ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XI (1969)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1, Skrytka Pocztowa 137. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

191. Niech $t(n)$ będzie n-tą liczbą trójkątną, czyli $t(n) = n(n+1)/2$; dowieść, że jeśli k, g są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $1 \leqslant k < g$ i liczby całkowite a, b są określone przez warunki

$$t(2kg) = g^2 a + b, \quad 0 \leqslant b < g^2,$$

to zachodzi wzór

$$t(2kg^n) = (\bar{a}\underbrace{00\ldots0}_{n-1}\bar{b}\underbrace{00\ldots0}_{n-1})_g,$$

gdzie $\bar{a}, \bar{b}$ oznaczają ciągi cyfr rozwinięć liczb a, b przy zasadzie g, odpowiednio (1).

W. Mnich (Opole)

192. Dowieść, że dla wszystkich liczb parzystych dodatnich n i tylko dla nich istnieją n-punktowe przestrzenie metryczne, w których każdy podzbiór $(n-1)$-punktowy jest kulą.

W. Holsztyński (Warszawa)

193. Przestrzeń metryczną X nazywamy *iniektywną*, jeśli dla dowolnej nadprzestrzeni metrycznej Y przestrzeni X istnieje retrakcja $r\colon Y \to X$ taka, że $\varrho(r(y), r(y')) \leqslant \varrho(y, y')$ dla dowolnych punktów $y, y' \in Y$, gdzie ϱ jest metryką w Y. Dowieść, że każda 3-punktowa, ale nie każda 4-punktowa przestrzeń metryczna zawiera się w pewnej przestrzeni metrycznej iniektywnej, będącej wielościanem 1-wymiarowym (2).

W. Holsztyński (Warszawa)

---

(1) W. Sierpiński, *Liczby trójkątne*, Warszawa 1962.

(2) J. R. Isbell, *Six theorems about injective metric spaces*, Comment. Math. Helv. 39 (1964), str. 65–76.

194. Podać przykład przestrzeni topologicznej X zawierającej okrąg S^1 i takiej, że nie istnieje retrakcja X na S^1, ale istnieje odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to S^1$, dla którego $f|S^1$ nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.

W. Holsztyński (Warszawa)

195. Podać przykład dwóch homeomorficznych podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej, będących sumami skończonych rodzin linii prostych, ale takich, że nie istnieje homeomorfizm przeprowadzający linie proste jednej z tych przestrzeni w linie proste drugiej z nich. Dowieść, że każde homeomorficzne przestrzenie tego typu są sumami równolicznych rodzin linii prostych.

W. Holsztyński (Warszawa)

196. Przestrzeń metryczną U nazywamy *uniwersalną* dla klasy przestrzeni metrycznych $\boldsymbol{C}$, jeśli U zawiera obraz izometryczny każdej przestrzeni z klasy $\boldsymbol{C}$. Przestrzeń uniwersalną U nazywamy przy tym *minimalną*, jeśli każda inna przestrzeń U' uniwersalna dla $\boldsymbol{C}$ zawiera obraz izometryczny przestrzeni U. Dowieść, że nie istnieje minimalna przestrzeń uniwersalna dla żadnej klasy przestrzeni metrycznych ograniczonych, zawierającej przestrzenie o dowolnie wielkich średnicach.

W. Holsztyński (Warszawa)

197. Odwzorowanie ciągłe przestrzeni topologicznych $f\colon X \to Y$ nazywamy *uniwersalnym*, jeśli dla dowolnego odwzorowania ciągłego $g\colon X \to Y$ istnieje takie $x \in X$, że $f(x) = g(x)$. Przestrzeń U nazywamy *obrazem uniwersalnym* dla klasy przestrzeni topologicznych $\boldsymbol{C}$, jeśli każde odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to U$ przekształcające przestrzeń $X \in \boldsymbol{C}$ na przestrzeń U jest uniwersalne. Dowieść, że spośród wielościanów spójnych jedynie przestrzeń jednopunktowa i odcinek są obrazami uniwersalnymi dla klasy wszystkich wielościanów spójnych.

W. Holsztyński (Warszawa)

198. Dowieść, że zbiór płaski

$$\{(x, y)\colon 0 < x < 1/\pi,\ y = \sin 1/x\} \cup \{(x, y)\colon x = 0,\ -1 \leqslant y \leqslant 2\} \cup$$
$$\cup \{(x, y)\colon 0 < x < 1/\pi,\ y = 2\} \cup \{(x, y)\colon x = 1/\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$$

nie jest obrazem uniwersalnym ([3]) dla klasy wszystkich przestrzeni zwartych spójnych.

W. Holsztyński (Warszawa)

([3]) Zob. zadanie 197.

199. Niech I będzie domkniętym odcinkiem jednostkowym linii prostej. Oznaczmy przez F zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych ograniczonych na $I\times I$, ciągłych ze względu na każdą zmienną z osobna; niech

$$\varrho(f,g)=\sup\{|f(x,y)-g(x,y)|: x,y\in I\}$$

dla $f,g\in F$. Pokazać, że F z odległością ϱ jest przestrzenią metryczną nieośrodkową.

Z. Semadeni (Warszawa)

200. Dowieść, że jeśli przestrzeń topologiczna Y zawiera łuk pq o końcach w punktach p i q, taki że część wspólna łuku pq i domknięcia zbioru $Y\setminus pq$ jest zbiorem jednopunktowym $\{p\}$, to każda rodzina F odwzorowań ciągłych przekształcających odcinek I na Y, taka że $f(t)\neq g(t)$ dla $t\in I$ oraz $f,g\in F$, $f\neq g$, jest co najwyżej przeliczalna ([4]).

A. Lelek (Warszawa)

Rozwiązania zadań

70. *Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą dodatnią z okresem* 1, *to*

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}\geqslant 1.$$

W. I. Arnold (Moskwa)

Niech K oznacza klasę wszystkich funkcji ciągłych dodatnich z okresem 1 oraz niech

$$\varphi(f;a)=\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}$$

dla $f\in K$, $-\infty<a<+\infty$. Mamy $\varphi(f;\cdot)\in K$ oraz $\varphi(f;a)=1$ dla a całkowitych; ponadto

$$\varphi(f;a)=\int_a^{1+a}\frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}=\int_0^1\frac{f(t+a)\,dt}{f(t+2a)},$$

skąd stosując nierówność Schwarza dla całek otrzymujemy

$$\varphi(f;a)=\sqrt{\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}}\cdot\sqrt{\int_0^1\frac{f(x+a)\,dx}{f(x+2a)}}\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+a)}}\cdot\frac{\sqrt{f(x+a)}}{\sqrt{f(x+2a)}}\,dx=\varphi(\sqrt{f};2a),$$

([4]) A. Lelek, *Disjoint mappings and the span of spaces*, Fund. Math. 55 (1964), str. 199–214.