ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

T. FIGIEL (Warszawa)

O równaniu funkcyjnym $f(x+y) = f(x)+f(y)$

M. Fréchet ([4], [5]) udowodnił następujące uogólnienie znanego twierdzenia Cauchy'ego:

Każde rozwiązanie mierzalne równania funkcyjnego

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

(x, y — rzeczywiste) ma postać $f(x) = f(1)x$.

Inne dowody tego twierdzenia podali H. Blumberg [3], W. Sierpiński ([8], [9]), S. Banach [2], M. Kac [6] oraz A. Alexiewicz i W. Orlicz [1]. Poniższy dowód korzysta jedynie z najprostszych własności miary Lebesgue'a na prostej.

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia

$$g_t(x) = tf(x) - xf(t),$$

$$A^u_{t,z} = \{x \in [0, |z|]: |g_t(x)| \leqslant u\},$$

gdzie t, z, u są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Z równości

$$g_t(x+t) = tf(x+t) - (x+t)f(t) = tf(x) - xf(t) = g_t(x),$$

$$g_t(2x) = tf(2x) - 2xf(t) = 2[tf(x) - xf(t)] = 2g_t(x)$$

zachodzących dla dowolnych rzeczywistych x, t wynika, że

$$|A^{2u}_{t,t}| = \tfrac{1}{2}|A^{2u}_{t,2t}| = |A^u_{t,t}|,$$

zatem

$$|A^{2u}_{t,t} \setminus A^u_{t,t}| = 0.$$

Mamy więc

$$|[0, |t|] \setminus A^0_{t,t}| = \Big|\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A^{2^n}_{t,t} \setminus A^{2^{n-1}}_{t,t}\Big| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A^{2^n}_{t,t} \setminus A^{2^{n-1}}_{t,t}| = 0,$$

czyli $g_t(x) = 0$ prawie wszędzie na $[0, |t|]$.

Jeżeli $t \neq 0$, to ponieważ t jest okresem funkcji g_t wynika stąd, że $g_t = 0$ prawie wszędzie. Ponieważ również $g_0 = 0$, więc dla każdego rzeczywistego t równość

$$0 = tg_1(x) - g_t(x) = tf(x) - txf(1) - tf(x) + xf(t) = [f(t) - tf(1)]x$$

zachodzi prawie wszędzie ze względu na x. Wynika z niej, że $f(t) = f(1)t$, co wobec dowolności t kończy dowód.

Powyższe twierdzenie zachodzi w niezmienionym sformułowaniu dla ciała $\boldsymbol{Q}_p$ liczb p-adycznych oraz ciała szeregów nad ciałem $\boldsymbol{Z}_p$ reszt modulo p. Przypomnimy określenie ciała $\boldsymbol{Q}_p$ (patrz [7], str. 151–156). Niech p będzie liczbą pierwszą. Każdą, różną od zera liczbę wymierną r można przedstawić w postaci $r = p^k ab^{-1}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, a a i b są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez p. Wykładnik k jest funkcją zmiennej r. Oznaczając go przez $v_p(r)$ możemy określić w ciele $\boldsymbol{Q}$ liczb wymiernych normę p-adyczną, przyjmując

$$\|0\| = 0 \quad \text{oraz} \quad \|r\| = p^{-v_p(r)} \quad \text{dla} \quad r \neq 0.$$

Rozszerzając w sposób ciągły działania algebraiczne z $\boldsymbol{Q}$ na uzupełnienie ciała $\boldsymbol{Q}$ w metryce $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ otrzymujemy ciało $\boldsymbol{Q}_p$ liczb p-adycznych. Każdy element tego ciała ma jednoznaczne przedstawienie w postaci szeregu $\sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n$, gdzie a_n są liczbami całkowitymi i $0 \leqslant a_n < p$. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny względem normy p-adycznej, która, jak łatwo sprawdzić, dana jest wzorem

$$(2) \qquad \|x\| = p^{-k}, \quad \text{jeżeli} \quad x = \sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n \quad \text{oraz} \quad a_k \neq 0.$$

Oznaczając $K(z, r) = \{x \in \boldsymbol{Q}_p : \|x - z\| < r\}$ mamy następującą, łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$(3) \qquad K(0, p\|z\|) = \bigcup_{n=0}^{p-1} K\left(\frac{n}{p} z, \|z\|\right),$$

w której składniki sumy po prawej stronie są parami rozłączne. Ciało $\boldsymbol{Q}_p$ jest lokalnie zwarte, zatem na jego grupie addytywnej istnieje miara Haara μ. Z regularności tej miary oraz równości (3) wynika, że dla dowolnego zbioru mierzalnego A

$$(4) \qquad \mu(pA) = \frac{1}{p}\mu(A).$$

Niech teraz $f: \boldsymbol{Q}_p \to \boldsymbol{Q}_p$ będzie mierzalnym rozwiązaniem równania (1). Oczywiście $f(0) = 0$. Niech $t \in \boldsymbol{Q}_p$, $t \neq 0$. Oznaczmy znów $g_t(x) = tf(x) - xf(t)$. Oczywiście

$$g_t(rx) = rg_t(x), \tag{5}$$

$$g_t(x+rt) = g_t(x), \quad r \in \boldsymbol{Q}, x \in \boldsymbol{Q}_p. \tag{6}$$

Niech $A_t^u = \{x \in \boldsymbol{Q}_p\colon \|g_t(x)\| < u\}$. Wówczas z (6) wynika, że

$$\mu\big(A_t^{pu} \cap K(0, \|t\|)\big) = \mu\left(A_t^{pu} \cap K\left(\frac{n}{p}t, \|t\|\right)\right).$$

Stąd i z (3)

$$\mu\big(A_t^{pu} \cap K(0, \|t\|)\big) = \frac{1}{p}\mu\big(A_t^{pu} \cap K(0, p\|t\|)\big).$$

Korzystając kolejno z (4), (5) i (2) otrzymujemy

$$\mu\big(A_t^u \cap K(0, \|t\|)\big) = \frac{1}{p}\mu\left(\frac{1}{p}A_t^u \cap \frac{1}{p}K(0, \|t\|)\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\mu\big(A_t^{pu} \cap K(0, p\|t\|)\big),$$

czyli ostatecznie

$$\mu\big(A_t^{pu} \cap K(0, \|t\|)\big) = \mu\big(A_t^u \cap K(0, \|t\|)\big).$$

Zatem

$$\mu\big(\{x \in K(0, \|t\|)\colon g_t(x) \neq 0\}\big) = \mu\Big(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(A_t^{p^n} \setminus A_t^{p^{n-1}}) \cap K(0, \|t\|)\Big) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu\big((A_t^{p^n} \setminus A_t^{p^{n-1}}) \cap K(0, \|t\|)\big) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\mu\big(A_t^{p^n} \cap K(0, \|t\|)\big) - \mu\big(A_t^{p^{n-1}} \setminus K(0, \|t\|)\big)\Big) = 0,$$

czyli $g_t = 0$ prawie wszędzie na $K(0, \|t\|)$. Z (6) wynika, że $g_t = 0$ prawie wszędzie. Stąd, jak w poprzednim dowodzie, wynika, że $f(t) = tf(1)$.

Dowód dla ciała szeregów nad $\boldsymbol{Z}_p$ jest prawie identyczny.

Będziemy mówić, że ciało topologiczne $\boldsymbol{K}$ ma własność (C), gdy każde mierzalne rozwiązanie $f\colon \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}$ równania funkcyjnego (1) jest ciągłe.

Oczywiście każde ciało dyskretne ma własność (C); nadto każde skończone rozszerzenie ciała mającego własność (C) ma własność (C). Skorzystamy teraz z następującego znanego twierdzenia ([7], str. 157–169):

Każde lokalnie zwarte niedyskretne ciało topologiczne jest skończonym rozszerzeniem jednego z następujących ciał: ciała liczb rzeczywistych, ciała liczb p-adycznych, lub ciała szeregów potęgowych nad ciałem $\boldsymbol{Z}_p$.

Wynika z niego

TWIERDZENIE. *Każde lokalnie zwarte ciało topologiczne ma własność* (C).

Prace cytowane

[1] A. Alexiewicz et W. Orlicz, *Remarque sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Fund. Math. 33 (1945), str. 314–315.

[2] S. Banach, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, ibidem 1 (1920), str. 123–124.

[3] H. Blumberg, *On convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), str. 40–44.

[4] M. Fréchet, *Pri la funkcia equacio* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, L'Énseignement math. 15 (1913), str. 390–393.

[5] — *A propos d'un article sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, ibidem 16 (1914), str. 136.

[6] M. Kac, *Une remarque sur les équations fonctionnelles*, Commentarii Math. Helvetici 9 (1936/37), str. 170–171.

[7] L. Pontriagin, *Grupy topologiczne*, Warszawa 1961.

[8] W. Sierpiński, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Fund. Math. 1 (1920), str. 116–122.

[9] — *Sur les fonctions convexes mesurables*, ibidem 1 (1920), str. 125–128.