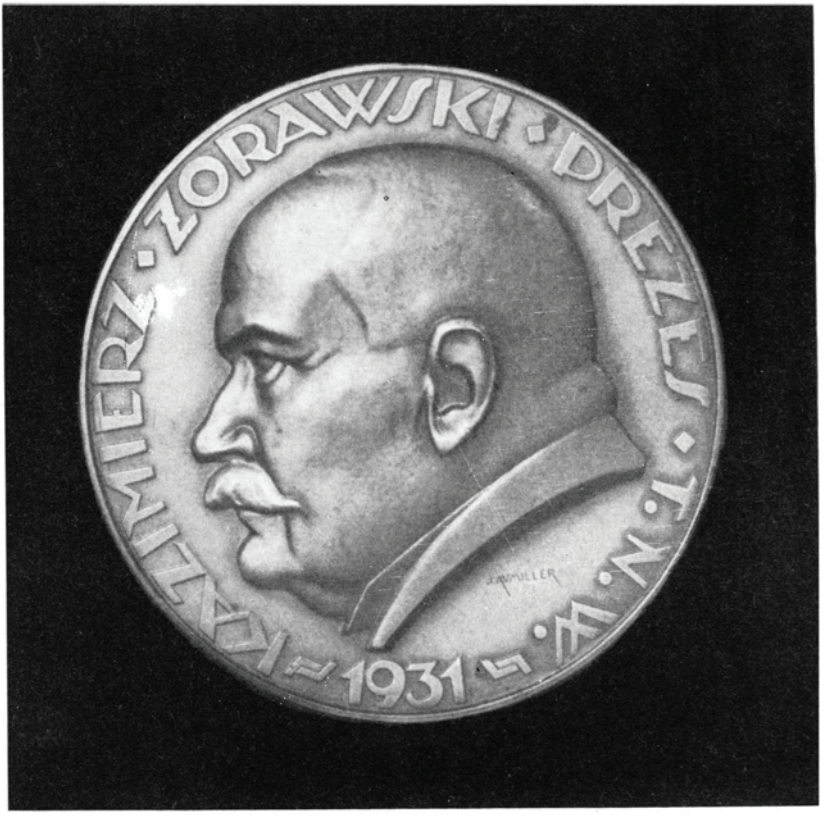
wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Fot. B. B. Łukomsk

Medal ku czci K. Żorawskiego
wybity w roku 1931

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

W. ŚLEBODZIŃSKI (Wrocław)

Kazimierz Żorawski

Kazimierz Żorawski urodził się 22 czerwca 1866 roku w Szczuczynie, wsi powiatu ciechanowskiego. Po ukończeniu gimnazjum studiował w latach 1884–1888 nauki matematyczne na rosyjskim wówczas Uniwersytecie Warszawskim, gdzie uzyskał stopień kandydata nauk matematycznych na podstawie rozprawy z zakresu astronomii, opartej na dokonanych przez siebie obserwacjach. Korzystając z przyznanego mu przez Uniwersytet Warszawski stypendium im. Kopernika, spędził następne trzy lata w Niemczech, studiując matematykę na uniwersytetach w Lipsku i Getyndze. Decydujący wpływ na rozwój i kierunek jego zainteresowań naukowych wywarł pobyt w Lipsku, gdzie wówczas wykładał znakomity matematyk norweski Sophus Lie, twórca teorii grup ciągłych. Z inicjatywy Liego powstała pierwsza praca naukowa Żorawskiego, która przyniosła mu stopień doktorski, nadany w roku 1891 przez Uniwersytet Lipski. Bezpośrednio niemal po uzyskaniu stopnia doktorskiego, w roku 1892, rozpoczyna się jego działalność nauczycielska, najpierw w charakterze habilitowanego docenta na Politechnice Lwowskiej, a w kilka lat później (1. V. 1895), w charakterze profesora nadzwyczajnego na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie. Mianowany w roku 1898 profesorem zwyczajnym, pozostaje na katedrze matematyki tego Uniwersytetu do roku 1919, po czym przenosi się do Warszawy, gdzie zajmuje kolejno stanowisko profesora Politechniki i Uniwersytetu aż do przejścia na emeryturę. Na wniosek Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Warszawskiego zostaje wówczas mianowany profesorem honorowym tegoż Uniwersytetu. Przejście na emeryturę nie przerywa jego pracy naukowej, którą uprawia niemal do chwili śmierci (23. I. 1953), pozostawiając liczne rozprawy w rękopisie.

Praca naukowa i nauczycielska nie wypełniają całej działalności Żorawskiego. Jako profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego pełni w roku 1905/1906 funkcje dziekana, a w roku 1917/1918 funkcje rektora, uczestniczy w organizowaniu Akademii Górniczej, przez kilkanaście lat zarządza z ramienia Senatu Akademickiego liczącą kilkaset lat fundacją, tzw. Bursą Akademicką, reorganizuje ją i przeprowadza budowę nowego dla

niej gmachu. Przez rok 1920/1921, w trudnym okresie organizowania szkolnictwa wyższego, zajmuje stanowisko dyrektora Departamentu Nauki i Szkół Wyższych w ówczesnym Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego.

Zasługi naukowe Żorawskiego były wysoko cenione przez współczesny mu polski świat naukowy, czego przejawem było powołanie go na członka wielu towarzystw naukowych. W roku 1900 został wybrany członkiem-korespondentem, a w roku 1916 członkiem czynnym Akademii Umiejętności. W 1910 r. został członkiem Królewskiego Czeskiego Towarzystwa Nauk w Pradze, w 1920 r. członkiem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, w 1923 r. członkiem czynnym Akademii Nauk Technicznych, wreszcie w kwietniu 1952 r. został powołany na członka tytularnego Polskiej Akademii Nauk.

Przed omówieniem najważniejszych prac Żorawskiego warto zauważyć, że równocześnie niemal z jego pracą doktorską ukazała się również bardzo cenna i ważna rozprawa doktorska Stanisława Zaremby (1889), który w roku 1900 objął drugą katedrę matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim. Można zdaje się powiedzieć, że z wystąpieniem tych dwóch uczonych matematyka polska przestała być wyłącznie konsumentem cudzych myśli i cudzych wyników i że rozpoczął się od tej chwili jej czynny i twórczy udział w rozwoju tej nauki. Ówczesne warunki polityczne sprawiły, że przez kilkanaście lat Stanisław Zaremba i Kazimierz Żorawski byli jedynymi reprezentantami matematyki polskiej wobec zagranicy. Przypomnienie tych faktów i porównanie ich ze stanem obecnym najlepiej uwidocznia olbrzymi postęp dokonany w ciągu sześćdziesięciu kilku lat, mimo katastrofy, której doznała matematyka polska w czasie inwazji hitlerowskiej.

Wspomnieliśmy już, że Żorawski był uczniem Liego, twórcy teorii ciągłych grup przekształceń. Zagadnieniem, z którego ta teoria wyrosła, było pytanie, jakie uproszczenia możemy uzyskać w procesie całkowania równań różniczkowych zwyczajnych, i o pochodnych cząstkowych, jeżeli występujące w nich zmienne będziemy poddawali różnym przekształceniom, i jak można sklasyfikować takie równania za pomocą różnych rodzajów przekształceń. Systematyczne i głębsze badanie takich zagadnień doprowadziło Liego do stworzenia teorii grup ciągłych jako odrębnej dyscypliny matematycznej, o własnych pojęciach i problemach. Gdy Żorawski przybył do Lipska, gdzie wówczas Lie był profesorem tamtejszego uniwersytetu, teoria grup ciągłych była świeżym, nowo odkrytym terenem badań, pociągającym swymi zagadnieniami wielu wybitnych matematyków. Prace tych uczonych poszły w dwóch głównie kierunkach: jedni, jak Engel, Killing, a przede wszystkim Cartan, zajmowali się tym, co dzisiaj nazywamy strukturą abstrakcyjnych grup Liego, a więc rzeczą niezależną od sprawy ich realizacji za pomocą takich lub innych prze-

kształceń; inni, jak Klein, Picard, Vessiot, Tresse i Żorawski, interesowali się przede wszystkim zastosowaniami teorii grup do geometrii i różnych działów analizy.

Dla Żorawskiego ulubionym terenem badań były zagadnienia równoważności dwóch tworów analitycznych lub geometrycznych względem pewnej grupy przekształceń, innymi słowy zagadnienia konstrukcji pełnego układu niezmienników różniczkowych takich obiektów. Drugą ważną dziedziną jego twórczej pracy była stworzona przez Poincarégo i Liego teoria niezmienników całkowych, w owym czasie również świeżo odkryty teren badań. W obu tych gałęziach matematyki uzyskał Żorawski ważne wyniki, które w dalszym ciągu dokładniej omówimy.

Nie licząc krótko żyjącego W. Gąsiorowskiego jestem zdaje się jedynym matematykiem, który przez dłuższy czas pozostawał z Żorawskim w bliższych stosunkach naukowych i miał przez to sposobność poznać nie tylko jego wysoką wartość naukową, ale także cechy jego charakteru i jego stanowisko w różnych sprawach życia uniwersyteckiego i społecznego.

Dominującą jego cechą była wielka skromność w ocenie wartości swych prac i awersja względem wszystkiego, co miało charakter autoreklamy. Cecha ta była często przesadna, bowiem za autoreklamę uważał pewien ogólnie przyjęty zwyczaj. Objawiało się to między innymi tym, że podając na wstępie swej rozprawy krótko jej treść, starał się jak gdyby ukryć lub zbagatelizować znaczenie uzyskanych w niej wyników. Z tego powodu niektóre z jego osiągnięć uszły uwadze zagranicznych uczonych i zostały przez nich powtórnie uzyskane i ogólnie za ich dorobek naukowy uznane. Często nadto zdarzało się, że drobniejsze przyczynki ogłaszał w języku niemieckim, a wartościowszą pracę w języku polskim; sąd swój w tych kwestiach zilustruje w dalszym ciągu przykładami. Niezbyt chętnie słuchał, gdy mu mówiłem np., że jedna z jego prac zawiera jako szczególny przypadek nowożytną teorię koneksji afinicznej; obawiał się widocznie, że jako jego uczeń, który mu wiele zawdzięcza, nie potrafię się zdobyć na należytą obiektywność i wyolbrzymiam wartość jego pracy.

Będąc surowym w ocenie własnych prac, był także wymagający w kwalifikowaniu przedstawionych mu prac młodszych matematyków; surowość ta była połączona ze sprawiedliwością i trafnością sądu. Z wielkim zadowoleniem mówił mi, że od razu przy okazji przewodu doktorskiego prof. W. Sierpińskiego poznał jego wielkość naukową i że ten jego sąd przyszłość w pełni potwierdziła.

Powyższa charakterystyka osobowości Żorawskiego byłaby niezupełna, gdybym nie dodał, że jego skromność była w razie potrzeby połączona ze stanowczością i niezależnością sądu. Będąc rektorem Uniwersytetu Jagiellońskiego w latach 1917/1918 w postępowaniu swym

starał się strzec wysokiej godności i powagi Uniwersytetu, ażeby nie było niczego, co by tę powagę mogło uszczuplić. Ubolewał przede mną, że w następnych latach nie zawsze o tym obowiązku pamiętano. Stanowczość wykazał także, gdy w okresie organizowania szkolnictwa wyższego pełnił obowiązki Dyrektora Departamentu Nauki i Szkół Wyższych za ministerstwa M. Rataja. Umiał się wtedy przeciwstawić stanowczo postulatem niektórych szkół sprzecznych z interesem społecznym.

I. Teoria form różniczkowych

Do tego działu matematyki należy pierwsza praca naszego uczonego, wspomniana już teza doktorska ogłoszona w języku polskim i niemieckim (1). Przedmiotem jej było następujące zagadnienie: dane są dwie powierzchnie przestrzeni euklidesowej; zbadać, czy można jedną z nich otrzymać z drugiej przez zginanie połączone ewentualnie z odbiciem symetrycznym. Ponieważ chodzi tutaj o zagadnienie o charakterze lokalnym, należałoby raczej mówić o dwu płatach powierzchni, dla uproszczenia będziemy jednak w dalszym ciągu używali terminu powierzchnia. Bardziej precyzyjnie można to zagadnienie sformułować następująco: czy można między punktami obu powierzchni ustalić odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną i różniczkowalną tak, ażeby metryka na obu powierzchniach była identyczna. Chodzi tu oczywiście o metrykę indukowaną przez metrykę otaczającej powierzchni euklidesowej. Metryka ta określona jest na obu powierzchniach odpowiednio formami różniczkowymi drugiego stopnia

$$(1) \qquad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad d\bar{s}^2 = \bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2.$$

Analitycznie zadanie sprowadza się więc do następującego: zbadać, czy istnieje i ewentualnie wyznaczyć przekształcenie postaci

$$(2) \qquad u = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \psi(\bar{u}, \bar{v})$$

przeprowadzające jedną z form (1) w drugą. Zagadnienie to formułujemy zwykle krócej: zbadać, czy formy (1) są równoważne względem ogólnej grupy przekształceń postaci (2). Sprowadza się ono do utworzenia pełnego układu niezmienników różniczkowych formy ds^2 względem grupy ogólnej. Nazwę niezmiennika różniczkowego rzędu p nadajemy każdemu wyrażeniu $\Phi(u, v, E, F, G, \partial E/\partial u, \ldots)$ utworzonemu ze zmiennych u, v, ze współczynników E, F, G oraz ich pochodnych aż do rzędu p, jeśli to wy-

(1) *O pewnym odkształceniu powierzchni*, Rozpr. Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Um. w Krakowie 23 (1891), str. 225–291. *Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lieschen Gruppentheorie*, Acta Mathem. 16 (1892), str. 1–67.

rażenie nie zmienia swej wartości przy przekształceniach grupy, innymi słowy, jeżeli zachodzi równość

$$\Phi(u, v, E, F, G, \partial E/\partial u, \ldots) = \Phi(\bar{u}, \bar{v}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \partial \bar{E}/\partial \bar{u}, \ldots),$$

w której $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \ldots$ oznaczają wielkości obliczone dla formy powstałej z ds^2 przez przekształcenie (2). Żorawski pokazał, jak należy wyznaczać te niezmienniki, określił liczbę niezależnych dla każdego rzędu oraz obliczył efektywnie kilka takich niezmienników najniższych rzędów. Nazwał je niezmiennikami Gaussa, ponieważ najniższy taki niezmiennik (rzędu 2) został znaleziony przez Gaussa (krzywizna Gaussa). W tej samej pracy znajdujemy rozważania dotyczące dwóch innych pokrewnych zagadnień. Załóżmy mianowicie, że do formy ds^2 zostały dołączone pewne funkcje $f_1, f_2, \ldots$ zmiennych u, v albo równanie postaci $v = f(u)$. Dla układu złożonego z formy i z funkcji, albo z formy i z równania, można sformułować zagadnienia analogiczne do poprzedniego. I te zagadnienia rozwiązał Żorawski — pokazał, jak należy obliczać niezmienniki każdego z tych dwóch układów (niezmienniki Beltramiego i Mindinga).

Omawianą tu rozprawę Żorawskiego można słusznie nazwać klasyczną ze względu na jej konstrukcję i metodę oraz doprowadzenie wszystkich rozważań i rachunków aż do zupełnego wyczerpania zagadnienia. Dlatego była ona zawsze wysoko ceniona przez znawców przedmiotu i do dzisiaj jeszcze jest cytowana. Twórca teorii grup ciągłych, S. Lie, omawiając w trzecim tomie swego głównego dzieła [2] prace różnych matematyków poświęcone grupom przekształceń, tak się o niej wyraża: „Spośród lipskich dysertacji wymienimy nadto piękną pracę Żorawskiego o niezmiennikach gięcia... Żorawski z wielką zręcznością wykonał trudne i skomplikowane obliczenia, potrzebne do rozwiązania zagadnienia. Ponieważ praca ta należy do działu niezmienników różniczkowych, przeto wspominam tu o niej krótko, zamierzając do niej powrócić w projektowanym dziele o niezmiennikach różniczkowych" [3]. Cytuje tę pracę także F. Klein w swym dziele o rozwoju matematyki w XIX wieku. Nazwisko Żorawskiego jest zresztą jedynym nazwiskiem polskiego matematyka wymienionym w książce Kleina.

Formom różniczkowym drugiego stopnia poświęcił Żorawski jeszcze trzy inne prace ogłoszone w Sprawozdaniach Saskiego Towarzystwa Naukowego [4]. W tezie doktorskiej posługiwał się operatorami różniczkowymi Liego, nazwanymi przez niego trasformacjami infinitezymalnymi;

---

[2] S. Lie, *Transformationsgruppen*, t. III, 1893, str. 810

[3] Dzieło to nie ukazało się z powodu choroby i śmierci Liego.

[4] *Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades*, Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, I 59 (1907), str. 160–186; II 60 (1908), str. 20–52. *Über Invarianten gewisser Formensysteme*, tamże 66 (1914), str. 103–117.

w pierwszej zaś z wymienionych prac pokazał, jak się rozwiązuje zagadnienie niezmienników gięcia posługując się skończonymi transformacjami. Przy sposobności wykazał także błędy w rozumowaniach niemieckiego matematyka Knoblaucha, który w jednej ze swych prac (5) zajmował się tym samym zagadnieniem. Dalsze dwie prace zostały poświęcone uogólnionym zagadnieniom, mianowicie niezmiennikom różniczkowym kwadratowej formy różniczkowej n zmiennych i niezmiennikom pary takich form.

II. Teoria niezmienników całkowych

Pojęcie niezmiennika całkowego wprowadził do matematyki H. Poincaré w jednej ze swych prac poświęconych mechanice nieba. Nieco odmienne pojęcie niezmiennika całkowego, oparte na pojęciu grupy ciągłej, pochodzi od Liego; należy nadmienić, że między obu pojęciami nie ma istotnej różnicy i że łatwo można jedno z nich sprowadzić do drugiego. Dzisiaj pojęcie to odgrywa, jak wiadomo, ważną rolę w teorii równań różniczkowych, w teorii grup ciągłych, w topologii i w integralnych zagadnieniach geometrii różniczkowej oraz w mechanice. E. Goursat w swym dziele o zagadnieniu Pfaffa i E. T. Whittaker w swym wykładzie dynamiki poświęcili temu pojęciu osobne rozdziały, a E. Cartan opublikował książkę o teorii niezmienników całkowych. Żorawski był jednym z pierwszych matematyków, którzy należycie ocenili znaczenie nowego pojęcia. Już w roku 1895 ogłosił obszerną pracę (6) zawierającą nowe i ważne twierdzenia o niezmiennikach skończonych i nieskończonych grup, używając tego pojęcia w sensie nadanym mu przez Liego. Udowodnił w niej między innymi podstawowe twierdzenie, że grupa przekształceń o jednym parametrze, określona układem równań

$$dx^h/dt = f^h(x^1, \ldots, x^n),$$

ma niezmienniki całkowe każdego stopnia oraz pokazał, w jaki sposób można te niezmienniki skonstruować. Twierdzenie to, udowodnione po raz pierwszy przez Żorawskiego, można znaleźć na przykład we wspomnianej już książce Goursata (7), w rozdziale poświęconym niezmiennikom całkowym. Nazwisko Żorawskiego nie jest jednak wymienione ani w tym miejscu, ani na innych stronach rozdziału. Stało się tak prawdo-

(5) J. Knoblauch, *Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung*, Journal für reine und angew. Mathematik, 131 (1906), str. 247–267.

(6) *O całkach niezmiennych ciągłych grup przekształceń*, Rozpr. Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Um. w Krakowie, 28 (1895), str. 232–273. *Über Integralinvarianten der continuierlichen Transformationsgruppen*, Bull. de l'Acad. de Cracovie, 1895, str. 127–130.

(7) E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris 1922 str. 212.

podobnie dlatego, że praca Żorawskiego została ogłoszona po polsku z bardzo krótkim tylko streszczeniem w języku niemieckim, nie można się więc dziwić, że rezultaty otrzymane przez naszego uczonego uszły uwadze Goursata.

W kilka lat później, w roku 1902, ukazała się druga praca Żorawskiego o niezmiennikach całkowych (8), zawierająca również nowe i ważne wyniki. Ażeby przedstawić główne jej twierdzenie, rozpatrzmy p-krotną całkę

$$\int_S \sum_{h_1,\ldots,h_p=1}^{n} A_{h_1\ldots h_p} dx^{h_1} \ldots dx^{h_p} \tag{3}$$

rozpostartą na pewną p-wymiarową rozciągłość S n-wymiarowej przestrzeni. Jeżeli punkty rozciągłości S poddamy ruchowi stacjonarnemu określonemu równaniami

$$dx^h/dt = \xi(x^1, \ldots, x^n), \tag{4}$$

to przejdzie ona w pewną rozciągłość S_t. Całka (3) jest niezmiennikiem układu (4), jeżeli wartość jej obliczona dla S_t jest dla każdego t równa wartości obliczonej dla S. Pierwszym zagadnieniem, które się teraz narzuca, jest pytanie, w jaki sposób można poznać, czy całka (3) jest niezmiennikiem przekształceń (4). Praca Żorawskiego przynosi odpowiedź na to pytanie w postaci kryteriów różniczkowych, które muszą spełniać współczynniki A. Ponieważ praca ta była ogłoszona wyłącznie po polsku, bez streszczenia w obcym języku, przeto treść jej pozostała nie znana ogółowi matematyków, a wzory Żorawskiego zostały ponownie odkryte przez E. Goursata w roku 1908, a więc w sześć lat później. Lie, cytując pracę Żorawskiego w jednej ze swych rozpraw o niezmiennikach całkowych, tak o niej mówi „Jest to niewątpliwie cenna praca o niezmiennikach całkowych. Niestety, mogłem odczytać jedynie wzory, bez tekstu tej polskiej rozprawy". Ponieważ także de la Vallée Poussin omawiając prace De Dondera zauważył, że praca Żorawskiego jest trudno dostępna ze względów językowych, przeto autor ogłosił w roku 1913 jej wyciąg w języku niemieckim (9). Ta spóźniona publikacja nie uratowała prawa do pierwszeństwa i w cytowanej książce Goursata wzory Żorawskiego podane są bez wymienienia ich autora.

Obok swego głównego wyniku omawiana rozprawa zawiera ponadto interesujące uogólnienia twierdzeń z kinematyki o liniach i natężeniach wirów; twierdzenia te zawarte są w innej pracy Żorawskiego, którą w dal-

---

(8) *O własnościach pewnej całki wielokrotnej będących uogólnieniem dwóch twierdzeń z teorii wirów*, Prace mat.-fiz. 12 (1902), str. 107–153.

(9) *Über Eigenschaften eines vielfachen Integrals, welche Verallgemeinerungen zweier Sätze der Wirbelbewegung sind*, Monatshefte für Math. u. Phys. 24 (1913), str. 277–299.

szym ciągu omówimy. Niektóre wyniki wspomnianej wyżej pracy z 1902 r. zostały w stopniu mniej ogólnym odkryte ponownie przez belgijskiego matematyka Th. De Dondera.

W 1909 r. ukazała się trzecia praca Żorawskiego o niezmiennikach całkowych ([10]). Zawiera ona różne uogólnienia wyników uzyskanych w poprzedniej pracy oraz zastosowania do teorii mnożnika zupełnych układów równań liniowych o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu.

III. Teoria ruchu ośrodka ciągłego i ciała sztywnego

Ta dziedzina matematyki była dla Żorawskiego głównym przedmiotem zainteresowań i twórczej pracy w latach 1900–1926. W okresie tym ukazało się kilkanaście jego rozpraw poświęconych różnym zagadnieniom kinematyki.

Przedmiotem pierwszej z nich ([11]) były własności linii wirowych ruchu doskonałej i nieściśliwej cieczy, danego za pomocą równań postaci

$$(5) \qquad dx/dt = u(x, y, z, t), \qquad dy/dt = v(x, y, z, t), \qquad dz/dt = w(x, y, z, t)$$

(używam tutaj i w dalszym ciągu oznaczeń innych niż autor, posługujący się symbolami transformacji infinitezymalnych, ponieważ własności tych symboli nie są ogólnie znane). Linie wirowe ruchu (5) określone są równaniami

$$dx/\xi = dy/\eta = dz/\zeta,$$

gdzie

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z), \qquad \eta = \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x), \qquad \zeta = \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y),$$

a natężenie wartością całki

$$\iint \xi\, dydz + \eta\, dzdx + \zeta\, dxdy.$$

Helmholtzowi zawdzięczamy dwa podstawowe twierdzenia o własnościach wirów; mówią one, że linie wirowe są złożone stale z tych samych cząstek materii i że natężenie linii wirowych jest stałe w czasie i w przestrzeni, jakikolwiek byłby ich ruch. Klasyczne te twierdzenia poddały Kelvinowi myśl pojmowania atomów jako wirów doskonałej cieczy.

Twierdzenia Helmholtza zostały przez niego udowodnione przy pewnych założeniach dynamicznych o siłach zewnętrznych działających na ciecz. Ponieważ zaś mają one charakter twierdzeń kinematycznych,

---

([10]) *Über gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale*, Bull. de l'Acad. de Cracovie 1909, str. 423–452.

([11]) *Über die Erhaltung der Wirbelbewegung*, Bull. de l'Acad. de Cracovie 1900, str. 335–342. *O zachowaniu ruchu wirowego*, Rozpr. Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Um. w Krakowie, 39 (1901), str. 236–250.

przeto naturalne wydaje się następujące pytanie: jakie własności musi mieć ruch (5), ażeby pierwsze lub drugie twierdzenie Helmholtza pozostawało prawdziwe, niezależnie od wszelkich założeń dynamicznych, i jak jest wzajemna zależność obu twierdzeń? Pytanie tak ogólnie sformułowane po raz pierwszy postawił Żorawski i dał na nie pełną odpowiedź. W ostatnich kilku latach twierdzenia Żorawskiego były przedmiotem artykułów dwóch amerykańskich matematyków ([12]), którzy między innymi podali nowe, uproszczone dowody. Twierdzenia swe o liniach wirowych uogólnił następnie Żorawski na przypadek n-wymiarowej przestrzeni w pracy z 1902 r. o niezmiennikach całkowych, omówionej tu w paragrafie II.

Przedmiotem trzech następnych prac ([13]) z zakresu kinematyki jest pewne zagadnienie równoważności dwóch ruchów cieczy w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Pomyślmy sobie mianowicie dwa takie ruchy dane odpowiednio za pomocą układu równań różniczkowych

$$dx^h/dt = u^h(x^1, \ldots, x^n, t) \qquad (h = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

oraz układu

$$d\bar{x}^h/dt = \bar{u}^h(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, t) \qquad (h = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

i zapytajmy, czy można jeden z nich przekształcić w drugi transformacją określoną wzorami

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} A^i_j(t)\bar{x}^j + A^i(t), \tag{8}$$

których współczynniki są funkcjami czasu t, spełniającymi warunki ortogonalności o wyznaczniku $|A^i_j(t)| = +1$. Równania (8) przedstawiają ciągły ruch ciała sztywnego w przestrzeni o współrzędnych x^i; zadanie będące przedmiotem pracy da się więc wypowiedzieć w następujący sposób: czy można dobrać taki ruch ciała sztywnego, żeby dla obserwatora z nim związanego ruch (7) był tym samym ruchem, którym jest (6) dla obserwatora nieruchomego. Zagadnienie to sprowadza się do następującego zagadnienia analitycznego: utworzyć pełny układ niezmienników różniczkowych układu (6) ze względu na nieskończoną grupę przekształceń (8) zależnych od $n(n+1)/2$ dowolnych funkcji zmiennej t. Autor skonstruował podstawowy układ niezmienników różniczkowych oraz

---

([12]) C. A. Truesdell and R. C. Prim, *Żorawski's Kinematic Theorems*, Naval Ordonance Laboratory Memorandum 1947, 9354. *A derivation of Żorawski's criterion for permanent lines*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), str. 32–34.

([13]) *Über stationäre Bewegungen kontinuierlicher Medien*, Bull. de l'Acad. de Cracovie 1911, str. 1–17. *Invariantentheoretische Untersuchungen gewisser Eigenschaften der Bewegungen kontinuierlicher Medien*, tamże 1911, str. 175–218. *Über gewisse Eigenschaften der Bewegungen kontinuierlicher Medien*, tamże 1912, str. 269–292.

operatory różniczkowe, za pomocą których można następnie obliczać niezmienniki wyższych rzędów. W ostatniej pracy wyprowadził nadto pewien układ zależności różniczkowych między niezmiennikami podstawowymi, charakteryzujących w zupełności ruch i nazwanych jego naturalnymi równaniami. Wynikło stąd twierdzenie: ażeby ruchy (6) i (7) były równoważne względem grupy (8), potrzeba i wystarcza, żeby miały identyczne równania naturalne. Nazwa „równanie naturalne" jest uzasadniona ścisłą analogią między tymi równaniami a równaniami naturalnymi krzywych i powierzchni przestrzeni euklidesowej. Jako zastosowanie ogólnej teorii zostało tu także rozwiązane następujące zagadnienie: jakie własności musi mieć ruch (6), ażeby dla obserwatora związanego z odpowiednio dobranym ciałem sztywnym ruch ten przedstawiał się jako stacjonarny, tj. ażeby funkcje u^h we wzorach (7) były niezależne od czasu.

Podstawą dla rozważań w tych trzech i w innych pracach z zakresu kinematyki była dylatacja elementu liniowego ds przestrzeni euklidesowej, tj. stosunek jego przyrostu spowodowanego ruchem (6) do pierwotnej długości. Dylatacja wyraża się wzorem

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, dx^i dx^j / ds^2,$$

gdzie

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial u^i/\partial x^j + \partial u^j/\partial x^i).$$

Z definicji dylatacji wynika wprost, że kwadratowa forma różniczkowa znajdująca się w liczniku jest związana niezmienniczo z ruchem ośrodka ciągłego. W ten sposób badanie takiego ruchu zostało związane z teorią kwadratowych form różniczkowych i ich rodzin. Prace dotyczące tej teorii, a omawiane w paragrafie I, były właśnie wywołane potrzebą stworzenia aparatu pomocniczego dla badania ruchu ośrodka ciągłego.

Inna praca z 1914 r. ([14]) zawiera rozwiązanie ogólniejszego zagadnienia. Autor zakłada mianowicie, że w przestrzeni Riemanna dana jest skończona deformacja lub ciągła, jednoparametrowa rodzina deformacji i rozwiązuje zagadnienie równoważności dwóch obiektów, z których każdy złożony jest z kwadratowej formy różniczkowej i z równań deformacji.

Z pozostałych prac Żorawskiego dotyczących ruchów i deformacji ciągłego ośrodka szczególnie ważna jest praca ([15]), w której rozwiązane zostało w całej ogólności następujące zagadnienie: niech

$$ds^2 = \sum_{h,i=1}^{n} a_{hi}(x)\, dx^h dx^i$$

([14]) *Über Invarianten der Deformationen und kontinuierlicher Bewegungen von Medien*, Bull. de l'Acad. de Cracovie 1914, str. 107–161.

([15]) *Über Deformationskomponenten*, Bull. d l'Acad. de Cracovie 1912, str. 721–754.

będzie liniowym elementem euklidesowej przestrzeni odniesionej do współrzędnych krzywoliniowych x^h; jeżeli przestrzeń poddamy deformacji określonej wzorem $\bar{x}^i = x^i + \varphi(x^1, \ldots, x^n)$, to dla zdeformowanego elementu $d\bar{s}$ będziemy mieli wzór

$$d\bar{s}^2 = \sum_{h,i=1}^{n} a_{hi}(\bar{x})\, d\bar{x}^h\, d\bar{x}^i = \sum_{h,i=1}^{n} [a_{hi}(x) + 2b_{hi}(x)]\, dx^h\, dx^i,$$

którego współczynniki b_{hi} noszą nazwę składowych deformacji. Załóżmy teraz, że dany jest pewien układ funkcji $b_{hi}(x)$ i zapytajmy, jakie warunki muszą one spełniać, ażeby istniała deformacja o składowych $b_{hi}(x)$ i jak tę deformację wyznaczyć.

Praca Żorawskiego daje odpowiedź na oba pytania, które w przypadku trójwymiarowej przestrzeni współrzędnych prostokątnych były przedmiotem wielu prac Beltramiego, Kirchhoffa, Barré de Saint Venanta i innych.

Pytania, na które odpowiedzi szukał Żorawski w swoich pracach z dziedziny kinematyki, należą do sfery zagadnień otwartej dla nauki przez Liego. Należy jednak wyraźnie zaznaczyć, że zarówno wybór zagadnień, jak i znalezienie odpowiedniej metody dla ich rozwiązania były własnym i oryginalnym wkładem Żorawskiego do nauki. Żorawski celował przy tym w zręcznym pokonywaniu długich i skomplikowanych rachunków, których wówczas nie można było uniknąć, ponieważ doskonalsze narzędzie matematyczne, jakim jest teoria form zewnętrznych Cartana, było w owym czasie dopiero w początkowym okresie swego rozwoju.

IV. Równania różniczkowe

Z prac Żorawskiego należących do dziedziny równań różniczkowych omówimy dwie najważniejsze ([16]). Przedmiotem pierwszej jest całkowanie pewnej szczególnej klasy zwyczajnych równań różniczkowych trzeciego rzędu. Przypuśćmy mianowicie, iż wiadomo nam o równaniu

$$d^3y/dx^3 = F(x, y, dy/dx, d^2y/dx^2), \tag{9}$$

że można je sprowadzić do postaci

$$d^3v/du^3 = 0 \tag{10}$$

([16]) *O całkowaniu pewnej kategorii równań różniczkowych zwyczajnych rzędu trzeciego*, Rozpr. Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Um. w Krakowie 34 (1898), str. 141–205. *Über Differentialinvarianten gewisser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gegenüber Punkttransformationen*, Bull. de l'Acad. de Cracovie 1915, str. 241–274.

za pomocą zmiany zmiennych określonej wzorami

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v) \tag{11}$$

i że znane nam są te wzory. Ponieważ całka ogólna równania (10) dana jest bezpośrednio, przeto tym samym znana staje się całka równania (9). Prosta ta uwaga prowadzi do następującego zagadnienia: znaleźć kryteria, które pozwalają poznać, czy równanie (9) da się przekształcić w równanie (10), oraz w przypadku, gdy zawarte w tych kryteriach warunki są spełnione, podać konstrukcję równań (11). Zagadnienie to Żorawski rozwiązał w zupełności, posługując się niezmiennikami różniczkowymi grupy przekształceń zachowujących równanie (10); znalazł mianowicie ogólny kształt równania, które można przekształcić w równanie (10), oraz podał metodę wyznaczania przekształcenia (11). Okazało się, że to ostatnie zadanie, a więc i całkowanie równania omawianej kategorii, sprowadza się do całkowania równania Riccatiego i kilku kwadratur. Należy nadmienić, że podobnym zagadnieniem w przypadku równania drugiego rzędu zajmowali się S. Lie i A. Tresse; przejście od rzędu drugiego do rzędu trzeciego nie jest tutaj tylko banalnym powtórzeniem rozumowań, a także i w rezultatach nie ma wielkiej analogii. Zauważyć też należy, że Żorawski stronę algorytmiczną zagadnienia posunął dalej niż wspomniani matematycy.

Przechodzimy teraz do omówienia dwóch dalszych nierównie ważniejszych prac [17]. Przedmiotem pierwszej było zagadnienie konstrukcji niezmienników różniczkowych układu równań

$$d^2x^i/dt^2 = f^i(t, x^1, \ldots, x^n, dx^1/dt, \ldots, dx^n/dt) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

względem ogólnej grupy przekształceń punktowych $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ oraz zastosowanie tych niezmienników od odpowiedniego zagadnienia równoważności; oba zagadnienia zostały przez Żorawskiego rozwiązane w ogólnym przypadku.

Praca Żorawskiego ma wiele wspólnego z pewnymi gałęziami geometrii różniczkowej, które powstały i rozwinęły się w kilka lat po ukazaniu się rozprawy Żorawskiego. Jest bowiem rzeczą widoczną, że (12) obejmuje jako szczególny przypadek układ równań geodezyjnych przestrzeni o koneksji afinicznej; ażeby ten przypadek otrzymać, należy założyć, że funkcje f^i w równaniach (12) są jednorodnymi wielomianami drugiego stopnia względem pochodnych dx^h/dt o współczynnikach niezależnych od t. Teoria Żorawskiego związana z równaniem (12) zawiera więc implicite teorię zwaną *Geometry of paths* (uprawianą przez szkołę

[17] *O jistnych differenciálnich invariantech obyčejnych differentialnich rovnic druhého porada*, Rozprawy Ceske Akademie, třida 2 (1915). *Über gewisse Differentialinvarianten der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Bull. de l'Acad. de Bôhème 20 (1915).

w Princeton), ujętą oczywiście czysto analitycznie, bez interpretacji geometrycznej. Nie jest także niespodzianką, że w rozumowaniach Żorawskiego występują wielkości oznaczone przez niego symbolami $A_{\lambda\mu\nu}$, a będące uogólnieniem współczynników przesunięcia równoległego w przestrzeni o koneksji afinicznej; znajdujemy tam także operator, który jest uogólnieniem pochodnej współzmienniczej, oraz wielkość analogiczną do tensora krzywizny. Można więc twierdzić, że praca Żorawskiego zawierała jako szczególny przypadek teorię przestrzeni o koneksji afinicznej stworzoną później przez J. A. Schoutena i H. Weyla; zdanie to należy rozumieć oczywiście w ten sposób, że zagadnienie zostało przez Żorawskiego ujęte wyłącznie ze stanowiska teorii niezmienników bez jakiejkolwiek interpretacji geometrycznej różnych wielkości i operatorów. Stwierdzony tutaj fakt nasuwał pytanie czy praca Żorawskiego nie może stać się podstawą dla geometrii o koneksji ogólniejszej niż afiniczna. Myśl ta została zrealizowana w rozprawach kilku matematyków ([18]), a wybitny geometra włoski E. Bortolotti zapowiedział dalsze uogólnienie oparte na równaniu o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Niestety, z powodu przedwczesnej śmierci tego uczonego zamiar ten nie został zrealizowany, powstały tylko trzy krótkie noty na ten temat.

V. Geometria różniczkowa

Żorawski ma w swym dorobku naukowym także kilka prac z dziedziny geometrii różniczkowej. Najważniejszą z nich jest niewątpliwie rozprawa ([19]) zawierająca pełny układ niezmienników różniczkowych powierzchni trójwymiarowej przestrzeni afinicznej. Geometria różniczkowa przestrzeni afinicznej została rozwinięta w drugim dziesiątku bieżącego stulecia w pracach kilku niemieckich geometrów (W. Blaschke, G. Pick, L. Berwald i inni). O stosunku rozprawy Żorawskiego do ich prac można powiedzieć to samo, co mówiliśmy w poprzednim paragrafie o stosunku rozprawy o układzie równań (12) do teorii różnych koneksji: jest ona mianowicie równoważnikiem, ze stanowiska teorii niezmienników, geometrycznej teorii powierzchni w przestrzeni afinicznej.

Omówienie działalności naukowej Żorawskiego nie byłoby zupełne, gdybyśmy nie wspomnieli o dwutomowym podręczniku geometrii analitycznej ([20]), napisanym w sposób oryginalny, a wyróżniającym się tym,

([18]) D. D. Kosambi, *Parallelism and path-spaces*, Math. Zeitschrift 33 (1933), str. 608–618. E. Cartan, *Observation sur le Mémoire précédent*, tamże str. 619–622. W. Ślebodziński, *Sur deux connexions généralisées*, Prace mat.-fiz. 43 (1936), str. 167–205.

([19]) *Über die Differentialinvarianten der Flächen in bezug auf die lineare Gruppe und über die Translationsflächen*, Bull. de l'Acad. de Cracovie 1906, str. 865–901.

([20]) *Wykład geometrii analitycznej*, t. I, Warszawa 1930, t. II, 1934.

że bardzo obszernie była w nim potraktowana dziedzina tworów urojonych, jak wektory, proste i koło urojone oraz ich interpretacja w dziedzinie rzeczywistej.

VI. Wpływ Żorawskiego na młodsze pokolenie matematyków

Przeglądając spis prac Żorawskiego zauważymy, że okres największej jego aktywności naukowej przypada na ostatnie lata XIX i początek XX stulecia. Na Uniwersytecie Jagiellońskim były wówczas dwie katedry matematyki: jedną z nich zajmował Żorawski, a drugą Stanisław Zaremba. (Pominąć można Cezarego Russyana, który po krótkim pobycie w Krakowie przeniósł się do Lwowa, a następnie do Rosji.)

Może się wydawać dziwne, że dwaj uczeni tak wysokiej klasy nie stworzyli w Krakowie szkoły matematycznej takiej, jakie po pierwszej wojnie światowej powstały we Lwowie i w Warszawie. Złożyło się na to kilka przyczyn. Jedną z nich był fakt, iż dziedziny twórczej pracy obu krakowskich uczonych zawierały zagadnienia o różnym charakterze i wymagały stosowania różnych metod badawczych. Ponadto obie dziedziny były już wówczas rozwiniętymi gałęziami nauki i dlatego rozpoczęcie twórczej pracy w jednej z nich wymagało, po zakończeniu normalnych studiów uniwersyteckich, dalszego kształcenia się w obranym kierunku; w ówczesnych warunkach było to dla absolwenta uniwersytetu rzeczą bez porównania trudniejszą niż obecnie lub nawet w okresie międzywojennym.

Studenci matematyki na obu polskich uniwersytetach pochodzili niemal wyłącznie z Galicji; była to młodzież niezamożna, otrzymująca tylko w nielicznych przypadkach pewną pomoc w postaci stypendiów z różnych prywatnych fundacji utworzonych nieraz jeszcze w czasach Polski przedrozbiorowej; znaczna część tych stypendiów była zastrzeżona dla osób pochodzenia szlacheckiego. Przy katedrach matematyki nie było posad asystentów, którzy pomagaliby profesorom w prowadzeniu ćwiczeń, a pozostając przez dłuższy czas pod ich wpływem zostaliby wprowadzeni głębiej w badania i w zagadnienia naukowe. Nie było także ani jednego docenta matematyki, a profesorowie obarczeni kursowymi wykładami i ćwiczeniami rzadko mogli wygłaszać monograficzne wykłady.

W ostatnich kilku latach przed pierwszą wojną światową nastąpiła pewna poprawa stosunków dzięki fundacji utworzonej przez bogatego matematyka Władysława Kretkowskiego, który był autorem kilkunastu prac ogłoszonych przeważnie w latach 1870–1880 w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" pod pseudonimem W. Trzaski. Fundacja była administrowana przez Krakowską Akademię Umiejętności, a przeznaczeniem jej było udzielanie pomocy w kształceniu młodych

matematyków. Z dochodów fundacji opłacano asystenta przy katedrach matematyki oraz udzielano corocznie po dwa stypendia na dalsze kształcenie się w zagranicznych uniwersytetach. Wówczas także Uniwersytet Jagielloński pozyskał dwóch pierwszych docentów matematyki w osobach Antoniego Hoborskiego i Alfreda Rosenblatta, a wśród studiujących znalazł się po strajku szkolnym liczny zastęp młodzieży z Kongresówki, co również wywarło dodatni wpływ.

W tych latach Żorawski miał pierwszego ucznia, który od początku swych studiów wszedł w krąg jego zainteresowań naukowych. Był nim młody i wybitnie utalentowany matematyk Władysław Gąsiorowski. Skierowany przez Żorawskiego jako stypendysta Fundacji Kretkowskiego na uniwersytet w Giessen, kontynuował tam swe studia w teorii grup ciągłych pod kierunkiem F. Engla, który podobnie jak Żorawski był jednym z wybitnych uczniów Liego ([21]). Niestety przedwczesna śmierć nie pozwoliła temu utalentowanemu matematykowi rozwinąć w pełni swych zdolności.

Swymi wykładami i pracami oraz kontaktem osobistym Żorawski wywarł wpływ także na kilku innych matematyków, budząc ich zainteresowanie dziedziną geometrii różniczkowej i teorii grup ciągłych. Wymienić tu należy Antoniego Hoborskiego, profesora Akademii Górniczej i profesora tytularnego UJ, który po opuszczeniu Krakowa przez Żorawskiego wygłaszał na UJ wykłady z geometrii różniczkowej i z teorii grup Liego, publikując piękne podręczniki i skrypty z tych dziedzin matematyki. Hoborski z kolei potrafił wzbudzić zainteresowanie geometrią w dwóch swoich uczniach: Stanisławie Gołąbie, autorze licznych i cennych prac zawierających nowe i ważne wyniki z zakresu geometrii różniczkowej i Włodzimierzu Wronie, pracującym również w tejże dziedzinie. Wpływowi Żorawskiego przypisać również należy powstanie pracy doktorskiej Franciszka Leji, zawierającej rozwiązanie pewnego interesującego zagadnienia z teorii grup przekształceń ([22]). Wkrótce po ukazaniu się tej rozprawy domeną badań naukowych Leji stała się inna gałąź matematyki, jednak jego zainteresowanie teorią grup przyniosło w kilka lat później drugą, nierównie ważniejszą rozprawę ([23]), którą uznać należy jako pio-

([21]) W Giessen uzyskał Gąsiorowski stopień doktora. Jego teza pt. *Über Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene* została przedrukowana w Monatshefte für Math. u. Phys. 26 (1914), str. 135–202.

([22]) *Właściwości niezmiennicze równania różniczkowego zwyczajnego trzeciego rzędu ze względu na przekształcenia styczności owe*, Prace Mat.-Fiz. 29 (1918), str. 179- 256. *Bestimmung der Invarianten der gewöhnlichen. Differentialgleichung dritter Ordnung in Bezug auf die Berührungstransformationen*, Monatshefte für Math. u. Phys. 29 (1918), str. 203–254.

([23]) *Sur la notion de groupe abstrait topologique*, Fund. Math. 9 (1927), str. 37–44.

nierską pracę w teorii grup topologicznych rozwijającej się od połowy trzeciego dziesiątka lat bieżącego stulecia.

Prace Żorawskiego i osobisty kontakt wywarły także decydujący wpływ na działalność naukową piszącego te słowa; wyrazem tego wpływu jest cytowana wyżej rozprawa oraz dwa inne artykuły. Jemu także zawdzięcza autor tego artykułu zwrócenie uwagi na bezwzględny rachunek różniczkowy stworzony przez G. Ricciego i to w latach, gdy nie przewidywano jeszcze, jak wielką odegra on rolę w teorii względności i we współczesnej geometrii różniczkowej.

Wymieniona poprzednio praca Żorawskiego o własnościach pewnej całki wielokrotnej (odsyłacz 8) była dla autora życiorysu punktem wyjścia dla skonstruowania pojęcia nazwanego przez Van Dantziga pochodną Liego, a odgrywającą ważną rolę we współczesnej geometrii różniczkowej.