ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

wmptm 1897

J. DODZIUK (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O funkcjach mierzalnych okresowych

Celem tej notki jest udowodnienie następującego twierdzenia Burstina–Łomnickiego:

Niech f będzie funkcją zespoloną na zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych, mierzalną w sensie Lebesgue'a i mającą dowolnie małe okresy. Wówczas istnieje liczba s taka, że $f(x) = s$ prawie wszędzie.

Twierdzenie to zostało udowodnione przez Burstina w [1], jednakże jego dowód był fałszywy. Zostało ono niezależnie odkryte i udowodnione przez Łomnickiego [3]. Inne dowody podane były w [2] i [4]. Wydaje się, że poniżej podany dowód jest prostszy od poprzednio znanych.

Okresem funkcji f określonej na $\boldsymbol{R}$ nazywamy każdą liczbę $a \in \boldsymbol{R}$ taką, że $f(x+a) = f(x)$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. Oczywiście zbiór A okresów dowolnej funkcji jest podgrupą grupy addytywnej $\boldsymbol{R}$. Nadto, jeżeli zero jest punktem skupienia elementów pewnej podgrupy grupy $\boldsymbol{R}$, to ta podgrupa jest gęstym podzbiorem zbioru $\boldsymbol{R}$.

Załóżmy najpierw, że $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ jest ograniczoną i mierzalną funkcją o wartościach zespolonych, która ma ciąg okresów zbieżny do zera, a więc ma gęsty zbiór okresów. Wiadomo, że wówczas f jest lokalnie całkowalna, tzn. całkowalna po każdym przedziale skończonym, i istnieje tzw. wartość średnia

$$s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt,$$

która równa jest średniej po dowolnym przedziale okresowości, tzn.

$$s = \frac{1}{a} \int_{x}^{x+a} f(t)\,dt \quad \text{dla} \quad x \in \boldsymbol{R},\ a \in A.$$

Rozważmy funkcję h określoną wzorem

$$h(x) = \int_{0}^{x} g(t)\,dt, \quad \text{gdzie} \quad g(t) = f(t) - s.$$

Każdy okres a funkcji f jest jednocześnie okresem funkcji h. Istotnie

$$h(x+a) = \int_0^x g(t)\,dt + \int_x^{x+a} (f(t)-s)\,dt = h(x).$$

Funkcja h jest ciągła i zbiór jej okresów jest gęsty, a więc h jest stała. Ponieważ $h(0) = 0$, więc $h \equiv 0$. Wynika stąd, że $\int_a^b g(t)\,dt = 0$ dla każdego przedziału (a, b), co oznacza, że $g = 0$ i $f(x) = s$ prawie wszędzie.

Aby udowodnić, że dowolna funkcja zespolona f mierzalna, z gęstym zbiorem okresów jest równoważna funkcji stałej, rozważmy ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji zdefiniowanych wzorami

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{jeżeli} \quad |f(t)| \leqslant n, \\ 0 & \text{jeżeli} \quad |f(t)| > n. \end{cases}$$

Funkcje tego ciągu są mierzalne, ograniczone i każdy okres funkcji f jest okresem funkcji f_n. Wynika stąd, że funkcje f_n są prawie wszędzie stałe dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ponieważ $f_n \to f$, więc f jest prawie wszędzie stała.

Prace cytowane

[1] C. Burstin, *Über eine speziele Klasse reeller periodischer Funktionen*, Monatshefte für Math. und Phys. 26 (1915), str. 229-262.

[2] R. P. Boas, *Functions which are odd about several points*, Nieuw Arch. Wisk. (3) 1 (1953), 27-32; addendum, ibidem 5 (1957), str. 25.

[3] A. Łomnicki, *O funkcjach mikrookresowych jednostajnych zmiennej rzeczywistej*, Sprawozdania Tow. Nauk. Warsz., seria III, 11 (1918), str. 808-846.

[4] Z. Semadeni, *Periods of measurable functions and the Stone-Čech compactification*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), str. 891-893.