz, *Extension du théorème de Sazonov-Minlos à des cas non hilbertiens*, C. R. Paris, 265, seria A (1967), str. 832-834.
[9] J. P. Serre, *Endomorphismes complètement continues des espaces de Banach p-adiques*, Publ. Math. I.H.E.S. 12 (1962), str. 69-85.
[10] H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Z. 5 (1919), str. 186-221.