ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

wmptm 1897

S. WEKSLER (Łódź)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O pewnej charakteryzacji numeracji potęgowych

Powszechnie używane numeracje potęgowe liczb całkowitych nieujemnych polegają na jednoznacznym przedstawieniu liczb całkowitych jako sum kolejnych potęg (jednostek kolejnych rzędów) jakiejś ustalonej liczby większej od 1 (podstawy numeracji), pomnożonych przez współczynniki (cyfry) mniejsze od podstawy numeracji. Można wobec tego starać się scharakteryzować opisane numeracje za pomocą możliwie słabych warunków.

Numeracją kanoniczną będziemy nazywali każdą parę ciągów $(g_0, g_1, \ldots)$, $(c_0, \ldots, c_q)$ liczb całkowitych, spełniających następujące warunki:

(I) $0 < g_0 < g_1 < \ldots < g_n < g_{n+1} < \ldots$,

(II) $0 \leqslant c_0 < c_1 < \ldots < c_q < g_1$,

(III) dla każdej liczby całkowitej x istnieje dokładnie jeden skończony ciąg $(k_0, \ldots, k_m)$ wskaźników taki, że

$$x = c_{k_0} g_0 + \ldots + c_{k_m} g_m. \tag{1}$$

Liczby $g_0, g_1, \ldots$ będziemy nazywali *jednostkami kolejnych rzędów*, a liczby $c_0, \ldots, c_q$ — *cyframi*.

Numerację kanoniczną będziemy nazywali *potęgową*, gdy istnieje $g > 1$ takie, że $g_n = g^n$ dla $n = 0, 1, \ldots$, zaś $q = g - 1$ oraz $c_k = k$ dla $k = 0, \ldots, q$.

TWIERDZENIE. *Każda numeracja kanoniczna jest numeracją potęgową.*

Dowód. Zauważmy, że $g_0 = 1$. Istotnie, z warunku (III) wynika w szczególności, że liczbę 1 można przedstawić w postaci (1), co jest możliwe tylko wtedy, gdy $m = 0$, $c_{k_0} = 1$ oraz $g_0 = 1$. Zauważmy dalej, że

$$q = g - 1 \quad \text{oraz} \quad c_k = k \quad \text{dla} \quad k = 0, \ldots, q. \tag{2}$$

Istotnie, z warunku (III) wynika, że każdą liczbę x między 0 a $g_1 - 1$ można przedstawić w postaci (1), co jest możliwe tylko wtedy, gdy $m = 0$ oraz $c_{k_0} = x$, tzn. x jest cyfrą.

Zauważmy wreszcie, że $g_n = g^n$ dla $n = 0, 1, \ldots$, gdzie $g = g_1$. Istotnie, $g_0 = 1 = g_1^0$. Dalsze równości będą udowodnione przez indukcję. Przypuśćmy, że dla pewnego i

$$g_i = g^i \quad \text{dla} \quad i = 0, \ldots, l \tag{3}$$

oraz $g_{l+1} \neq g^{l+1}$. Rozważymy dwie możliwości:

(a) W przypadku, gdy $g_{l+1} < g^{l+1}$ liczbę g_{l+1} można przedstawić (jak wiadomo z teorii numeracji potęgowych) w postaci $d_0 g^0 + \ldots + d_N g^N$, gdzie $d_N \neq 0$ dla $0 \leqslant N \leqslant l$ i $0 \leqslant d_i \leqslant g-1$, czyli (zgodnie z (2) i (3)) w postaci $d_0 g_0 + \ldots + d_N g_N$, gdzie d_i $(i = 0, \ldots, N)$ są cyframi naszego rozwinięcia kanonicznego; zarazem tę samą liczbę można przedstawić w postaci $d'_0 g_0 + \ldots + d'_M g_M$, gdzie

$$M = l+1 \quad \text{i} \quad d'_i = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i = 0, \ldots, l, \\ 1 & \text{dla} \quad i = l+1. \end{cases}$$

Liczba g_{l+1} miałaby więc dwa różne przedstawienia wbrew warunkowi (III).

(b) W przypadku $g_{l+1} > g^{l+1}$ liczbę g^{l+1} można przedstawić zgodnie z warunkiem (III) w postaci $d_0 g_0 + \ldots + d_N g_N$, gdzie $d_N \neq 0$ i d_i $(i = 0, \ldots, N)$ są cyframi; zarazem nie może być $N \geqslant l+1$, bowiem wtedy byłoby

$$g^{l+1} = \sum_{i=0}^{N} d_i g_i \geqslant g_N \geqslant g_{l+1},$$

wbrew przyjętemu założeniu. Podobnie nie może być $N \leqslant l$, bowiem wtedy byłoby (na mocy (1), (2) i (3))

$$g^{l+1} = \sum_{i=0}^{N} d_i g_i = \sum_{i=0}^{N} d_i g^i < g^{N+1} \leqslant g^{l+1}.$$

Tak więc rozważany przypadek jest też wykluczony.

Wykazaliśmy, że $g_{l+1} = g^{l+1}$. Na mocy zasady indukcji twierdzenie nasze jest udowodnione.