ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

wmptm 1897

INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN BIBLIOTEKA

Z. K. CHARZYŃSKI (Warszawa)

O pewnych ciągach nieskończonych

(na marginesie zadania R. Krasnodębskiego)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Rozważmy funkcję rzeczywistą f określoną co najmniej w pewnym sąsiedztwie zera oraz monotoniczną w nim (może być również w prawostronnym otoczeniu rosnąca, w lewostronnym malejąca i odwrotnie), mającą granicę $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; ciąg liczb rzeczywistych $\{a_k\}$ zbieżny do pewnej liczby a; funkcję rzeczywistą $\lambda\colon R \to R$, spełniającą warunki

a. $\lambda(u) \underset{|u|\to\infty}{\to} +\infty$,

b. dla dowolnego x istnieje granica

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{\lambda(u)}{\lambda(xu^s)} = \psi(x), \qquad s > 0.$$

Załóżmy poza tym, że istnieją granice

$$(*) \qquad \lim_{|u|\to 0} \lambda\left(\frac{1}{u}\right) f(u) = g \neq 0$$

oraz

$$\lim_{x\to 1/a} \psi(x) = \psi \quad \text{bądź} \quad \lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = \psi$$

w zależności od tego czy $a \neq 0$, czy też $a = 0$.

Wykażemy, że wówczas ciąg

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{[\lambda(n)]} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right),$$

określony dla dostatecznie wielkich n, ma granicę $\sigma = g \cdot \psi$.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wobec założenia istnieje $\delta > 0$ takie, że dla x spełniających nierówność:

$$\left| x - \frac{1}{a} \right| < \delta \qquad (\text{bądź } |x| > \delta)$$

mamy

$$|g\psi(x) - g\psi| < \tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

Niech $\eta > 0$ oznacza liczbę, dla której zachodzą nierówności:

$$\left|\frac{1}{\alpha \pm \eta} - \frac{1}{\alpha}\right| < \delta \qquad (\text{bądź } \frac{1}{\eta} > \delta),$$

przy czym liczby $\alpha - \eta$ i $\alpha + \eta$ mają ten sam znak (gdy $\alpha \neq 0$). Według założenia jednak $a_k \to \alpha$. Zatem istnieje liczba $k_0 = k_0(\eta)$ taka, że dla wszystkich $k > k_0(\eta)$

$$\alpha - \eta < a_k < \alpha + \eta.$$

Stąd

$$\frac{\alpha - \eta}{n^s} < \frac{a_k}{n^s} < \frac{\alpha + \eta}{n^s} \qquad \text{dla} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Skorzystamy teraz z założenia o monotoniczności funkcji f. Dla ustalenia uwagi przypuścimy, że f jest rosnąca (niemalejąca). Wobec tego

$$f\left(\frac{\alpha - \eta}{n^s}\right) \leqslant f\left(\frac{a_k}{n^s}\right) \leqslant f\left(\frac{\alpha + \eta}{n^s}\right) \qquad \text{dla} \qquad k \geqslant k_0.$$

Sumując od k_0 do $[\lambda(n)]$ otrzymamy (dla dostatecznie dużych n)

$$(\lambda(n) - k_0 - 1) f\left(\frac{\alpha - \eta}{n^s}\right) \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{[\lambda(n)]} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right) \leqslant (\lambda(n) - k_0) f\left(\frac{\alpha + \eta}{n^s}\right).$$

Możemy oczywiście napisać

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{[\lambda(n)]} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{k_0} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right) + \sum_{k=k_0+1}^{[\lambda(n)]} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right).$$

W myśl założenia dla ustalonego k mamy

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right) = 0.$$

Wobec tego

$$\sum_{k=1}^{k_0} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right) \to 0, \qquad \text{gdy} \qquad n \to \infty,$$

istnieje więc N_1 takie, że dla wszystkich $n > N_1$

$$\left|\sum_{k=1}^{k_0} f\left(\frac{a_k}{n^s}\right)\right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Z drugiej strony

$$(\lambda(n)-k_0)f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right)=\lambda(n)f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right)-k_0f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right),$$

$$k_0f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right)\to 0 \quad \text{dla} \quad n\to\infty,$$

$$\lambda(n)f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right)=\frac{\lambda(n)}{\lambda\left(\frac{n^s}{\alpha\pm\eta}\right)}\lambda\left(\frac{n^s}{\alpha\pm\eta}\right)f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right)\to\psi\left(\frac{1}{\alpha\pm\eta}\right)g,$$

gdy $n\to\infty$. Istnieje więc N_2 takie, że dla wszystkich $n>N_2$

$$\left|(\lambda(n)-k_0)f\left(\frac{\alpha\pm\eta}{n^s}\right)-\psi\left(\frac{1}{\alpha\pm\eta}\right)g\right|<\frac{1}{4}\varepsilon,$$

stąd

$$(\lambda(n)-k_0-1)f\left(\frac{\alpha+\eta}{n}\right)<\frac{1}{4}\varepsilon+\psi\left(\frac{1}{\alpha+\eta}\right)g<\frac{1}{2}\varepsilon+g\psi-\frac{1}{2}\varepsilon+g\psi<$$

$$<-\frac{1}{4}\varepsilon+g\psi\left(\frac{1}{\alpha-\eta}\right)<(\lambda(n)-k_0)f\left(\frac{\alpha-\eta}{n}\right).$$

Przyjmując $N=\max(N_1,N_2)$ dla $n>N$ mamy jednocześnie

$$g\psi-\frac{1}{2}\varepsilon<\sum_{k=k_0+1}^{[\lambda(n)]}f\left(\frac{a_k}{n^s}\right)<g\psi+\frac{1}{2}\varepsilon,\qquad-\frac{1}{2}\varepsilon<\sum_{k=1}^{k_0}f\left(\frac{a_k}{n^s}\right)<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tym samym dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ znaleźliśmy taką liczbę N, że dla wszystkich $n>N$ zachodzi nierówność $g\psi-\varepsilon<\sigma_n<g\psi+\varepsilon$. Oznacza to, że rzeczywiście $\sigma_n\to g\psi$, gdy $n\to\infty$, co należało okazać.

R. Krasnodębski podał następujące zadanie (Wiadom. Mat. 10, str. 105, zadanie 151):

Znaleźć granicę ciągu liczb:

$$p_n=\prod_{k=1}^{n^2}\cos\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{n}\varphi.$$

Pokażemy, że $p_n\to 1$. Istotnie, oznaczając

$$\sigma_n=\ln p_n=\sum_{k=1}^{n^2}\ln\left(\cos\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{n}\varphi\right)$$

oraz

$$f(x) = \ln\cos x, \quad \lambda(u) = u^2, \quad \alpha_k = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)\varphi, \quad s = 1$$

stwierdzamy, że $\alpha_k \to 0$, gdy $k \to \infty$ i możemy stosować powyższe twierdzenie. Mamy

$$\psi(x) = \lim_{|u|\to\infty} \frac{\lambda(u)}{\lambda(xu)} = \lim_{|u|\to\infty} \frac{u^2}{x^2u^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$\psi = \lim_{|u|\to\infty} \psi(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$g = \lim_{u\to 0} \lambda\left(\frac{1}{u}\right) f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u^2} \ln\cos u = -\frac{1}{2},$$

skąd $\sigma = g\psi = 0$; tym samym $p_n \to e^{\sigma} = e^0 = 1$.

Zauważmy wreszcie, że w przypadku, gdy $\alpha \neq 0$ dla wykazania zbieżności ciągu $\{\sigma_n\}$ wystarcza założyć istnienie jednostronnej granicy (*); lewostronnej, gdy $\alpha < 0$ i prawostronnej, gdy $\alpha > 0$. Dowód pozostaje przy tym niemal bez zmian. Podobnie, dla rozważenia przypadku, gdy α_k rośnie nieograniczenie, przy czym $\frac{\alpha_{[\lambda(n)]}}{n^s} \to 0$, gdy $n \to \infty$ można pominąć założenie b, zaś w miejsce istnienia granic

$$\lim_{x\to 1/\alpha} \psi(x) \quad \text{bądź} \quad \lim_{|x|\to\infty} \psi(x)$$

założyć istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqslant\lambda(n)} \frac{1}{\lambda\left(\frac{n^s}{\alpha_k}\right)} = \psi,$$

aby analogicznie stwierdzić, że granicą ciągu $\{\sigma_n\}$ jest liczba $\sigma = g\cdot\psi$.

Powyższe uwagi pozwalają uzyskać kilka interesujących, być może, przejść granicznych, wśród których, jako przypadek szczególny, znajdziemy znów odpowiedź na pytanie R. Krasnodębskiego. Mamy bowiem

$$\prod_{k=1}^{n^2} \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\varphi \underset{n\to\infty}{\to} \exp\left(-\frac{1}{4}\right); \qquad \prod_{k=1}^{n^2} \cos\frac{\alpha_k}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\right), \quad \text{gdy } \alpha_k \underset{k\to\infty}{\to} \alpha;$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^{s-1}}{n^s}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \exp\left(\frac{1}{s}\right), \quad \text{gdy } s \neq -1; \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos^m\frac{k\varphi}{n\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\varphi^2};$$

$$m = 1, 2, \ldots,$$

i tym podobnie.