ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. STEINHAUS (Wrocław)

Błędy w matematyce*

Mówi się „pewne, jak 2 a 2 jest 4". W tym zwrocie wyraża się przeświadczenie o nieomylności matematyki. Trudno by było przeczyć temu mniemaniu, według którego wyniki matematyki są niezachwianymi prawdami, wyższymi nad wszelką wątpliwość. Rzeczywiście, twierdzenia wynikłe z zasad matematyki w drodze rozumowania matematycznego zasługują ze wszech miar na zaszczytną nazwę prawd naukowych. Wątpić w nie jest trudno nawet wtedy, gdy ich się nie rozumie. Chcemy jednak tym razem mówić o tych twierdzeniach, które z pozoru matematyczne, w rzeczy samej nimi nie są; o tych, które weszły do gmachu nauki drogą boczną, omyliwszy czujność uczonych. Są to twierdzenia błędne, wobec których wszelki respekt byłby nie na miejscu. Uwadze matematyków nietrudno by było dopilnować wejść bocznych, gdyby tych wejść nie było tak wiele. Twierdzenia błędne wchodzą i nieraz dopiero po latach ulegają zdemaskowaniu.

Pisma matematyczne obfitują w błędy. Jeden z wybitnych matematyków współczesnych wyraził zdanie, że połowa tych twierdzeń, które pojawiają się w 600 fachowych periodykach matematycznych, jest błędna. Może to jest pesymizm. Jest jednak faktem, że istnieją dysertacje doktorskie, w których pierwsze twierdzenie z brzegu jest błędne. Poincaré powiada, że kto poprawiał prace egzaminacyjne, wie ile kandydat zadaje sobie trudu, zanim udowodni pierwsze twierdzenie błędne, by później z niego już z zadziwiającą łatwością wyprowadzić zarówno prawdziwe, jak fałszywe wnioski. Na pierwszy rzut oka mogłoby się zdawać, że skutki jednego błędu dają się odczuć w całej konstrukcji naukowej i że wobec tego błędy są niebezpieczne, ale łatwe do wykrycia. Naprawdę rzecz ma się inaczej i błędy są zlokalizowane. Nauka idzie swoim torem, a błędne twierdzenia czekają na swój los. Później spróbujemy wyjaśnić, skąd to pochodzi.

Błędy biorą się stąd, że autorowie przez pośpiech, przez nieuwagę lub też z innych przyczyn zbaczają z drogi matematycznej.

---

* Poprawiony przez autora przedruk rozdziału V jego książki: *Czem jest a czem nie jest matematyka*, Lwów, nakładem H. Altenberga, 1923.

Najprostszym przykładem błędu jest błąd rachunkowy. Już na tym przykładzie widzimy, że błąd niekoniecznie polega na błędnym mniemaniu. Ktoś, kto dodając kolumny cyfr myli się, nie wchodzi zupełnie w znaczenie sądu jaki wypowiada, mówiąc, że dwa a dwa jest pięć. Psychika błądzącego nie należy do naszego przedmiotu. Nas obchodzi w tej chwili klasyfikacja błędów. Ten sam rachmistrz, który mylił się w dodawaniu i nie ufając sobie zechce przy mnożeniu posługiwać się tablicami, może popaść w błąd wskutek pomyłki w druku tablic. Ten błąd różni się od poprzedniego.

Dla przeglądu i bez pretensji do wyczerpującego podziału odróżniamy błędy leżące w dowodzie od wziętych z uprzedniego twierdzenia własnego i cudzego. Dodajmy jeszcze trzecią kategorię: błędów dogmatycznych, tj. takich, które zjawiają się bez upozorowania, a nawet nieraz jako prawdy tak oczywiste, że nie wymagają dowodu. Błędy w dowodzie podzielimy na rachunkowe, logiczne i intuicyjne. Przykład błędu rachunkowego już podaliśmy, trzeba jednak pamiętać, że nie tylko rachunki liczbowe, ale i rachunki algebraiczne, wykonywa się nieraz mechanicznie i stąd popada w błędy, np. w błąd w znaku (— zamiast +).

Przykładem błędu logicznego jest rozumowanie, które podaje angielski matematyk i logik Augustus de Morgan w *Budget of Paradoxes*. Pewien kwadrator, tj. człowiek szukający kwádratury koła, tłumaczył raz Morganowi swoje rozwiązanie tego zagadnienia i wychodząc z założenia, że ludolfina jest większa niż 3,1416, po długich dowodzeniach doszedł do wniosku, że ludolfina jest większa niż 3,1416. Kiedy mu Morgan zrobił zarzut, że zakłada z góry prawdziwość twierdzenia, które chce dowieść, kwadrator odpowiedział, że Euklides wychodzi nieraz z twierdzenia fałszywego, aby dojść do prawdziwego, tym bardziej więc wolno obrać za punkt wyjścia twierdzenie prawdziwe, a takim jest niewątpliwie jego teza. Ten matematyk był w otwartej walce z logiką, co się zdarza dość rzadko, i nie rozumiał istoty dowodu niewprost. Drugi rodzaj błędu logicznego, to mylna definicja. Dziennik paryski „Excelsior" podaje w numerze z 7 maja 1912 opis zajścia między pułkownikiem Monteil, który przedstawił Akademii pracę zawierającą rozwiązanie zagadnienia podziału kąta na trzy równe części, a matematykiem Darboux, który jako sekretarz Akademii tę pracę odrzucił. Wywiązała się rozmowa, w trakcie której Darboux powiedział: proszę mi podać definicję długości okręgu koła, a potem będziemy dyskutować. Na to Monteil: „Długości się nie definiuje, długość się mierzy". Wobec tego nowego „indefinabile" (1) dyskusja nie mogła się odbyć. Tego rodzaju błąd logiczny, polegający na nieznajomości zasad matematyki, jest częstszy od poprzedniego. Definicja dłu-

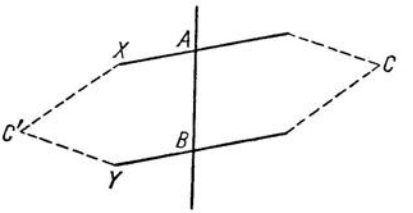
(1) = rzecz nie dająca się określić.

gości istnieje; znana była w treści, choć nie w formie, starożytnym, a sformułowali ją współcześni matematycy G. Peano i Camille Jordan.

Mierzenie jest czynnością realną, której na przedmiotach matematyki jako na utworach idealnych dokonać nie można. Ciekawe jest, że gdy pułkownik Monteil udał się na drogę sądową, aby wyegzekwować przyjęcie swej pracy, Akademia oparła się na swej uchwale z r. 1775, według której postanowiła odrzucać bez czytania wszystkie prace o podziale kąta na trzy równe części i wszystkie prace o kwadraturze koła. Condorcet, motywując tę uchwałę, popełnił błąd, gdy twierdził, że niemożliwość kwadratury koła jest udowodniona, bo nie była jeszcze w r. 1775. Błąd ten był o tyle różny od błędu Monteila, że przez Condorceta przemawiał instynkt matematyczny, który kazał mu w roku 1775 przewidzieć to, co udowodniono przeszło sto lat później, podczas gdy Monteil nie chciał zrozumieć tego, co dziś mógłby znaleźć w elementarnych podręcznikach.

Błąd logiczny w dowodzie może polegać na luce, czyli skoku logicznym. Czasem ta luka jest taka duża, że z dowodu nic nie zostaje. Jeżeli np. ktoś dowodzi, że $a+b=b+a$, w ten sposób, że stwierdza iż porządek dodajników nie może zmienić ich łącznej sumy, powtarza po prostu twierdzenie i nie dochodząc do błędnego wyniku podaje jako dowód frazes, który dowodem nie jest.

Właśnie prawdziwe teorematy, jeżeli są bardzo oczywiste, mogą stać się źródłem błędów w dowodach, jak to widzimy w podręczniku szkolnym geometrii Mocnika-Maryniaka. Chodzi o dowód teorematu, że dwie proste przecięte trzecią tak, iż kąty naprzemianległe są równe, są równoległe. W tym celu autor zakłada, że proste się przecinają w punkcie C i przenosi figurę ABC na lewą stronę prostej AB, kładąc B na A, a A na B i AC na BX i BC na AX, co można zrobić, bo kąty naprzemian-



Rys. 1

ległe są równe (rys. 1). W ten sposób otrzymuje jako odpowiadający punktowi C punkt C', który byłby drugim punktem przecięcia prostych AX i BY, co się sprzeciwia aksjomatom geometrii. Błąd leży w niewykazaniu odmienności punktów C i C'. Dowód Mocnika-Maryniaka nie unika mianowicie ewentualności, że te punkty mogłyby być identyczne, co oczywiście obaliłoby całe rozumowanie. Ponadto jest luka w dowodzie, bo autor stosuje aksjomat o przystawaniu trójkątów tak, jak gdyby

już miał 2 trójkąty ABC i ABC', podczas gdy istnienie trójkąta ABC' należy dowieść; ta luka da się jednak łatwo wypełnić (jak zauważył p. Żyliński). Mimo to wszystko, kto przeczyta dowód Mocnika uwierzy w twierdzenie; dowód ma siłę przekonywającą, ale tylko dlatego, że twierdzenie przemawia do intuicji geometrycznej bez dowodu. W słynnych *Grundlagen der Geometrie* Hilberta jest naszkicowany dowód twierdzenia o dwóch prostych. Ale i tam jest usterka, bo autor mówi o tym, że jeden kąt jest większy od drugiego, nie podawszy zupełnie definicji mniejszości i większości kątów w swoich definicjach i aksjomatach. Ta usterka jest łatwa do uzupełnienia, podczas gdy błąd Mocnika jest zasadniczy. Nie zawsze jednak wprowadzenie wśród dowodu nowej zasady jest błędem, gdyż tak a nie inaczej postąpił Pascal, gdy użył zasady indukcji matematycznej chcąc udowodnić pewne twierdzenie o współczynnikach potęgi dwumianu. Okazało się, że bez tej zasady wszystkie dowody najprostszych twierdzeń matematycznych miały lukę, a sama zasada weszła do matematyki jako jedna z jej najważniejszych metod... I w matematyce „duo cum faciunt idem non est idem"(2). D'Alembert zarzuca w tomie z r. 1754 słynnej encyklopedii francuskiej następujący błąd innym matematykom: jakie jest prawdopodobieństwo, że grając w orła i reszkę wyrzucę przynajmniej raz orła w dwu rzutach? Wszyscy matematycy rozumują następująco: z czterech kombinacji możliwych

orzeł orzeł, orzeł reszka, reszka orzeł, reszka reszka

są trzy pierwsze korzystne, zatem prawdopodobieństwo wynosi 3/4. D'Alembert sądzi, że są tylko 3 kombinacje możliwe

orzeł, reszka orzeł, reszka reszka,

bo wyrzuciwszy orła za pierwszym razem nie gra się dalej; ponieważ dwa pierwsze są korzystne, więc prawdopodobieństwo $= 2/3$. Błąd D'Alemberta jest w tym ciekawy, że polega na skonstruowaniu umyślnym niejako luki, aby zbić istniejące poprawne dowody bez luki. Luka polega na tym, że w rachunku prawdopodobieństwa nie wystarcza zwykła dysjunkcja logiczna do przeliczenia wypadków, lecz musi się otrzymać kombinacje równomożliwe, a kombinacja *orzeł* i *reszka orzeł* nie jest równomożliwa. Gdy Necker z Genewy napisał to d'Alembertowi, ten uznał zarzut za poważny, ale twierdzenia nie cofnął.

Podajmy jeszcze przykład błędu polegającego na nieporozumieniu słownym. Pewien autor uczynił zarzut zasadzie indukcji matematycznej, że nie jest pewna, bo prowadzi do błędów w niektórych wypadkach. Jako przykład podał twierdzenie: $2, 3, 5, \ldots, (2n+1)+1$ jest liczbą pierwszą dla $n = 1, 2, 3$, a nie jest pierwszą dla $n = 4$.

---

(2) = gdy dwaj robią to samo, to nie to samo.

Popełnił błąd, bo indukcja, którą podaje za przykład, nie ma nic wspólnego z indukcją matematyczną, a jego przykład poucza tylko zupełnie słusznie, że przyrodnicza metoda uogólniania jest w matematyce nie na miejscu. Fermat przypuszczał, że $2^{2^k}+1$ jest liczbą pierwszą dla każdego k, co nie jest prawdą. Otóż Fermat wypowiadając swoją opinię w formie hipotezy nie podpada pod zarzut błędu.

Te niebezpieczeństwa, jakie kryje w sobie logika, mogłyby skłonić niejednego do szukania w intuicji broni przeciw błędom. Niestety intuicja sama staje się źródłem nowych błędów. Psychologia typów matematycznych uczy, że intuicjoniści najczęściej opierają się na tzw. oglądzie przestrzennym. Pomijam już to, że trudno np. podać intuicjoniście dowód na twierdzenie, że prosta dzieli płaszczyznę na dwie części, bo dla niego to twierdzenie jest pewniejsze od wszelkich dowodzeń i stąd się bierze, że udowodnił je dopiero Pasch w r. 1882 — ale ogląd przestrzenny może się stać sam źródłem błędnych mniemań, jak to było np. przed Weierstrassem, kiedy sądzono, że funkcja ciągła nie może być wszędzie pozbawiona pochodnej, opierając się na intuicyjnym obrazie krzywej ciągłej.

Doświadczenie uczy, że intuicjoniści mylą się mniej niż logicy, a większość ich błędów leży w dowodach, nie w twierdzeniach. Najtrudniej intuicjonistom o zupełne dysjunkcje logiczne. Bo dysjunkcja polega w matematyce najczęściej na rozróżnieniu dwóch wypadków: przedmiot P ma cechę C lub nie ma cechy C. Intuicjonista ma zawsze pod ręką obraz geometryczny odpowiadający pierwszemu wypadkowi, tj. temu, w którym przedmiot P ma cechę C, trudno mu natomiast zobaczyć obraz drugiego wypadku, negatywnego, i dlatego stara się sprowadzić dysjunkcję do następującego wzoru: P ma cechę C, albo D, albo E, albo F itp., a kiedy wyczerpał wszystkie wykluczające się wzajemnie cechy, które dadzą się *zobaczyć* jako możliwe atrybuty przedmiotu P, zdaje mu się, że wyczerpał wszystkie, które można *pomyśleć* jako atrybuty P. Typowym przykładem błędów popełnianych przez intuicjonistów jest zdanie Eulera, że w każdym wielościanie zachodzi związek $K+2 = S+N$, jeżeli K, S, N oznaczają odpowiednio liczbę krawędzi, ścian i naroży wielościanu. Rozumowanie, które go do tego przywiodło, nie uwzględniało, że między pojęciem „wielościan" a obrazem przestrzennym (takim jaki widział Euler) jest różnica, bo wielościan nie musi być jednospójny (taki jak sześcian), lecz może być wielospójny (jak rama obrazu). Rozumując na zwykłym geometrycznym jednospójnym modelu myślowym zwęził Euler mimowiednie zakres pojęcia „wielościan".

Zwróćmy się do drugiej kategorii błędów, tj. do tych, które pochodzą z błędnego twierdzenia pomocniczego, które wzięto gotowe skądinąd. O ile to twierdzenie pomocnicze jest własne, to właściwie rzecz sprowadza się do wypadków już omówionych, o ile jednak chodzi o twierdzenie cudze, to otwierają się nowe możliwości nieporozumień, zwłaszcza takich,

w których twierdzenie pomocnicze jest w oryginale prawdziwe, później jednak jest źle zacytowane lub też źle zrozumiane. Bardzo rzadko zdarza się wypadek użycia twierdzenia błędnego, a to dlatego, że łatwiej widzieć źdźbło w oku bliźniego, niż belkę we własnym, i że te skłonności umysłowe lub też przypadkowe okoliczności, które przywiodły do błędu jednego, nie powtarzają się u drugiego, nieraz jednak drobna usterka w cudzym twierdzeniu może się stać przyczyną błędu. Toteż jest przyjęte powszechnie, że nie wolno posługiwać się twierdzeniami, na które dowodów się nie zna i polegać na autorytecie. Może kiedyś nauka stanie tak wysoko, że ta kontrola stanie się zbyteczna, dziś jednak jest ona potrzebna i dzięki niej pomimo setek błędów organizm nauki jest zdrowy.

Pomówmy jeszcze o tym, jak należy wyszukiwać błędy. W tym celu należy zwracać się do prac pisanych przed Weierstrassem, kiedy posługiwano się metodą geometryczną, lub też do czasów jeszcze dawniejszych, kiedy odkrycia z zakresu rachunku różniczkowego następowały po sobie szybciej niż krystalizowanie się fundamentalnych pojęć i definicji owego rachunku. Lepiej szukać błędów u wielkich matematyków niż u małych, bo ci pierwsi, będąc śmielsi w swoich zamierzeniach naukowych, błądzą nie mniej od drugich, natomiast błędy ich są znacznie ciekawsze i bardziej pouczające. Mniejsi matematycy popełniają błędy wskutek pośpiechu, zwłaszcza kiedy im chodzi o cele nienaukowe, jak o pierwszeństwo, o nagrody lub tytuły naukowe. Przykładem są tu prace pisane dla nagrody w związku z wielkim twierdzeniem Fermata. Jedno z niemieckich czasopism omawia te prace stale i wynajduje w nich błędy. W łatwiejszych wypadkach można posługiwać się pewnymi, że tak powiem domowymi środkami dla wykrycia błędów. Jeden, to podstawić w twierdzeniu ogólnym szczegółowe dane, tj. badać czy sprawdza się ono w przypadku szczególnym i to możliwie prostym. Drugi, to skontrolować, czy tych wszystkich danych, które są w założeniach, i bez których twierdzenie jest prawdziwe, użyto do dowodu.

Szukanie błędów nie powinno być uważane za objaw złośliwości. Przede wszystkim błąd, jak widzieliśmy, jest taki trudny do uniknięcia, że najwięksi matematycy błądzili, więc nie jest hańbą popełnić błąd. Po wtóre, przy rugowaniu błędów oddaje się przysługę nauce. Ale jest jeszcze jedna przyczyna, dla której warto założyć kolekcję błędów matematycznych, jeżeli chce się uczyć matematyki. Oto dlatego, że taka kolekcja stanowi jeden z najznakomitszych środków pomocniczych do nauczania. Student, któremu dano za zadanie znaleźć błąd w tej lub owej rozprawie, zapewniwszy go, że błąd tam jest, wykonuje pracę samodzielną, która daje niemałą dozę satysfakcji, a równocześnie ma pewność, że jeżeli przejdzie krok za krokiem cały łańcuch dowodzeń musi znaleźć pęknięte ogniwo. Nie żąda się od niego wynalazczości, a uzyskuje się gwarancję, że rzecz przeczytaną doskonale zrozumiał i zgłębił. Następne,

trudniejsze ćwiczenie polega na tym, ażeby błąd naprawić. O ile błąd polega tylko na przeoczeniu autora i ma charakter nieistotny, to i to zadanie da się rozwiązać. Trzecie ćwiczenie, to konstrukcja tzw. przeciwprzykładu na błędne twierdzenia. Przeciwprzykład jest to przedmiot matematyczny, który ma wszystkie własności wypowiedziane w założeniu, a nie posiada własności wypowiedzianych w twierdzeniu. Jest on najbardziej bijącym w oczy dowodem, że twierdzenie jest fałszywe.

Poruszymy jeszcze dwie kwestie: pierwsza, czy nie ma racji Vaihinger, który przypisuje w swojej *Philosophie des Als Ob* błędom znaczenie najbardziej twórczych pierwiastków nauki i daje za przykład rozwój rachunku różniczkowego z pojęcia nieskończonostki, która jest pojęciem sprzecznym. Druga kwestia, czy wolno mówić o błędach tam, gdzie cała epoka pozbawiona jest pewnych zasadniczych pojęć i kryteriów.

Na pierwszą kwestię dał odpowiedź prof. Sleszyński w swoim odczycie o filozofii Vaihingera, mianym w Towarzystwie Filozoficznym w Krakowie. Odpowiedź wypadła przecząco. Na przykładzie nieskończonostki wykazał prof. Sleszyński, że o ile operowano tym pojęciem tak, jakby to była pochodna $f'(x)$, to oczywiście dochodzono do rezultatów poprawnych, jakkolwiek wysłowienie było błędne, gdy zaś operowano sprzecznym pojęciem liczby, która jest mniejsza od każdej dodatniej a nie jest zerem, dochodzono do rezultatów błędnych.

Na zagadnienie drugie proponuję następującą odpowiedź: niedostatki w dowodach wspólne całej epoce należy tolerować, o ile dowody te pomimo to prowadzą do prawdziwych twierdzeń; podobnie i nieścisłości w wypowiedzeniu twierdzeń należy wybaczyć, o ile one są cechą epoki; jedne i drugie jednak pod tym warunkiem, ażeby każdy dzisiejszy matematyk mógł te braki bez trudu usunąć i luki wypełnić. Miejmy nadzieję, że za tę pobłażliwość stosowaną wobec przeszłych wieków przyszłe zechcą się nam tak samo odwdzięczyć, bo i nasza epoka nie jest bez winy.

Jak unikać błędów?

Przede wszystkim publikować bez pośpiechu i wyłącznie w dziedzinach, które się zna od podstaw. Po wtóre dowody przygotowywać na piśmie, bo w tej formie najłatwiej poddać je dokładnej analizie. Następnie należy dążyć do zupełności, pozwalając sobie na skoki tylko tam, gdzie opieramy się na lematach powszechnie znanych i przez wielu matematyków niezależnie udowodnionych. Dowody tych lematów trzeba sobie w danej chwili umieć uprzytomnić. Unikać lematów nieudowodnionych, choćby były pozornie najjaśniejsze i najmniej wątpliwości budzące. Zdawać sobie zawsze sprawę z definicji pojęć wprowadzanych; nie używać w dowodzie żadnych własności pojęć, prócz tych, które są wypowiedziane w definicji. Opierać dowody na aksjomatach i to tylko na aksjomatach wyraźnie w podstawach teorii sformułowanych. Kontrolować twierdzenie przez wyprowadzenie z niego konsekwencji i zastosowań w dziedzi-

nach już znanych i starać się o możliwe uproszczenie dowodu. W końcu poddawać dowód, przed publikacją, krytyce wytrawnych matematyków.

Czasem można interpretować twierdzenia geometrycznie lub mechanicznie i wtedy błąd ukryty w formułach rzuca się w oczy. Czasem znowu podstawienie szczególnych przedmiotów w ogólnych teorematach wykazuje ich błędność. Ale jest jeden sposób niezawodny: podawanie na piśmie kompletnych dowodów à la Russell lub Peano, to znaczy z użyciem symboliki. Jest to tak radykalne lekarstwo, że jak niektórzy (Poincaré) twierdzą, leczy i zabija matematykę. Uprawianie matematyki staje się zajęciem tak żmudnym, że niemal niemożliwym. A ponadto symbolizm staje się źródłem nowych błędów: pomyłek w symbolach, tak jak każdy instrument naukowy jest źródłem nowych błędów instrumentalnych. Dlatego należy zachować miarę w krytycyzmie i stosować symbolikę tylko tam, gdzie podejrzewa się, że bez niej wystąpią przeoczenia. Innymi słowy: przy całej finezji zdrowy rozsądek jest rzeczą nie do pogardzenia, także i w nauce.