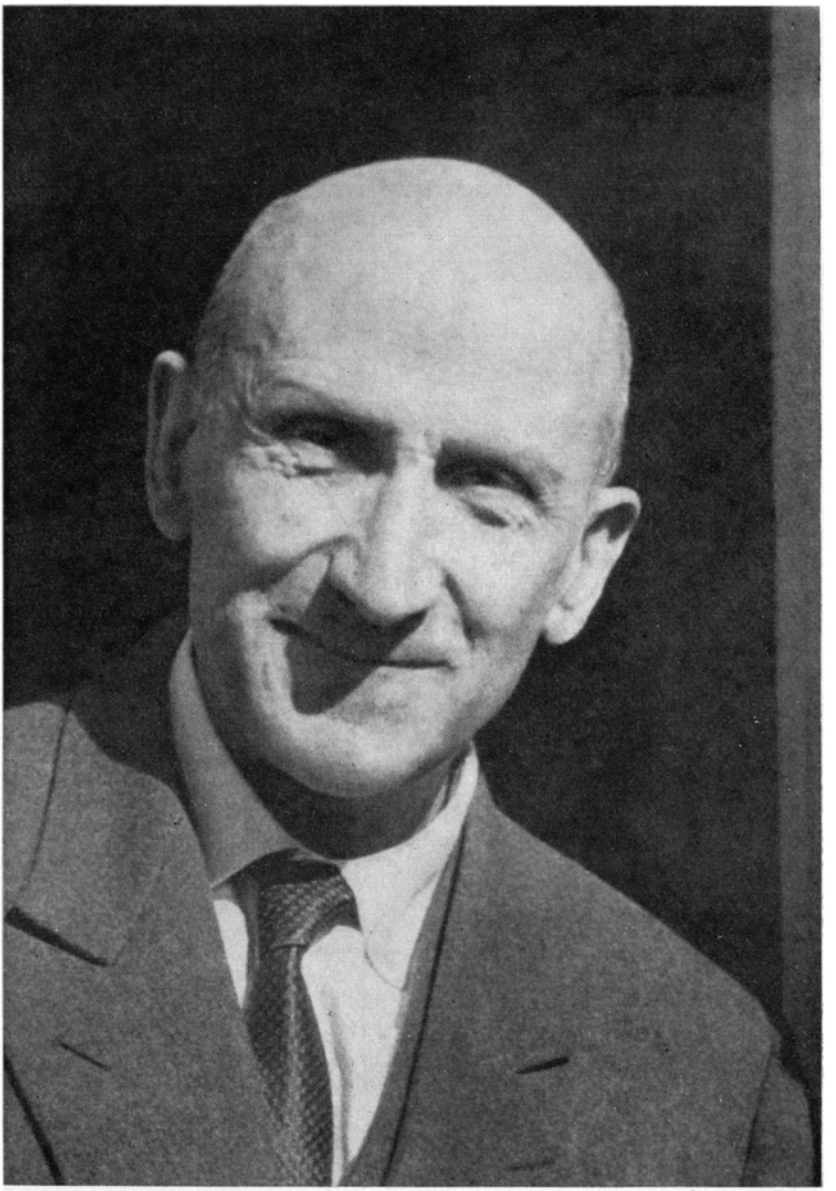
Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Bronisław Knaster

A. Lelek (Warszawa)

O działalności B. Knastera w topologii

Prace badawcze profesora Bronisława Knastera z zakresu topologii, stanowiące główną część jego dorobku naukowego, koncentrują się wokół trzech tematów, związanych z pojęciami continuów, zbiorów spójnych i odwzorowań ciągłych. Każdy z nich zostanie tutaj omówiony na przykładzie kilku publikacji, które w znacznej mierze miały bogatą historię i były wydarzeniami w rozwoju topologii mnogościowej. Publikacje te obejmują lata 1921–1956, ale bynajmniej nie wyczerpują wszystkich wyników autora z tych lat i późniejszych.

I. Continua. Knaster był jednym z pionierów badań nad continuami, tj. przestrzeniami metrycznymi, zwartymi i spójnymi. W początkowym etapie rozwoju topologii zainteresowanie continuami było szczególnie silne. Pierwsze osobliwości wśród continuów zauważył Brouwer w 1910 r., badając przekroje płaszczyzny. Były to tzw. continua nierozkładalne, czyli nie dające się rozłożyć na sumę dwóch continuów różnych od całości. Inny kierunek poszukiwań zaprowadził Janiszewskiego w 1912 r. do odkrycia krzywych bez łuków. Obydwa te wyniki zostały w 1922 r. silnie wzmocnione w słynnej pracy Knastera [2], w której trudna konstrukcja geometryczna za pomocą wieloboków na płaszczyźnie dawała w rezultacie continuum dziedzicznie nierozkładalne, czyli takie, że ono samo i wszystkie continua w nim zawarte są nierozkładalne. Continuum to nazwane zostało później przez topologów krzywą Knastera lub pseudołukiem. Wykrycie istnienia continuów dziedzicznie nierozkładalnych wzbogaciło zasób obiektów, z jakimi matematyka miała do czynienia. Dalsze doświadczenie wykazało, że krzywa Knastera stała się niejako uniwersalnym kontrprzykładem na wiele hipotez, których rozstrzygnięcie bez dysponowania nią prawdopodobnie bardzo by się odwlokło. Okazało się ponadto, że continuów dziedzicznie nierozkładalnych jest dużo. Jak udowodnił Mazurkiewicz w 1930 r., w przestrzeni podcontinuów kwadratu tworzą one zbiór gęsty typu G_δ. Istnieją też continua dziedzicznie nierozkładalne dowolnie wysokiego wymiaru. Sam pseudołuk i jego własności były badane przez wielu autorów. Wymieńmy dwóch spośród nich: Moise dowiódł w 1948 r., że pseudołuk jest homeomorficzny z każdym swoim podcontinuum niejednopunktowym (stąd nazwa pseudołuku), natomiast Bing w serii prac ogłoszonych w latach 1948–1951 odkrył szereg następnych ciekawych własności pseudołuku. Między innymi dowiódł jego jednorodności, co rozwiązywało stary problemat dotyczący krzywych jednorodnych. Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna nazywa się jednorodna, jeśli do każdych dwóch punktów istnieje homeomorfizm przekształcający przestrzeń na siebie oraz przeprowadzający

jeden punkt w drugi. Najprostszym przykładem krzywej jednorodnej jest okrąg koła. Okazało się, iż właśnie krzywa Knastera jest kontrprzykładem na przypuszczenie, że spośród continuów płaskich okrąg koła można scharakteryzować za pomocą jednorodności.

Konstruowanie paradoksalnych przykładów stać się miało „specjalnością" Knastera. W 1924 r. Kuratowski badał przekroje domknięte płaszczyzny i przekroje nieprzywiedlne, tzn. nie zawierające podzbiorów właściwych będących przekrojami. Wykazał w swej pracy, że każdy przekrój płaszczyzny na skończenie wiele obszarów zawiera przekrój nieprzywiedlny oraz że każdy przekrój nieprzywiedlny płaszczyzny na więcej niż dwa obszary jest continuum nierozkładalnym lub sumą dwóch continuów nierozkładalnych. W pracy Knastera [3] zbudowany został przykład przekroju nie zawierającego żadnego przekroju nieprzywiedlnego. Knaster pokazał tam też, że istnieją wspólne ograniczenia dowolnej skończonej liczby lub przeliczalnie nieskończenie wielu obszarów oraz że istnieje rodzina mocy continuum przekrojów parami rozłącznych, z których żaden nie jest lokalnie spójny.

Wcześniej jeszcze Kuratowski rozwinął teorię continuów nieprzywiedlnych między dwoma punktami, tzn. nie zawierających podcontinuów właściwych łączących te punkty. W swej znanej rozprawie, ogłoszonej w 1921 r., zbudował on rozkład dowolnego continuum nieprzywiedlnego na warstwy będące continuami w ten sposób, że przestrzeń tego rozkładu jest łukiem. Każde continuum nieprzywiedlne ma więc strukturę topologiczną w pewnym sensie podobną do łuku. W pracy Knastera [8] teoria Kuratowskiego została istotnie uzupełniona przykładem continuum nieprzywiedlnego, którego rozkład na warstwy jest ciągły i wszystkie warstwy są niejednopunktowe. Własności warstw continuum nieprzywiedlnego, spełniającego powyższe warunki, były badane przez późniejszych autorów. Mianowicie w 1949 r. Moise udowodnił, że wśród warstw takiego rozkładu muszą występować warstwy nie będące łukami. W 1951 r. Hamstrom udowodniła, że muszą tam występować warstwy nie lokalnie spójne, a wreszcie w 1953 r. Dyer wykazał, że muszą występować warstwy będące continuami nierozkładalnymi. Dotychczas nierozstrzygnięte zagadnienie, postawione przez Knastera, dotyczy występowania warstw dziedzicznie nierozkładalnych.

Dziedziczenie własności topologicznych przez podprzestrzenie pewnych przestrzeni było przedmiotem zainteresowania wielu matematyków. Odkrycie krzywej Knastera stanowiło tutaj *primum mobile*. W 1930 r. Whyburn skonstruował dziedziczny przekrój płaszczyzny, tj. takie continuum płaskie, że każde jego podcontinuum niejednopunktowe jest przekrojem. W pracy Knastera [9] krzywa Whyburna została zbadana z punktu widzenia klasyfikacji Mengera–Urysohna. Knaster mianowicie udowodnił, że krzywa Whyburna jest wymierna, czyli każdy punkt ma w niej

dowolnie małe otoczenia o ograniczeniach przeliczalnych. Pseudołuk nie jest wymierny, ale ma tę własność wspólną z krzywą Whyburna, że nie zawiera żadnego łuku, co realizuje w dwóch różnych kierunkach ideę Janiszewskiego krzywej bez łuku. Dodajmy, że krzywa Janiszewskiego także była wymierna.

W klasyfikacji Mengera–Urysohna punkty nazywają się końcowe, jeśli mają dowolnie małe otoczenia o ograniczeniach jednopunktowych. Zagadnienie scharakteryzowania topologicznego zbiorów punktów końcowych zostało rozwiązane w pracy Knastera i Reichbacha [13]. Dowiedli oni, że przestrzeń metryczna ośrodkowa jest wtedy i tylko wtedy homeomorficzna ze zbiorem punktów końcowych pewnej krzywej płaskiej, gdy jest ona topologicznie zupełna (czyli typu G_δ w każdej nadprzestrzeni) i zerowymiarowa.

II. Zbiory spójne. Pojęcie spójności zbioru pojawiało się dosyć często w pracach topologów pierwszej ćwierci XX w. Zajmowali się nim między innymi Hausdorff, Janiszewski, Lennes i Young. Ale dopiero praca Knastera i Kuratowskiego [1] przyniosła teorię zbiorów spójnych wszechstronną i precyzyjną. Oprócz ogólnej teorii spójności w pracy [1] znalazły się zastosowania do zagadnień rozcinania płaszczyzny, a ponadto konstrukcje paradoksalnych przykładów zbiorów spójnych. Były to mianowicie tzw. zbiory dwuspójne, czyli zbiory spójne nie dające się rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych zbiorów spójnych niejednopunktowych. Zbiór dwuspójny Knastera–Kuratowskiego miał jeszcze mocniejszą własność: zawierał punkt (tzw. punkt eksplodujący), którego usunięcie dawało zbiór o składowych jednopunktowych. W 1937 r. Miller zbudował inny zbiór dwuspójny, nie zawierający punktu eksplodującego.

Istnieją zbiory dwuspójne dowolnie wysokiego wymiaru. Co więcej, w pracy Knastera [12] opisana została konstrukcja zbiorów dwuspójnych, które dzielą przestrzenie euklidesowe n-wymiarowe dla $n \geqslant 2$. Zbiory te miały punkty eksplodujące, których usunięcie dawało zbiory o quasi-składowych jednopunktowych.

Operacja usuwania punktów z przestrzeni spójnych była tematem pracy Knastera [11]. Uzyskany wynik dostarczał pomysłowej charakteryzacji topologicznej zbiorów powstających z przestrzeni spójnych przez odjęcie jednego punktu lub, co na jedno wychodzi, podzbioru domkniętego.

Wiadomo, że każde continuum lokalnie spójne jest łukowo spójne. Jeśli jednak odrzucić założenie zwartości, tkwiące w pojęciu continuum, sytuacja zmieni się całkowicie. W 1926 r. Moore wykazał, że istnieje zbiór spójny i lokalnie spójny, który nie zawiera żadnego łuku. W pracy Knastera i Kuratowskiego [5] ten wynik został znacznie wzmocniony. Udowodnili oni, że w znanej krzywej regularnej płaskiej, zbudowanej przez Sierpińskiego, istnieje zbiór spójny, lokalnie spójny i dziedzicznie niedoskonały,

czyli nie zawierający żadnego zbioru doskonałego. Konstrukcja tego zbioru opierała się na twierdzeniu Bernsteina o rozkładzie płaszczyzny na dwa rozłączne zbiory dziedzicznie niedoskonałe.

W pracy Knastera [4] zostało rozwiązane zagadnienie postawione w 1921 r. przez Vietorisa. Rzecz dotyczyła zbiorów spójnych nieprzywiedlnych, których określenie jest podobne do określenia continuów nieprzywiedlnych. Knaster dowiódł, że continuum nieprzywiedlne między dwoma punktami zawiera zbiór spójny nieprzywiedlny między tymi punktami wtedy i tylko wtedy, gdy każde podcontinuum nie będące continuum kondensacji jest rozkładalne.

III. Odwzorowania ciągłe. Brouwer odkrył w 1912 r. ważną własność sympleksu, polegającą na tym, że każde odwzorowanie ciągłe sympleksu w siebie ma punkt stały. To znane twierdzenie Brouwera doczekało się zwięzłego dowodu w pracy Knastera, Kuratowskiego i Mazurkiewicza [6], którzy posłużyli się kombinatorycznym lematem Spernera. W tej formie twierdzenie Brouwera weszło do podręczników uniwersyteckich i może być obecnie wraz z dowodem wykładane dla słuchaczy pierwszych lat studiów.

Wiadomo, że każdy obraz ciągły łuku jest lokalnie spójny, a zatem łukowo spójny. Wynika stąd, że każdy obraz ciągły continuum łukowo spójnego jest łukowo spójny. Wśród continuów nieprzywiedlnych wyróżnia się klasa continuów szczególnie podobnych do łuku. Są to tzw. continua nieprzywiedlne typu λ, czyli takie, że wszystkie ich warstwy są brzegowe. Continuum nazywa się λ-spójne, jeśli każde dwa jego punkty można połączyć continuum nieprzywiedlnym typu λ. Twierdzenie o łukowej spójności obrazów ciągłych continuów łukowo spójnych nie pozostanie jednak prawdziwe, jeśli zastąpić łukową spójność przez λ-spójność. W pracy Knastera i Mazurkiewicza [7] podane zostały przykłady odwzorowań ciągłych continuów λ-spójnych, takich że ich obrazy nie są λ-spójne.

Na specjalną uwagę zasługuje komunikat Knastera [10] wygłoszony na zjeździe w Kijowie w 1940 r. Orzekał on istnienie funkcji ciągłej rzeczywistej dwóch zmiennych, która nie była stała na żadnym łuku. Przeciwobrazy punktów przez tę funkcję były mianowicie pseudołukami. Inaczej mówiąc, chodziło o rozkład pasa płaszczyzny na pseudołuki, taki że przestrzeń rozkładu jest homeomorficzna z linią prostą. Wskutek skomplikowanej budowy pseudołuku próba „wymiecenia" płaszczyzny za jego pomocą wydaje się przedsięwzięciem bardzo trudnym. Tak jest istotnie, ale jednak okazuje się to możliwe. Ten wynik Knastera niestety został opublikowany tylko w postaci anonsu, a działania wojenne przeszkodziły jego ogłoszeniu *in extenso*.

Wysoki stopień jednorodności zbioru Cantora był tematem pracy Knastera i Reichbacha [14]. Udowodnili oni, że dowolny homeomorfizm

między podzbiorami domkniętymi brzegowymi zbioru Cantora daje się przedłużyć do homeomorfizmu całego zbioru Cantora na siebie.

W pracy Knastera [15] zostało wprowadzone ciekawe pojęcie zamocowania rozkładu. Mówimy, że rozkład jakiejś przestrzeni jest zamocowalny, jeśli istnieją skończone rodziny zbiorów domkniętych o dowolnie małych średnicach, parami rozłącznych i takich, że suma zbiorów każdej rodziny ma punkt wspólny z każdym elementem rozkładu. Konstrukcja opisana przez Knastera daje funkcję ciągłą rzeczywistą, określoną na pewnym continuum leżącym w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, taką że przeciwobrazy punktów są continuami o dużej średnicy i tworzą niezamocowalny rozkład całego continuum.

*

Od wczesnych lat swej działalności naukowej i dydaktycznej profesor Knaster prowadził seminarium topologiczne, najpierw w Warszawie, później we Wrocławiu. Zachowały się protokoły tych seminariów od 1929 r. (Warszawa) i od 1947 r. (Wrocław). Seminaria wrocławskie, znane również jako „knasteria", były dla wielu pierwszą szkołą pracy naukowej, impulsem do rozpoczęcia własnych badań i terenem dyskusji. We wszystkim tym profesor Knaster był jednocześnie opiekunem i współuczestnikiem, a także troskliwym nauczycielem i doradcą młodych adeptów. W protokołach z tych lat znajdują się nazwiska uczestników, między innymi — 1947: Goetz, Rutkowski, Siciarz; 1948: Fast, Reichbach, Zięba; 1949: Mioduszewski, Sąsiada, Szamkołowicz; 1950: Szczotka, Urbanik; 1953: Kapała, Rochowski; 1954: Lelek, Nitka; 1958: Charatonik, Duda, Zaremba. Wyniki uzyskane przez uczestników seminariów dotyczyły zagadnień stawianych przez profesora Knastera. Często, mimo iż czasami jawnie nie było to potem uwidocznione w publikacji, był on ich współautorem, a prawie zawsze — tłumaczem i redaktorem. Swoje zagadnienia ogłaszał także drukiem. Zebrało się ich do tej pory ogłoszonych ponad trzydzieści i zgodnie z opinią topologów są one na ogół trudnymi do rozwiązania problematami, dotyczącymi głębokich zjawisk i rzeczy.

Prace cytowane

[1] B. Knaster et K. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), str. 206–255.

[2] B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, ibidem 3 (1922), str. 247–286.

[3] — *Quelques coupures singulières du plan*, ibidem 7 (1925), str. 264–289.

[4] — *Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points*, ibidem 10 (1927), str. 276–297.

[5] — et K. Kuratowski, *A connected and connected im kleinen point set which contains no perfect subset*, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), str. 106–109.

[6] B. Knaster, K. Kuratowski et S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. 14 (1929), str. 132–137.

[7] B. Knaster et S. Mazurkiewicz, *Sur un problème concernant les transformations continues*, ibidem 21 (1933), str. 85-90.

[8] B. Knaster, *Un continu irréductible à décomposition continue en tranches*, ibidem 25 (1935), str. 568–587.

[9] — *Über rationale Kurven ohne Bögen*, Monatsh. Math. Phys. 42 (1935), str. 37–44.

[10] — *Une fonction réelle continue de deux variables qui n'est constante sur aucun arc simple*, Komunikat na Zjeździe Wszechzwiązkowym z teorii funkcji w Kijowie, 24–26. VI. 1940.

[11] — *Sur un problème de P. Alexandroff*, Fund. Math. 33 (1945), str. 308–313.

[12] — *Sur les coupures biconnexes des espaces euclidiens de dimension $n > 1$ arbitraire*, Mat. Sb. 19 (1946), str. 9–18.

[13] — et M. Reichbach, *Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe*, Fund. Math. 40 (1953), str. 13–28.

[14] — et M. Reichbach, *Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies*, tamże, str. 180–193.

[15] B. Knaster, *Sur la fixation des décompositions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (1956), str. 193–196.

E. Marczewski (Wrocław)

O działalności B. Knastera

Andrzej Lelek opowiedział o głównym nurcie twórczości matematycznej Bronisława Knastera, tj. o jego pracach topologicznych, a potem o jego działalności, jako nauczyciela i mistrza topologów wrocławskich. Z kolei rzeczy spróbuję opowiedzieć — nie unikając nuty subiektywnej — o innych wątkach działalności Jubilata.

Wątek taki tworzą przede wszystkim tematy z ogólnej teorii mnogości.

W latach dwudziestych interesowano się w Warszawie i Lwowie zagadnieniami związanymi z twierdzeniem Cantora i Bernsteina o przekształceniach wzajemnie jednoznacznych. Pewne jego uogólnienie udowodnił Banach w 1924 roku i stosował je następnie wraz z Tarskim do dowodu słynnego paradoksu o rozkładzie kuli, nazywanego zwykle imieniem ich obu (1). W 1927 roku Knaster i Tarski opublikowali w Annalach PTM krótkie komunikaty, poświęcone tym kwestiom (2). Myślą przewodnią komunikatu Knastera jest przeniesienie rozważań z przekształceń punktowych na funkcje, których argumentami i wartościami są zbiory

(1) S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. 6 (1924), str. 236–239, oraz S. Banach et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, tamże, str. 244–277.

(2) A. Tarski, *Quelques théorèmes généraux sur les images d'ensembles*, Ann. Soc. Pol. Math. 6–1927 (1928), str. 132–133, oraz B. Knaster, *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, tamże, str. 133–134.