ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

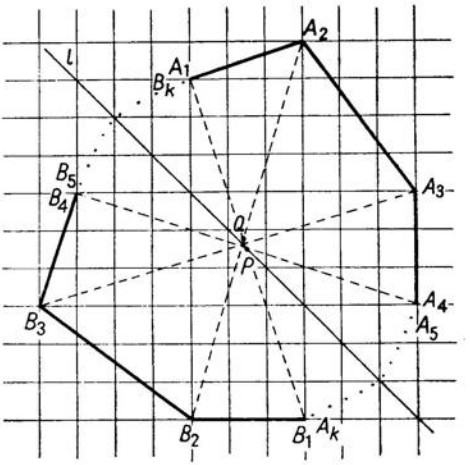
H. IWANIEC (Elbląg)

O pewnej własności wielokąta wypukłego i jego przekątnych

Na XVII Olimpiadzie Matematycznej, na zawodach stopnia trzeciego, podane zostało następujące zadanie:

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym każda z przekątnych AD, BE, CF, dzieli sześciokąt na dwie części o równych polach. Dowieść, że te przekątne przechodzą przez jeden punkt.

W związku z tym Andrzej Mąkowski postawił pytanie: W jakim stopniu można to twierdzenie uogólnić na dowolne wielokąty wypukłe o większej liczbie wierzchołków? Okazuje się, że bezpośrednie uogólnienie nie jest prawdziwe.



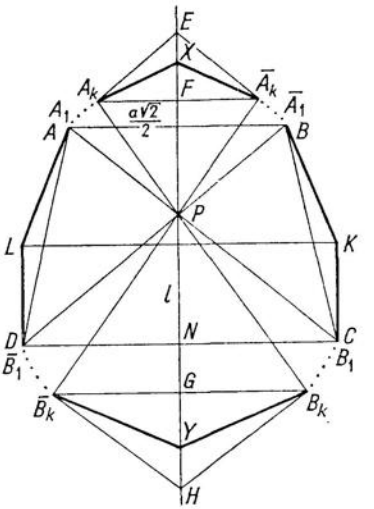
Rys. 1

Pole wielokąta $ABCDEF\ldots$ oznaczymy symbolem $(ABCDEF\ldots)$.

TWIERDZENIE 1. *Istnieje wielokąt wypukły W o $n = 2k \geqslant 8$ wierzchołkach, którego wszystkie przekątne łączące wierzchołki przeciwległe połowią jego pole, $k-2$ spośród nich przechodzi przez jeden punkt, ale nie istnieje punkt wspólny wszystkich tych przekątnych.*

Dowód. Wielokąt taki można skonstruować w sposób pokazany na rysunku 1.

Punkty A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 mają współrzędne całkowite. Wierzchołki $A_4, A_5, \ldots, A_k, B_1$ oraz $B_4, B_5, \ldots, B_k, A_1$ leżą na wspólnym okręgu o środku P i dzielą odpowiednie łuki tego okręgu na $k-3$ równych części. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że $\sphericalangle PB_4B_3$ jest prosty (bo $(1^2+3^2)+(3^2+9^2) = 10^2$); zatem wielokąt W jest wypukły. Widać, że prosta l jest osią symetrii wielokąta W (rys. 1).



Rys. 2

Punkt P jest środkiem symetrii wielokąta $A_4A_5 \ldots A_kB_1B_4B_5 \ldots B_kA_1$, więc przekątne $l_4, l_5, \ldots, l_k, l_1$ łączące odpowiednie wierzchołki A_i i B_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) wielokąta W połowią jego pole. Zauważmy, że

$$(B_2, B_3, \ldots, B_k, A_1, A_2) = (A_1, B_4, B_5, \ldots, B_k) + 69/2,$$

$$(A_2, A_3, \ldots, A_k, B_1, B_2) = (B_1, A_4, A_5, \ldots, A_k) + 69/2.$$

Wynika stąd, że przekątna l_2 połowi pole wielokąta W. Z symetrii względem l wynika, że l_3 też połowi jego pole. Ponadto przekątne $l_1, l_4, l_5, \ldots, l_k$ przecinają się w punkcie P, a l_2 i l_3 w punkcie Q, gdzie $P \neq Q$ (rys. 1).

Zauważmy, że założenie, iż wszystkie przekątne — prócz jednej — łączące wierzchołki przeciwległe wielokąta mają punkt wspólny, nie pociąga jeszcze istnienia punktu wspólnego tych przekątnych. Wynika to z następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2. *Istnieje wielokąt wypukły W o $n = 4k \geqslant 8$ wierzchołkach, którego wszystkie przekątne łączące wierzchołki przeciwległe połowią jego pole, oraz $2k-1$ spośród nich przechodzi przez jeden punkt, ale nie istnieje punkt wspólny wszystkich tych przekątnych.*

Dowód. Konstrukcję tego wielokąta przedstawia rysunek 2.

Załóżmy, że k jest liczbą naturalną ($k \geqslant 1$), a s liczbą rzeczywistą taką, że $0 < s < 1$, $ABCD$ — trapezem równoramiennym, P — punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$, oraz że $\sphericalangle ACD = \frac{1}{4}\pi$. Niech

$$\varrho(A,P) = a, \qquad \varrho(P,C) = r = \frac{2a}{\sqrt{3\cos(s/k)+1}} > a.$$

Gdy $s \to 0$, wówczas $r \to a$. Niech $A, A_1, \ldots, A_k$ leżą na łuku okręgu o środku p i dzielą ten łuk na k równych części i niech $\sphericalangle A_kPA = s$. Niech B_i leżą na prostej przechodzącej przez A_i i P oraz

$$\varrho(P,B_i) = \begin{cases} r & \text{dla} \quad i \equiv 0 \pmod 2, \\ a^2/r & \text{dla} \quad i \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,k).$$

Niech wreszcie $\bar{A}_i$ oraz $\bar{B}_i$ będą symetryczne względem l odpowiednio do punktów A_i oraz B_i, a $\sphericalangle EA_kP = \frac{1}{2}\pi = \sphericalangle HB_kP$, gdzie l jest osią symetrii trapezu $ABCD$ (rys. 2). Zauważmy, że

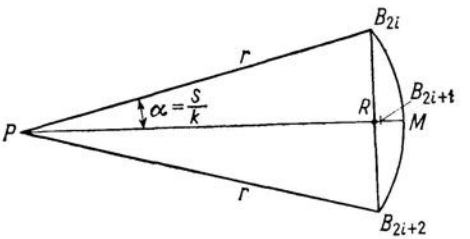
$$(AA_1 \ldots A_kE\bar{A}_k \ldots \bar{A}_1B) \to a^2/2, \quad \text{gdy} \quad s \to 0,$$

$$(CB_1 \ldots B_kH\bar{B}_k \ldots \bar{B}_1D) \to a^2/2, \quad \text{gdy} \quad s \to 0,$$

$$(ABC) \to (ADC), \quad \text{gdy} \quad s \to 0.$$

Istnieje więc s_0 takie, że dla $s < s_0$ istnieją punkty $X \in \overline{EF}$ i $Y \in \overline{GH}$ takie, że $\overline{AC}$ połowi pole wielokąta W_1 o wierzchołkach $A, A_1, \ldots, A_k, X, \bar{A}_k, \ldots, \bar{A}_1, B, C, B_1, \ldots, B_k, Y, \bar{B}_k, \ldots, \bar{B}_1, D$. Niech $CDLK$ będzie prostokątem o wysokości $\overline{KC}$ oraz

$$\varrho(KC) = \frac{\sqrt{2}\,(a+r)r}{3r+a} < \frac{r\sqrt{2}}{2} = \varrho(PN), \quad \text{bo} \quad r > a.$$



Rys. 3

Wykażemy, że wielokąt W o wierzchołkach $L, A, A_1, \ldots, A_k, X, \bar{A}_k, \ldots, \bar{A}_1, B, K, C, B_1, \ldots, B_k, Y, \bar{B}_k, \ldots, \bar{B}_1, D$ ma żądane własności. Ma on bowiem $4k+8$ wierzchołków ($k \geqslant 1$) i jest wielokątem wypukłym. Istotnie, (a) $\sphericalangle LAA_1 \to \frac{3}{4}\pi$ gdy $s \to 0$, więc $\sphericalangle LAA_1 < \pi$ dla $s < s_0$. (b) $\sphericalangle B_iB_{i+1}B_{i+2} < \pi$, gdyż punkt B_{2i+1} dzieli odcinek $\overline{RM}$ w stosunku $1:4$ (rys 3), bo

$$4\,\varrho(PB_{2i+1}) = 4\frac{a^2}{r} = 3r\cos(s/k) + r = 3\varrho(PR) + \varrho(PM).$$

(c) Pozostałe kąty wewnętrzne wielokąta W są mniejsze od π (wynika to z konstrukcji).

Każda przekątna wielokąta W łącząca wierzchołki przeciwległe połowi jego pole. (a) $\overline{AC}$ połowi pole W, gdyż $(ALD) = (BKC)$ oraz $\overline{AC}$ połowi pole W_1. (b) $\overline{A_iB_i}$ połowi pole W; wynika to z (a) oraz stąd, że

$$(B_iPB_{i+1}) = \frac{1}{2}\overline{B_iP}\,\overline{B_{i+1}P}\sin(s/k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{r}r\sin(s/k) = (A_iPA_{i+1}).$$

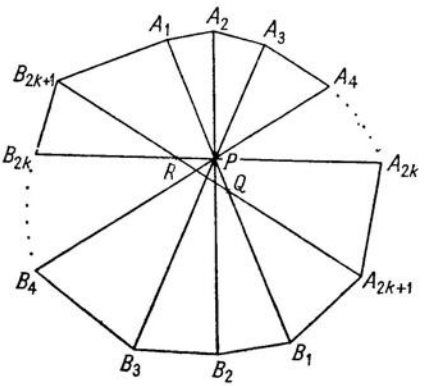
(c) $\overline{XY}$ połowi pole W (wynika to z symetrii). (d) $\overline{BD}$ połowi pole W (wynika to z symetrii i z (a)). (e) $\overline{\bar{A}_i\bar{B}_i}$ połowi pole W (wynika to z symetrii i z (b)). (f) $\overline{LK}$ połowi pole W, gdyż

$$(DCKB) = (DBC)+(BKC) = \frac{1}{2}\sqrt{2}r(a+r)\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+r)r\sqrt{2}}{3r+a}\cdot\frac{(r-a)\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{2}r\frac{\sqrt{2}(a+r)r}{3r+a} = \overline{DC}\,\overline{KC} = (DLKC).$$

Ponieważ $\overline{DB}$ połowi pole, więc $\overline{LK}$ też połowi pole. Ponadto wszystkie przekątne oprócz $\overline{LK}$ mają wspólny punkt P.

Dla $k = 0$ (czyli $n = 8$) wielokąt W konstruujemy analogicznie.



Rys. 4

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli wszystkie przekątne wielokąta wypukłego W o $n = 4k+2$ wierzchołkach łączące wierzchołki przeciwległe połowią jego pole oraz $2k$ spośród nich przechodzi przez jeden punkt, to wszystkie te przekątne mają punkt wspólny.*

Dowód. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_{2k+1}$ będą kolejnymi wierzchołkami wielokąta W przeciwległymi do odpowiednich wierzchołków $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_{2k+1}$. Załóżmy, że przekątne $l_1, l_2, \ldots, l_{2k}$ mają wspólny punkt P. Zatem $l_2, l_3, \ldots, l_{2k-1}$ leżą wewnątrz kąta $\sphericalangle A_1PA_{2k}$ i wewnątrz $\sphericalangle B_1PB_{2k}$, a prosta l_{2k+1} przecina ramiona jednego z nich, np. kąta $\sphericalangle B_1PB_{2k}$ (rys. 4).

Załóżmy jeszcze, że $Q \in l_1 \cap l_{2k+1}$ i $R \in l_{2k} \cap l_{2k+1}$. Ponieważ wielokąt W jest wypukły, więc $P \in W$ oraz odcinki $\overline{A_iB_i}$ zawierają się w W $(i = 1, 2, \ldots, 2k+1)$. Zatem $Q \in W$, $R \in W$, $Q \in \overline{A_{2k+1}B_{2k+1}}$ i $R \in \overline{A_{2k}B_{2k}}$. Oznaczmy

$$\varrho(A_i, P) = \bar{a}_i, \quad \varrho(B_i, P) = \bar{b}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k),$$

$$\varrho(A_{2k+1}, Q) = \bar{a}_{2k+1}, \quad \varrho(B^{2k+1}, R) = \bar{b}^{2k+1},$$

$$\varrho(P, Q) = \bar{r}, \quad \varrho(Q, R) = \bar{p}, \quad \varrho(P, R) = \bar{q}.$$

Niech S oznacza pole wielokąta W. Zatem

$$(A_iA_{i+1} \ldots A_{2k+1}B_1 \ldots B_i) = S/2 \quad (i = 1, \ldots, 2k-1),$$

oraz

$$(A_{i+1} \ldots A_{2k+1}B_1 \ldots B_iB_{i+1}) = S/2 \quad (i = 1, \ldots, 2k-1).$$

Stąd

$$(A_iA_{i+1}P) = (B_iB_{i+1}P).$$

Analogicznie można pokazać, że

$$(A_{2k}A_{2k+1}R) = (B_{2k}B_{2k+1}R) \quad \text{oraz} \quad (A_{2k+1}B_1Q) = (B_{2k+1}A_1Q).$$

Ze wzoru na pole trójkąta wynika zatem, że

$$\bar{a}_i\bar{a}_{i+1} = \bar{b}_i\bar{b}_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, 2k-1) \tag{1}$$

oraz

$$\bar{a}_{2k+1}(\bar{b}_1 - \bar{r}) = (\bar{a}_1 + \bar{r})(\bar{b}_{2k+1} + \bar{p}), \tag{2}$$

$$\bar{b}_{2k+1}(\bar{b}_{2k} - \bar{q}) = (\bar{a}_{2k} + \bar{q})(\bar{a}_{2k+1} + \bar{p}). \tag{3}$$

Mnożąc stronami równości (1), dla których i jest nieparzyste oraz dzieląc stronami przez równości (1), dla których i jest parzyste otrzymujemy:

$$\bar{a}_1\bar{a}_{2k} = \bar{b}_1\bar{b}_{2k}. \tag{4}$$

Mnożąc stronami równości (2), (3) i (4) dostajemy

$$(\bar{b}_1 - \bar{r})\bar{a}_1\bar{a}_{2k}\bar{a}_{2k+1}(\bar{b}_{2k} - \bar{q})\bar{b}_{2k+1} = \bar{b}_1(\bar{a}_1 + \bar{r})(\bar{a}_{2k} + \bar{q})(\bar{a}_{2k+1} + \bar{p})\bar{b}_{2k}(\bar{b}_{2k+1} + \bar{p}),$$

stąd $\bar{r} = \bar{p} = \bar{q} = 0$, czyli $P \in l_{2k+1}$.