Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

teorię działań nieskończonych wraz z zastosowaniami do topologii, a także teorii reprezentacji struktur. Rozdział ten zawiera także definicję iloczynu zredukowanego (ultraproduktu) — patrz list autorów, punkty 1, 2, 3. Rozdział V zawiera klasyczną teorię mocy i jest prawie niezmieniony, podobnie jak rozdział VI zawierający teori zbiorów (liniowo) uporządkowanych. W rozdziale VII rozwijana jest teoria dobrego porządku. Ta część została poważnie rozszerzona, w szczególności paragraf o definicjach przez indukcję pozaskończoną. Znajdują się tu też dowody równoważników pewnika wyboru, które najczęściej stosowane są we współczesnej matematyce — twierdzenia Zermelo i lematu Kuratowskiego–Zorna. Rozdział VIII poświęcony jest dalszym działom teorii mocy, zawiera też szereg praw arytmetyki liczb kardynalnych równoważnych aksjomatowi wyboru. Rozdział IX zajmuje się badaniem tzw. liczb nieosiągalnych, ich klasyfikacją, a także (uogólnioną) hipotezą continuum. Warto może zwrócić uwagę czytelnika na zamieszczony wynik Tarskiego o niemierzalności pierwszego alefu nieosiągalnego, a także wersję uproszczoną przez Speckera pochodzącego od Sierpińskiego dowodu twierdzenia, że z uogólnionej hipotezy continuum wynika pewnik wyboru. Na koniec skonstruowane są uniwersalne porządki liniowe; zbiory η_ξ Hausdorffa. Ostatni rozdział X zawiera teorię zbiorów analitycznych i rzutowych, która w poprzednim wydaniu była pominięta. Ta być może starsza teoria zyskała dziś poważnie na znaczeniu ze względu na znaczne usługi, jakie oddaje w badaniach matematycznych.

Recenzowana książka jest najpełniejszą ze znanych recenzentowi monografii z zakresu teorii mnogości. Stosunkowo wiele miejsca poświęcono w niej aparatowi współczesnej topologii mnogościowej. Z drugiej strony książka przygotowuje do badań w zakresie podstaw matematyki. To swoiste rozdwojenie związane jest bez wątpienia z zasadniczymi zainteresowaniami autorów.

Słabą stroną książki jest brak bibliografii, wspomniane już odstąpienie od dyskusji związków pomiędzy aksjomatami, a także pominięcie aksjomatu regularności w systemie. Jak bowiem wiadomo, aksjomat typu relacyjnego (VIII aksjomat systemu autorów) daje się wyeliminować tzw. metodą Russela–Scotta przy użyciu aksjomatu regularności. Aksjomat ten ma także zastosowanie w szeregu innych dowodów.

Uwagi historyczne (str. 62–63) nie wyrabiają wystarczająco poglądu na inne aksjomatyki, w szczególności na często przyjmowaną aksjomatykę von Neumanna–Bernaysa–Gödla.

Książka zawiera niestety kilka nieścisłości (patrz list autorów), jednakże jest troskliwie opracowana i może służyć jako podręcznik dla studentów starszych lat matematyki. Ćwiczenia są różnej trudności, od prostych do niebanalnych.

Przy pierwszym czytaniu można pominąć rozdziały III, VIII, IX i X.

Wiktor Marek

Karol Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne, tom 44, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967, str. 251, cena zł 108.—

Autor recenzowanej książki jest jednocześnie twórcą teorii retraktów, która stanowi już dzisiaj odrębny dział topologii, posługujący się metodami zarówno topologii ogólnej, jak algebraicznej i geometrycznej. Ta ostatnia, zajmująca się przede wszystkim badaniem budowy topologicznej przestrzeni euklidesowych, rozwinęła się dopiero w ostatnim 15-leciu, ale idee geometryczne inspirowały topologów od początku. Podobnie było z teorią retraktów: pojęcie retraktu wprowadza Borsuk

w swej tezie doktorskiej, ogłoszonej w 1931 r., a w rok później definiuje klasę retraktów absolutnych otoczeniowych, będących uogólnieniem wielościanów. Jego obecna monografia obejmuje 35 lat rozwoju teorii; bibliografia podana na końcu książki zawiera 300 numerów. Nie licząc książek Kuratowskiego i Lefschetza, które miały rozdziały poświęcone teorii retraktów, nie była ona dotąd wyłożona w jednym dziele w formie ułatwiającej studiowanie i dostarczającej informacji o kierunkach, wynikach i zagadnieniach teorii. Monografia *Theory of retracts* spełnia tę rolę. Prawie równocześnie ukazała się nakładem Wayne State University Press z Detroit książka S.-T. Hu pod tym samym tytułem. Ma ona jednak bardziej charakter podręcznika i nie zajmuje się wieloma aspektami teorii retraktów, chociaż pod pewnym względem może stanowić uzupełnienie monografii Borsuka, np. w niektórych zastosowaniach metod topologii algebraicznej.

Rozdział I monografii Borsuka wprowadza podstawowe pojęcia r-przekształceń, r-typów oraz retrakcji i retraktów. Autor od razu rzuca idee klasyfikacji przestrzeni topologicznych z punktu widzenia teorii retraktów, co powoduje, że nawet wytrawny matematyk na pierwszych stronicach książki znajdzie materiał do przemyśleń. Dość wspomnieć, że już na str. 17 pojawia się pierwszy otwarty problemat teorii (jest ich w książce dokładnie 50), dotyczący mnożenia kartezjańskiego tzw. r-nierówności. Poza tym w Rozdziale I wprowadzone są pojęcia: przestrzeni funkcyjnych, klas homotopii, retraktów deformacyjnych, dominacji homotopijnej w sensie Whiteheada, lokalnej ściągalności i lokalnej n-spójności.

Rozdział II zawiera wykład topologii algebraicznej, przede wszystkim grup homologii Vietorisa, grup homotopii z twierdzeniem Hurewicza i grup kohomotopii Borsuka–Spaniera. Istotną rolę gra tutaj pojęcie połączenia („join") homotopijnego dwóch przekształceń, pozwalające na zdefiniowanie operacji grupowych w pewnych rodzinach klas homotopii przekształceń. Tam, gdzie operacje te nie dają się określić, można używać ogólniejszego pojęcia zależności homotopijnej przekształceń, również pochodzącego od Borsuka. Rozdział III natomiast daje przegląd klasycznego materiału dotyczącego wielościanów, CW-kompleksów Whiteheada i nerwów pokryć, łącznie z uogólnieniami Dugundjiego twierdzeń Tietzego i Kuratowskiego o przedłużaniu funkcji ciągłych mających wartości w przestrzeniach liniowych lokalnie wypukłych lub w przestrzeniach metrycznych lokalnie spójnych do wymiaru n.

Rozdziały IV i V rozwijają teorię retraktów absolutnych i retraktów absolutnych otoczeniowych w klasach przestrzeni metrycznych i przestrzeni metrycznych zwartych. Należą tutaj między innymi twierdzenia Hannera o podzbiorach otwartych, różne charakteryzacje retraktów absolutnych, twierdzenie Smale'a o obrazach ANR-ów, czyli zwartych retraktów absolutnych otoczeniowych, oraz ostatnie wyniki Borsuka i Binga dotyczące rodzin zbiorów n-wymiarowych w ANR-ach n-wymiarowych. Jest też szczegółowo rozpatrzony przypadek podzbiorów płaszczyzny. Czytelnik może zapoznać się tutaj również z konstrukcją przestrzeni metrycznej zwartej nieskończenie wymiarowej, która będąc lokalnie ściągalną nie jest ANR-em.

Rozdziały VI i VII poświęcone są pewnym paradoksalnym zjawiskom występującym w teorii retraktów i warunkom, których przyjęcie gwarantuje usunięcie tych osobliwości. Autor wyróżnia 4 rodzaje osobliwości, nazywając je nazwiskami Aleksandrowa, Brouwera, Mazurkiewicza i Peany. Warunek (Δ) wprowadza się właśnie w celu wyeliminowania osobliwości Peany. Przestrzenie spełniające ten warunek mają znacznie regularniejszą budowę topologiczną, np. można wykazać, że dla ANR-ów z warunkiem (Δ) wszystkie wymiary homologiczne są równe. Znany przykład Pontriagina pokazuje, iż warunku (Δ) nie można tutaj pominąć. Zagadnienie zgodności wymiarów homologicznych dla dowolnych ANR-ów pozostaje, jak dotychczas, nierozstrzygnięte.

Rozdział VIII zajmuje się r-klasyfikacją przestrzeni, wprowadzoną na początku

książki. Jest on najkrótszy, ale zawiera najwięcej przykładów. Wiele spośród nich dotyczy pojęcia tzw. r-sąsiadów, które w r-klasyfikacji przestrzeni stanowią naturalny odpowiednik liczb całkowitych sąsiednich w uporządkowaniu według wielkości. Prowadzi to dalej do pojęcia r-bliskości, ustalającego niejako odległość budowy topologicznej jednej przestrzeni od budowy topologicznej innej przestrzeni. Rozdział IX, ostatni, daje przegląd różnych pozostałych rezultatów i problematów z zakresu teorii retraktów. Autor zgrupował tutaj w 16 paragrafach obfitość wyników, pojęć pokrewnych, zagadnień i idei. Widać, jak żywą pozostaje nadal ta teoria oraz jak dalekie i głębokie są wzajemne wpływy i przenikanie się jej z innymi dziedzinami matematyki.

Andrzej Lelek

Marek Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, wydanie trzecie poprawione i rozszerzone, Biblioteka Matematyczna, tom 18, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967, str. 694, cena zł 70.—

Autor postawił sobie trudny cel. Dać systematyczne wprowadzenie do nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, przedstawić zarys wielu spośród możliwych zastosowań tych teorii wraz z konkretnymi przykładami. Czyni to podając liczne odsyłacze do innych książek i prac, zwykle wraz z krótkim omówieniem ich treści. Omawiana książka jest w tej chwili najobszerniejszym dziełem w języku polskim zawierającym wiadomości z dziedziny tak obszernej. Podkreślić należy, że obecnie zagadnieniom poruszanym w poszczególnych rozdziałach omawianej książki poświęcone są monografie o dużej objętości.

Dzieło to jest trzecim, poprawionym i rozszerzonym wydaniem książki [1], która pierwotnie ukazała się po polsku w 1954 roku w objętości 374 stron, z kolei w 1958 roku, jednocześnie z przekładem niemieckim, w objętości 530 stron, i wreszcie w 1967 roku w objętości 694 stron. Przekład angielski wydania trzeciego ukazał się wcześniej w 1963 roku w USA, w objętości 694 stron.

Jest interesujące prześledzić różnice między kolejnymi wydaniami. I tak, systematycznie zwiększała się lista prac cytowanych: 67 pozycji w pierwszym wydaniu, 202 pozycje w wydaniu drugim, 688 pozycji w wydaniu trzecim. To zwiększenie informacji bibliograficznej jest pierwszą rzucającą się w oczy nowością w trzecim wydaniu. Zasadniczy zrąb książki pozostał ten sam. Pozostało nadal 17 rozdziałów, podobnie jak w wydaniu drugim, a nawet spis paragrafów poza kilku uzupełnieniami jest ten sam. Uzupełnienia te, to dodanie w rozdziale drugim (o zmiennych losowych) i w rozdziale 6 (o twierdzeniach granicznych) paragrafów z uwagami końcowymi zawierającymi wskazówki bibliograficzne do dalszych studiów, a w rozdziale 8 (o procesach statystycznych) paragrafu o martyngałach i w rozdziale 16 (o ogólnej teorii testów) paragrafu o mocy i zgodności testów nieparametrycznych. Zwięzłymi omówieniami literatury uzupełniono ponadto wiele paragrafów starych.

Istotną natomiast nowością jest uzupełnienie wszystkich rozdziałów ogółem 329 „zadaniami i uzupełnieniami". Są one przede wszystkim zbiorem ćwiczeń, choć niektóre stanowią uzupełnienie treści rozdziału związanymi z nim wynikami z literatury. Dziewięciostronicowy dodatek na końcu książki zbiera pewną ilość definicji

---

[1] Porównaj Wiadomości Matematyczne 1 (1956), str. 277–280 i 3 (1959), str. 185–188.