[6] B. Knaster, K. Kuratowski et S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. 14 (1929), str. 132–137.

[7] B. Knaster et S. Mazurkiewicz, *Sur un problème concernant les transformations continues*, ibidem 21 (1933), str. 85-90.

[8] B. Knaster, *Un continu irréductible à décomposition continue en tranches*, ibidem 25 (1935), str. 568–587.

[9] — *Über rationale Kurven ohne Bögen*, Monatsh. Math. Phys. 42 (1935), str. 37–44.

[10] — *Une fonction réelle continue de deux variables qui n'est constante sur aucun arc simple*, Komunikat na Zjeździe Wszechzwiązkowym z teorii funkcji w Kijowie, 24–26. VI. 1940.

[11] — *Sur un problème de P. Alexandroff*, Fund. Math. 33 (1945), str. 308–313.

[12] — *Sur les coupures biconnexes des espaces euclidiens de dimension $n > 1$ arbitraire*, Mat. Sb. 19 (1946), str. 9–18.

[13] — et M. Reichbach, *Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe*, Fund. Math. 40 (1953), str. 13–28.

[14] — et M. Reichbach, *Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies*, tamże, str. 180–193.

[15] B. Knaster, *Sur la fixation des décompositions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (1956), str. 193–196.

E. Marczewski (Wrocław)

O działalności B. Knastera

Andrzej Lelek opowiedział o głównym nurcie twórczości matematycznej Bronisława Knastera, tj. o jego pracach topologicznych, a potem o jego działalności, jako nauczyciela i mistrza topologów wrocławskich. Z kolei rzeczy spróbuję opowiedzieć — nie unikając nuty subiektywnej — o innych wątkach działalności Jubilata.

Wątek taki tworzą przede wszystkim tematy z ogólnej teorii mnogości.

W latach dwudziestych interesowano się w Warszawie i Lwowie zagadnieniami związanymi z twierdzeniem Cantora i Bernsteina o przekształceniach wzajemnie jednoznacznych. Pewne jego uogólnienie udowodnił Banach w 1924 roku i stosował je następnie wraz z Tarskim do dowodu słynnego paradoksu o rozkładzie kuli, nazywanego zwykle imieniem ich obu (1). W 1927 roku Knaster i Tarski opublikowali w Annalach PTM krótkie komunikaty, poświęcone tym kwestiom (2). Myślą przewodnią komunikatu Knastera jest przeniesienie rozważań z przekształceń punktowych na funkcje, których argumentami i wartościami są zbiory

(1) S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. 6 (1924), str. 236–239, oraz S. Banach et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, tamże, str. 244–277.

(2) A. Tarski, *Quelques théorèmes généraux sur les images d'ensembles*, Ann. Soc. Pol. Math. 6–1927 (1928), str. 132–133, oraz B. Knaster, *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, tamże, str. 133–134.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

i redukcje różnych twierdzeń do takiego eleganckiego lematu: Dla każdej monotonicznej funkcji h przyporządkowującej każdemu zbiorowi $E \subset A$ zbiór $h(E) \subset A$ istnieje tzw. punkt stały, tj. zbiór D taki, że $D = h(D)$.

Te rozważania Knastera i Tarskiego weszły do monografii różnych autorów; uwzględnia je np. Garrett Birkhoff w *Lattice Theory*, Tarski w *Cardinal Algebras* itd. Zwłaszcza cenił te rezultaty Wacław Sierpiński. Uczestniczyłem w 1927 roku, będąc wtedy słuchaczem Uniwersytetu Warszawskiego, w jego seminarium, gdy prezentował uczestnikom twierdzenia Knastera i Tarskiego w obecności obu autorów. A w swej *Algèbre des Ensembles* (1951) opiera na tych twierdzeniach wykład twierdzeń Cantora i Bernsteina.

Z rezultatów ogólno-mnogościowych Bronisława Knastera szczególnie jest mi bliskie twierdzenie udowodnione w 1941 roku, we Lwowie, a związane ze sławnym zagadnieniem Suslina. Współpracowaliśmy wtedy żywo, bo i ja, w mych ówczesnych badaniach uogólnionego zbioru Cantora, zajmowałem się własnością rodzin zbiorów, występującą w tym zagadnieniu, a następnie także własnością pokrewną sformułowaną przez Knastera.

Przypomnijmy, że według starego twierdzenia Cantora, na to by zbiór uporządkowany liniowo był typu λ, tj. by był podobny do prostej, potrzeba i wystarcza, by był

(A) bez elementu pierwszego i ostatniego,

(B) ciągły (tj. bez skoków i luk),

(D) ośrodkowy (tj. by zawierał część przeliczalną gęstą).

W 1920 roku w pierwszym tomie „Fundamenta Mathematicae" ogłoszone zostało zagadnienie zmarłego w 1917 roku Michała Suslina: czy własność (D) może być w tym twierdzeniu zastąpiona przez własność, zwaną dziś własnością Suslina:

(S) każda rodzina przedziałów rozłącznych jest najwyżej przeliczalna.

Oczywiście (D) pociąga za sobą (S), Suslinowi chodziło więc o to, czy — przy założeniach (A) i (B) — własność (S) pociąga za sobą (D).

W dwudziestoleciu między wojnami pojawiały się ciągle próby rozwiązania tego zagadnienia przez różnych matematyków. Wszystkie niemal te badania pozostawały w sferze nieudanych prób i ich rezultatami były błędne rozwiązania (publikowane lub nie), albo też różne redukcje, zwykle mało interesujące.

Związany ściśle z zagadnieniem Suslina wynik Knastera, zawarty w pracy napisanej w 1941 r., a ogłoszonej w 1945 ([3]) był całkowicie niespodziewany.

([3]) B. Knaster, *Sur une propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels*, Matiem. Sbornik 16 (1945), str. 281–288.

Własność (S) można inaczej sformułować tak: w każdej nieprzeliczalnej rodzinie przedziałów istnieją dwa przedziały mające punkt wspólny. Otóż Knaster, nawiązując do różnych twierdzeń topologicznych, m.in. do pewnego twierdzenia R. L. Moore'a z 1928 roku, formułuje własność mocniejszą od (S) (zwaną przez innych autorów własnością Knastera):

(K) w każdej nieprzeliczalnej rodzinie przedziałów istnieje podrodzina nieprzeliczalna, w której każde dwa przedziały mają punkt wspólny.

Zachodzą oczywiście implikacje: (D) $\Rightarrow$ (K) $\Rightarrow$ (S), a zagadnienie Suslina rozpada się na dwa: czy (przy założeniu (A) i (B)) zachodzą implikacje odwrotne: (S) $\Rightarrow$ (K) i (K) $\Rightarrow$ (D)? Wbrew pierwotnym intuicjom okazało się, że druga implikacja zachodzi, a pierwsza staje się przez to równoważna z zagadnieniem Suslina.

Tak więc Knaster uzyskał 1° nową charakterystykę typu porządkowego λ przez własności (A), (B) i (K), 2° nowe sformułowanie zagadnienia Suslina: czy (A), (B) i (S) implikują (K)? Sformułowanie elegantsze od oryginalnego, bo własność (S) (w podanej przed chwilą zmodyfikowanej formie) i własność (K) są zupełnie tego samego rodzaju, czego nie można było powiedzieć o (S) i (D).

Twierdzenie Knastera jest cytowane w literaturze przedmiotu i nic dotąd nie straciło na aktualności. Bo, jak wykazały najnowsze badania z podstaw teorii mnogości, zagadnienie Suslina jest niezależne od zwykłych aksjomatów teorii mnogości [4]. Dodajmy, że własność Knastera została zbadana także dla rodzin innych niż rodzina przedziałów [5].

Inne nietopologiczne wyniki Bronisława Knastera pochodzą z lat czterdziestych i dotyczą podziału pragmatycznego [6], określonego i tak właśnie nazwanego przez Hugona Steinhausa. Wyniki te są rezultatem współpracy tych dwóch uczonych, a także Stefana Banacha.

I jeszcze jeden temat, związany z ogólnym pojęciem średniej i z pewnymi równaniami funkcyjnymi. W 1949 roku Knaster udowodnił [7], drogą bardzo pomysłowego rachunku, że w dowolnym zbiorze liniowo

---

[4] Patrz np. T. Jech, *Non-provability of Souslin's hypothesis*, Comment. Math. Univ. Carolinae 8 (1967), str. 291-305.

[5] E. Marczewski, *Sur deux propriétés des classes d'ensembles*, Fund. Math. 33 (1945), str. 303–307, oraz *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, tamże 34 (1949), str. 127–143.

[6] B. Knaster, *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus*, Ann. Soc. Pol. Math. 19–1946 (1947), str. 228–230, oraz B. Knaster et H. Steinhaus, *Sur le partage pragmatique*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław 2 (1947), str. 1–137.

[7] B. Knaster, *Sur une équivalence pour les fonctions*, Coll. Math. 2 (1951), str. 1–4.

uporządkowanym dla dowolnego rosnącego działania binarnego (oznaczmy je jak mnożenie), tzw. rozdzielność w sobie:

$$x(yz) = (xy)(zx)$$

pociąga za sobą tzw. bisymetrię:

$$(xy)(zu) = (xz)(yu).$$

Ten rezultat wszedł m.in. do monografii węgierskiego matematyka J. Aczéla o równaniach funkcyjnych ([8]).

Działalność dydaktyczną rozpoczął Bronisław Knaster na Uniwersytecie Warszawskim po swej habilitacji w 1925 roku. W tym to okresie pierwsi wychowankowie warszawskiej szkoły matematycznej rozpoczęli wykłady na Uniwersytecie, którego byli przedtem studentami. Pierwszy habilitował się w 1921 r. Kazimierz Kuratowski, a w latach 1925 i 1926 odbyło się kilka dalszych wybitnych habilitacji. Wtedy właśnie jako student uczęszczałem na wykłady coraz to nowych docentów: Bronisława Knastera, Stanisława Saksa, Alfreda Tarskiego, Antoniego Zygmunda.

Bronisław Knaster wykładał topologię, a w pewien czas później (1928) zaczął także prowadzić seminarium topologiczne. Miał licznych wybitnych słuchaczy, którzy mu wiele zawdzięczają. Ale jego uczniowie i koledzy najwięcej chyba korzystali z rozmów, które toczyły się czasem w kawiarni (najpierw u Rydzewskiego na Krakowskim Przedmieściu, a potem u Kozłowskiego i w Ziemiańskiej na Marszałkowskiej), czasem na ulicy, a czasem w domu przy ul. Narbuta na Mokotowie. W tych gawędach Knaster rozwijał i korygował pomysły młodych rozmówców i poddawał coraz to nowe, poprawiał i bezlitośnie przekształcał pierwsze nieudolne próby ujęcia rezultatów na piśmie, uczył jak prace należy pisać i jak tłumaczyć na języki obce. Te rozmowy i dyskusje trwały zazwyczaj długo, bywały zawsze serdeczne, choć często burzliwe, zwykle wyczerpujące (w obu znaczeniach tego słowa), ale zawsze owocne i kształcące dla młodych adeptów matematyki. Nawet wtedy, gdy ów adept nie zastosował się do wszystkich usłyszanych rad. Wszyscy topolodzy warszawscy owego pokolenia i różni matematycy z innych specjalności i ośrodków przeszli przez tę trudną, ale świetną szkołę.

Knaster interesował się czynnie wszystkimi formami współpracy naukowej. Gdy po utworzeniu w 1915 roku Uniwersytetu Warszawskiego powstało Koło Matematyczno-Fizyczne słuchaczów tego uniwersytetu, pierwszym prezesem został Kazimierz Kuratowski, a Bronisław Knaster pierwszym (chronologicznie) sekretarzem. Później, będąc doktorem i docentem, uczestniczył w wielu posiedzeniach naukowych tego Koła. Sekretarzował przez czas dłuższy w Oddziale Warszawskim Polskiego Towarzyst-

([8]) J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel 1961, str. 201–202.

wa Matematycznego, a po reorganizacji Towarzystwa w r. 1939 został sekretarzem Zarządu Głównego. W latach poprzedzających II wojnę światową, a także w latach powojennych, uczestniczył w przygotowaniach do utworzenia ogólnopolskiego Instytutu Matematycznego.

Interesowała go też czynnie współpraca międzynarodowa, a zwłaszcza z matematykami czesko-słowackimi. Rozwijał ją w porozumieniu z Edwardem Čechem (z którym pozostawał w serdecznej przyjaźni), a jej punktem kulminacyjnym był wspólny zjazd matematyków polskich i czesko-słowackich w Pradze w 1949 r. Przed wojną szczególnie żywe były jego kontakty z Karolem Mengerem, a później z Pawłem Aleksandrowem i jego liczną szkołą, a także z wieloma topologami amerykańskimi.

Ale ze wszystkich form współpracy naukowej najbliższe były mu i są wydawnictwa. Stały się one jego wielką pasją życiową. Był współzałożycielem powstałych w 1931 roku „Monografii Matematycznych". Wszedł wówczas do ich komitetu redakcyjnego, któremu przewodniczył od początku Kazimierz Kuratowski. Knaster przełożył z polskiego na francuski pierwsze tomy tej serii: *Operacje liniowe* Banacha i *Teorię całki* Saksa, wywierając zresztą niemały wpływ na ostateczny kształt tych dzieł. Był autorem szaty graficznej „Monografii", opiekował się drukiem, zorganizował sprzedaż zagraniczną i spełniał wiele funkcji edytorskich i organizacyjnych. Gdy dziś przeglądam pierwsze tomy „Monografii", co chwilę dostrzegam widoczne tylko dla wtajemniczonych rezultaty jego inicjatywy: tu doradził autorowi inny podział na części, tam zaproponował, a pewnie i zrealizował sporządzenie tablicy wyników i równoważności, ówdzie z jego inspiracji powstał nowy rozdział. Przypominają mi się także ucieszne, czasem rubaszne złośliwości, jakich surowy redaktor nie szczędził autorom. Np. Stanisławowi Saksowi, który pisał polszczyzną piękną, ale trochę archaizowaną, mówił: u ciebie są same iże i wszaki...

W 1935 roku objął opiekę także nad „Fundamenta Mathematicae", poczynając od jubileuszowego XXV tomu tego czasopisma. „Fundamenta" wypiękniały znacznie, ale odbyło się to nie bez trudności. Wieloletni dyrektor Drukarni Uniwersytetu Jagellońskiego Józef Filipowski niemało miał kłopotów zanim spełnił życzenia zawarte w listach Knastera do Drukarni. Wieść niesie, że pracownicy Drukarni w poemacie skomponowanym na imieniny dyrektora ujęli rzecz w tych słowach: „a Dyrektora boli głowa, gdy pisze docent z Mokotowa".

Niemal całkowicie pracy wydawniczej poświęca się Bronisław Knaster w pierwszych latach powojennych. Najpierw zaopiekował się drukiem rozpoczętego w roku 1939 tomu 33 „Fundamenta Mathematicae". Tom ten ukazał się już w 1945 roku i był symbolem odrodzenia matematyki polskiej. Łączył prace oddane do druku przed wojną i oddane do druku po jej zakończeniu, a była w nim i taka, na której napisano: Wrocław. We

Wrocławiu był współorganizatorem Drukarni Naukowej, dla której wywalczył nowoczesne wyposażenie. I tu, również pod jego opieką edytorską, wydrukowany został w 1947 r. pierwszy powojenny tom „Studia Mathematica". Tu także rozpoczęło się drukować w tym samym roku „Colloquium Mathematicum", którego był współzałożycielem.

Kazimierz Kuratowski pisał na dziesięciolecie Instytutu Matematycznego PAN: „... zorganizowanie na tak dużą skalę wydawnictw matematycznych, a dodajmy — postawienie ich na poziomie prawdziwie międzynarodowym — wymagało wielkiego wysiłku organizacyjnego i wielkiego znawstwa przedmiotu. Niezapomniane tu położył zasługi, zwłaszcza w pierwszych latach po wyzwoleniu, prof. Knaster" ([9]).

Pod jego kierunkiem rozpoczynał pracę doc. Marceli Stark, obecnie kierujący wydawnictwami matematycznymi. Wyszli ze szkoły Knastera inni zasłużeni pracownicy wydawnictw, a przede wszystkim Jerzy Siciarz.

Zasługi wydawnicze Bronisława Knastera wykraczają daleko poza matematykę. Od założenia Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego redagował przez wiele lat różne jego wydawnictwa, a przede wszystkim tzw. serię B, obejmującą wszystkie nauki ścisłe, z medycyną i rolnictwem włącznie. Piękna forma redakcyjna i graficzna tych wydawnictw jest wielką i powszechnie uznaną zasługą ich wieloletniego redaktora.

Omawiając działalność Bronisława Knastera, nie można oczywiście pominąć tego wybitnego rysu charakterystycznego, jakim jest znakomity jego dowcip. Jest to najczęściej dowcip sytuacyjny, a więc właściwie niemożliwy do powtórzenia. Bo przecież wymagałby szczegółowych komentarzy, a właśnie profesor Knaster mawia, że gdy trzeba tłumaczyć na czym dowcip polega, to dowcip już poległ.

Kończę już to przemówienie, zdając sobie oczywiście sprawę z jego niedoskonałości i niezupełności, za którą Jubilata przepraszam. Ale skończyć już muszę, skoro nadszedł kulminacyjny moment uroczystości, którym się z góry radujemy.

R. Sikorski (Warszawa)

Przemówienie na lampce wina z okazji wręczenia B. Knasterowi i H. Steinhausowi dyplomu członka honorowego Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Pragnę powiedzieć słów kilka o bohaterach dziesiejszych uroczystości, tym razem nie jako Prezes PTM, lecz jako przedstawiciel WCAM. Państwo nie wiedzą, co to jest WCAM? To Warszawskie Centrum Administracji

([9]) K. Kuratowski, *10 lat Instytutu Matematycznego*, Wiadom. Mat. 3 (1960), str. 199–216, w szczególności str. 215.