wmptm 1897

199. Niech I będzie domkniętym odcinkiem jednostkowym linii prostej. Oznaczmy przez F zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych ograniczonych na $I\times I$, ciągłych ze względu na każdą zmienną z osobna; niech

$$\varrho(f,g)=\sup\{|f(x,y)-g(x,y)|: x,y\in I\}$$

dla $f,g\in F$. Pokazać, że F z odległością ϱ jest przestrzenią metryczną nieośrodkową.

Z. Semadeni (Warszawa)

200. Dowieść, że jeśli przestrzeń topologiczna Y zawiera łuk pq o końcach w punktach p i q, taki że część wspólna łuku pq i domknięcia zbioru $Y\setminus pq$ jest zbiorem jednopunktowym $\{p\}$, to każda rodzina F odwzorowań ciągłych przekształcających odcinek I na Y, taka że $f(t)\neq g(t)$ dla $t\in I$ oraz $f,g\in F$, $f\neq g$, jest co najwyżej przeliczalna ([4]).

A. Lelek (Warszawa)

Rozwiązania zadań

70. *Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą dodatnią z okresem* 1, *to*

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}\geqslant 1.$$

W. I. Arnold (Moskwa)

Niech K oznacza klasę wszystkich funkcji ciągłych dodatnich z okresem 1 oraz niech

$$\varphi(f;a)=\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}$$

dla $f\in K$, $-\infty<a<+\infty$. Mamy $\varphi(f;\cdot)\in K$ oraz $\varphi(f;a)=1$ dla a całkowitych; ponadto

$$\varphi(f;a)=\int_a^{1+a}\frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}=\int_0^1\frac{f(t+a)\,dt}{f(t+2a)},$$

skąd stosując nierówność Schwarza dla całek otrzymujemy

$$\varphi(f;a)=\sqrt{\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{f(x+a)}}\cdot\sqrt{\int_0^1\frac{f(x+a)\,dx}{f(x+2a)}}\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+a)}}\cdot\frac{\sqrt{f(x+a)}}{\sqrt{f(x+2a)}}\,dx=\varphi(\sqrt{f};2a),$$

([4]) A. Lelek, *Disjoint mappings and the span of spaces*, Fund. Math. 55 (1964), str. 199–214.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ponieważ $f \in K$ pociąga $f^{2^{-n}} \in K$. Przez indukcję wynika stąd nierówność

$$\varphi(f; a) \geqslant \varphi(f^{2^{-n}}; 2^n a)$$

dla $n = 0, 1, \ldots$ Podstawiając w niej $a = k \cdot 2^{-n}$ dla $\pm k = 0, 1, \ldots$ dostajemy

$$\varphi(f; k \cdot 2^{-n}) \geqslant \varphi(f^{2^{-n}}; k) = 1,$$

tzn. żądana nierówność $\varphi(f; a) \geqslant 1$ zachodzi dla a dwójkowo wymiernych. Z ciągłości funkcji $\varphi(f; \cdot)$ wynika, że zachodzi ona dla wszystkich a.

A. Birkholc (Warszawa)

151*. *Znaleźć granicę* [5] *ciągu liczb*

$$\prod_{k=1}^{n^2} \cos \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{n} \varphi.$$

R. Krasnodębski (Wrocław)

Oznaczmy

$$f_n(\varphi) = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a_k}{\sqrt{n}} \varphi,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots$ jest ciągiem liczbowym. Jeśli przyjmiemy $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, to $f_{n^2}(\varphi)$ jest ciągiem występującym w zadaniu.

Wykażemy, iż zbieżność $a_n \to 0$ pociąga zbieżność $f_n(\varphi) \to 1$ dla dowolnej liczby zespolonej φ, przy czym zbieżność ta jest niemal jednostajna w całej płaszczyźnie zespolonej. Rzeczywiście, z ciągłości funkcji $(\cos z - 1) z^{-2}$ wynika istnienie stałej C takiej, że

$$|\cos z - 1| \leqslant C |z|^2$$

dla $|z| \leqslant 1$. Niech $r > 0$ będzie daną liczbą oraz $a = \sup_n |a_n|$. Jeśli $|\varphi| \leqslant r$ oraz $n > (ar)^2$, to

$$\left| \frac{a_k}{\sqrt{n}} \varphi \right| \leqslant \frac{|a_k|}{\sqrt{n}} r \leqslant \frac{ar}{\sqrt{n}} < 1$$

dla $k = 1, 2, \ldots$ Ponieważ zawsze zachodzi nierówność

$$\left| \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k) - 1 \right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + |z_k|) - 1,$$

więc w szczególności dostajemy oszacowanie

$$|f_n(\varphi) - 1| = \left| \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \left(\cos \frac{a_k}{\sqrt{n}} \varphi - 1 \right) \right] - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left| \cos \frac{a_k}{\sqrt{n}} \varphi - 1 \right| \right) - 1 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + C \frac{r^2 |a_k|^2}{n} \right) - 1 \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \exp \left(C r^2 \frac{|a_k|^2}{n} \right) - 1 = \exp \left(C r^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) - 1.$$

---

[5] Inne rozwiązanie tego zadania podane jest w artykule Z. K. Charzyńskiego na str. 1–4.

Ale zbieżność $a_n \to 0$ implikuje zbieżność

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \to 0,$$

z której na mocy powyższego oszacowania otrzymujemy żądaną zbieżność $|f_n(\varphi)-1| \to 0$.

A. Birkholc (Warszawa)