wmptm 1897

i twierdzeń z abstrakcyjnej teorii miary, używanych w niektórych partiach głównego tekstu.

Do jakiego stopnia omawiana książka jest nowoczesna? Zadanie napisania książki przedstawiającej najnowsze wyniki z tak obszernej i tak burzliwie rozwijającej się dziedziny, jak probabilistyka, jest chyba niewykonalne. Na nowoczesność książki Fisza składa się przede wszystkim konsekwentne ujęcie rachunku prawdopodobieństwa i zagadnień statystycznych. Jednak decyzyjne ujęcie zagadnień statystycznych jest zaledwie wspomniane na końcu książki. Nie omawia się w książce niektórych pojęć z teorii testowania hipotez — wspomnę np. pojęcie testu najściślejszego (most stringent) czy niezmienniczego. Nasuwa się też pytanie, w jakim stopniu książka jest kompletna. Porusza się w książce bardzo wiele tematów. To zapewne sprawia, że brakuje miejsca na dokładniejsze omówienie wielu z nich. Np. rozdział o analizie wariancji jest ciągle bardzo mały, a na omówienie związków analizy wariancji z planowaniem doświadczeń czynnikowych w ogóle nie znaleziono miejsca. Wreszcie wydaje się, że niektóre nowsze wyniki wzmiankowane w książce nie są należycie ocenione i zasymilowane. Za przykład może posłużyć dyskusja najefektywniejszych estymatów w rozdziale 13. Otóż pod koniec § 13.3 wspomina się o pracach badających istnienie i jednoznaczność estymatorów nieobciążonych, między innymi o pracy Lehmanna i Scheffego (2). Potem w § 13.5 omawia się estymatory najefektywniejsze w tym sensie, że osiągnięta jest równość w nierówności Craméra–Rao. Przechodzi się natomiast do porządku nad tym, że równość w nierówności Craméra–Rao nie zawsze da się osiągnąć, i że operując pojęciem *zupełności klasy rozkładów prawdopodobieństwa* w pracy (2) można nieraz wykazać, że dany estymator jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji, mimo że nierówność Craméra–Rao pozostaje dla niego ostra. Dlatego np. zadanie przy końcu przykładu 13.5.4, stwierdzające, że prawa strona nierówności Craméra–Rao podaje „minimalną wartość regularnego i nieobciążonego estymatora parametru σ" brzmi jak nieporozumienie, bo z argumentu zupełności wnioskuje się, że estymator (13.5.27) ma minimalną wariancję, gdyż jest jedynym nieobciążonym estymatorem opartym o dostateczną statystykę (13.5.21).

Książka Fisza jest poważnym i obszernym wykładem rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Jest książką o zacięciu teoretycznym, w której przykłady zastosowań eksponuje się raczej jako ilustrację możliwości stwarzanych przez teorię niż jako motywację uzasadniającą trud zbudowania teorii. Jest też przewodnikiem po literaturze. Zaopatrzona w obszerny zbiór zadań w swym trzecim wydaniu stała się bardziej przydatna jako podręcznik akademicki. Jako kodyfikacja obszernego materiału jest dziełem cennym i godnym konkurentem podobnych dzieł w literaturze światowej. Aczkolwiek nowe ujęcie niektórych tematów w niej poruszanych wydaje się pożądane, będzie ona długo jeszcze cennym źródłem wiedzy dla studiujących przedmioty wymienione w jej tytule.

Stefan Zubrzycki

Roman Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, Biblioteka Matematyczna, tom 28, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967, str. 462, cena zł 55.—

Książka stanowi pierwszy w polskiej literaturze matematycznej, nowoczesny, a zarazem precyzyjny wykład rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu

(2) E. L. Lehmann and H. Scheffe, *Completeness, similar regions and unbiased estimation*, Part I, Sankhya 10 (1950), str. 305–340.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

zmiennych. Na szczególne podkreślenie zasługuje to, że przedstawiono w niej subtelne zagadnienia rachunku całkowego na powierzchniach w sposób wolny od nieścisłości występujących w każdym tradycyjnym wykładzie, dostatecznie ogólny (w n wymiarach) i w zasadzie dostępny dla studentów II roku matematyki.

Książka została opracowana na podstawie wykładów tzw. „Analizy Matematycznej II", które autor prowadził na Uniwersytecie Warszawskim. Jest pomyślana, przede wszystkim, dla studentów matematyki i wyczerpuje materiał tego wykładu przewidziany programem ramowym Ministerstwa. Jest ona cenną pomocą dla każdego wykładowcy analizy matematycznej bez względu na to, czy prowadzi wykład zgodny z koncepcją autora, czy też tradycyjny i może być użyteczna dla matematyków nie zajmujących się analizą. Książkę mogą czytać również niematematycy znający podstawowe fakty z rachunku różniczkowego jednej zmiennej (inne potrzebne fakty podane są w części wstępnej) i odznaczający się pewną kulturą matematyczną.

Książka składa się z 10 rozdziałów: I. Podstawowe pojęcia mnogościowe. II. Podstawowe pojęcia geometryczne i algebraiczne. III. Podstawowe pojęcia topologiczne. IV. Różniczkowanie funkcji rzeczywistych wielu zmiennych. V. Teoria odwzorowań. VI. Teoria miary. VII. Ogólna teoria całki. VIII. Całka w przestrzeni euklidesowej. IX. Całki na hiperpowierzchniach i bryłach. X. Informacje uzupełniające.

Trzy pierwsze rozdziały zawierają wiadomości wstępne z zakresu teorii mnogości, algebry i topologii i łącznie z przedmową obejmują 118 stron, tj. więcej niż czwartą część objętości książki. Najbardziej rozbudowany jest rozdział II poświęcony algebrze: położono przy tym szczególny nacisk na rachunek macierzy wielowskaźnikowych, m. in. na teorię macierzy skośnie symetrycznych. Teoria odwzorowań wieloliniowych i jej związki z rachunkiem macierzy potraktowane są bardzo krótko. To ujęcie związane jest z koncepcją wykładu przyjętą przez autora, o której będzie mowa później.

W rozdziale IV przedstawione są podstawowe fakty z rachunku różniczkowego jednej funkcji wielu zmiennych. Wychodzi się tam od pojęcia pochodnej kierunkowej funkcji; pochodne cząstkowe definiuje się jako jej szczególne przypadki. Przez „pochodną funkcji" rozumie się wektor utworzony z pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu danej funkcji; pochodną wyższego rzędu jest macierz wielowskaźnikowa utworzona z pochodnych cząstkowych tego rzędu. Zdefiniowana jest też różniczka w sensie Frécheta jako odwzorowanie liniowe „dobrze aproksymujące" przyrost funkcji, ale nie odgrywa ono żadnej roli w dalszym ciągu wykładu. Udowodnione są podstawowe twierdzenia, takie jak twierdzenie o równości pochodnych cząstkowych „mieszanych" drugiego rzędu, wzór Taylora zapisany w postaci macierzowo-wektorowej, twierdzenia o ekstremach itd. Wprowadzona symbolika jest nieszablonowa, np. $f_{|j}$ oznacza pochodną cząstkową funkcji f względem j-tej zmiennej. Symboliki tej przestrzega się konsekwentnie w całej książce. Wzory wypisane w tradycyjnym znakowaniu podane są tylko w tekście petitowym.

Rozdział V dotyczy rachunku różniczkowego odwzorowań (układów funkcji). Rozróżnia się następujące typy odwzorowań: funkcje o wartościach będących punktami przestrzeni euklidesowej (odwzorowania), funkcje o wartościach wektorowych (pola wektorowe), funkcje o wartościach macierzowych (pola macierzowe), przy czym mogą one być określone bądź na zbiorach punktów, bądź w przestrzeniach wektorowych. W § 1 i 2 przenosi się pojęcia i twierdzenia rozdziału IV na przypadek odwzorowań, na ogół mechanicznie (po współrzędnych). Dalsze paragrafy poświęcone są twierdzeniu o różniczkowaniu superpozycji, teorii lokalnego rozwiązywania (układów) równań (która „żargonowo" nazywa się teorią funkcji uwikłanych), pojęciu odwzorowania regularnego i dyfeomorfizmu, hiperpowierzchniom k-wymiarowym w przestrzeni l-wymiarowej, wreszcie ekstremom funkcji określonych na hiperpowierzchniach ub w otoczeniach hiperpowierzchni (tradycyjnie zwane „ekstremami z warunkami wiążącymi").

Rozdziały VI i VII stanowią przystępny i precyzyjny wykład teorii miary i ogólnej teorii całki. Mogą być one czytane zupełnie niezależnie od reszty książki. Miara Lebesgue'a jest definiowana poprzez twierdzenie Carathéodory'ego o miarach zewnętrznych, a całka wprowadzana etapami: najpierw dla funkcji prostej, później rozszerzona przez monotoniczne przejście do granicy i przez rozkład funkcji mierzalnej na część dodatnią i ujemną.

Rozdział VIII poświęcony jest całkowaniu w przestrzeniach euklidesowych. Tytuły paragrafów pozwalają zorientować się w zakresie materiału: 1. Wstęp. Całki funkcji ciągłych. 2. Twierdzenie Fubiniego. 3. Interpretacja geometryczna całki. 4. Całkowanie przez sprowadzenie do całek iterowanych na odcinkach. 5. Całkowanie przez podstawienie. 7. Splot funkcji. 8. Całka nieoznaczona. Całka niewłaściwa. Na szczególną uwagę zasługuje porządny dowód twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie (w większości podręczników dowód ten jest pominięty lub podawany szkicowo).

Rozdział IX obejmuje blisko sto stron. W § 1 wprowadza się k-wymiarową miarę Lebesgue'a na hiperpowierzchniach regularnych k-wymiarowych jako miarę przeniesioną z obszarów parametrów. W dalszych siedmiu paragrafach wprowadza się i omawia podstawowe obiekty geometryczne, na których zdefiniowane będą całki: komórki (obrazy dyfeomorficzne przedziału domkniętego), bryły (figury posiadające rozkład komórkowy) i łańcuchy. Łańcuch L o nośniku na k-wymiarowej bryle Z określony jest jako pole k-wskaźnikowych macierzy skośnie symetrycznych, które na poszczególnych komórkach pewnego rozkładu komórkowego Z jest krotnością ciągłych pól k-wersorów stycznych. Definiuje się operację brzegu łańcucha i wszystko ilustruje się przykładami i rysunkami. Ponieważ określona w § 1 miara powierzchniowa indukuje miarę na dowolnej bryle, na bryłach określone są więc całki z dowolnych funkcji skalarnych. Przyjęta przez autora definicja łańcucha L pozwala łatwo określić całkę k-wskaźnikowego skośnie symetrycznego pola macierzowego określonego na bryle Z (będącej nośnikiem łańcucha) po łańcuchu L — jako całkę z funkcji rzeczywistej będącej iloczynem skalarnym tego pola z polem L stanowiącym łańcuch. Całka ta jest uogólnieniem całek powierzchniowych i krzywoliniowych, rozpatrywanych w wykładach tradycyjnych. Tak określonym całkom poświęconych jest pozostałych 5 paragrafów. Dowodzi się tam m. in. ogólnego twierdzenia Stokesa o „dualności" operacji różniczkowania i operacji brzegu, a także dyskutuje się zagadnienie niezależności całki od drogi całkowania i podaje informację o k-wymiarowym wariancie tego zagadnienia.

W ostatnim rozdziale omawia się szkicowo, bez dowodów, następujące zagadnienia: a) rachunek różniczkowy i całkowy w przestrzeniach Banacha, b) wiadomości uzupełniające o miarach, w szczególności miary Hausdorffa, c) grupy (przestrzenie liniowe) homologii bryły i zbioru otwartego; twierdzenie de Rhama o reprezentacji całkowej funkcjonałów liniowych na grupach homologii, d) definicja rozmaitości różniczkowalnej i informacja o możliwości przeniesienia teorii całek powierzchniowych na przypadek rozmaitości.

Książka zawiera liczne tematy ćwiczeń — przeważnie o charakterze ilustracyjnym.

Już chociażby z tego krótkiego przeglądu treści widać, że książka Sikorskiego jest dla przeciętnego (tzn. słabego) studenta dość trudna; dotyczy to zwłaszcza rozdziału dziewiątego. Wymaga ona od wykładowcy ścisłej dyscypliny gospodarowania czasem w ciągu całego roku, by móc przejrzyście i porządnie przedstawić zagadnienia całek na powierzchniach. To samo jest zresztą bolączką wykładów tradycyjnych; jeśli nawet na wykładzie starcza czasu na wyłożenie teorii całek powierzchniowych, to brak go na ćwiczeniach na przerobienie materiału ilustrującego. Być może, że jest to winą programu.

Zdaniem recenzenta (zdanie to jest oczywiście subiektywne) usterką oma-

wianej książki jest sama jej koncepcja oparcia rachunku różniczkowego na rachunku macierzy, stanowiąca kompromis między „tradycją" a „nowoczesnością". Oczywiście kompromis ten ma walor dydaktyczny: skok pojęciowy od pochodnej funkcji jednej zmiennej w ustalonym punkcie, będącej liczbą, do pochodnej — układu liczb (dla funkcji wielu zmiennych) jest mały i łatwy do pokonania przez studenta. Poza tym wektory i macierze (tablice liczb) są właśnie tymi obiektami, z którymi ma się bezpośrednio do czynienia w obliczeniach numerycznych. Sprawa uprzywilejowania naturalnego układu współrzędnych (którym autor motywuje przyjętą koncepcję) jest w równym stopniu zaletą, co i brakiem. Główną wadą tej koncepcji jest chyba to, że gubi się w niej funktorialny charakter różniczkowania (różniczka jako funktor, na przykład, z kategorii przestrzeni euklidesowych o wyróżnionych punktach z przekształceniami określonymi lokalnie i różniczkowalnymi, do kategorii przestrzeni wektorowych i odwzorowań liniowych). Nadto wydaje się, że oparcie wykładu na pojęciu różniczki Frécheta (będącej przekształceniem liniowym) pozwoliłoby ujednolicić i uschematyzować niektóre dowody. Omawiana sprawa wiąże się z rozróżnianiem wielu typów „przekształceń" i „pól", które z punktu widzenia podstaw rachunku różniczkowego jest niepotrzebną komplikacją, a wykorzystywane jest dopiero znacznie później.

Drugą usterką jest brak interpretacji fizycznych całek powierzchniowych i krzywoliniowych, które mogłyby bardzo dopomóc w zrozumieniu intuicyjnej treści definiowanych pojęć.

Książka napisana jest przejrzyście i starannie.

Zaledwie w kilku miejscach zauważyłem błędy drukarskie we wskaźnikach: str. 63, wzory (25) i (26); str. 347 w. 12 od góry; str. 44 w. 4 od góry; str. 376 wzór (4). Ponadto zauważyłem jedną niejasną definicję na str. 365. Na podstawie tej definicji, jeżeli K jest kwadratem na płaszczyźnie, to wektor prostopadły do przekątnej tego kwadratu nie jest jednostronnie styczny do K w punkcie stanowiącym koniec tej przekątnej. Jest to sprzeczne ze stwierdzeniami na str. 367, że kombinacja liniowa wektorów jednostronnie stycznych jest wektorem jednostronnie stycznym i że w przypadku komórki k-wymiarowej, położonej w przestrzeni euklidesowej o tym samym wymiarze, każdy wektor jest jednostronnie styczny.

Mimo tych paru uwag oceniam książkę R. Sikorskiego bardzo wysoko, zwłaszcza, że jak wspomniałem na początku, jest ona w polskiej literaturze podręcznikowej dziełem pionierskim.

Czesław Bessaga

Franciszek Leja, *Funkcje zespolone*, Biblioteka Matematyczna, tom 29, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967, str. 314, cena zł 42.—

Funkcje zespolone F. Leji wypełniają dotkliwą lukę w literaturze podręcznikowej dla szkół akademickich. Nie jest to wprawdzie pierwsza i nie jest to jedyna pozycja wydawnicza z zakresu teorii funkcji analitycznych. Pierwszym nowoczesnym podręcznikiem teorii funkcji analitycznych w języku polskim była wydana w r. 1938 znakomita monografia Saksa i Zygmunda, która do dziś nic nie straciła na aktualności. Była ona jednym z pierwszych naprawdę nowoczesnych podręczników teorii funkcji analitycznych w literaturze światowej, w pełni zadowalającym wymogi ścisłości, szczególnie jeśli chodzi o cykl zagadnień związanych z najogólniejszą formą twierdzenia Cauchy'ego. Jednakże z rozmaitych względów nie stała się ona w Polsce standardowym podręcznikiem dostosowanym do poziomu przeciętnego studenta, mogącym