wmptm 1897

a jedynym przykładem takiej relacji jest relacja mniejszości w zbiorze liczb naturalnych. Pisze wprawdzie autor, że każdy zbiór daje się dobrze uporządkować, pozostawia to jednak bez żadnego komentarza, choć w dość obszernej dygresji na temat pewnika wyboru mówi o jego dyskusyjnym charakterze. Mówiąc o pewniku wyboru warto może przedstawić jeszcze jedną pretensję. Skoro autor zdecydował się na zrobienie długiej dygresji na jego temat, to należałoby choć w paru słowach omówić podstawowe metamatematyczne wyniki dotyczące jego niesprzeczności i niezależności, czego w książce niestety zabrakło.

Innym mankamentem książki jest używana w niej terminologia. Niekiedy odbiega ona od powszechnie przyjętej, np. pierwiastek arytmetyczny nazywa się po prostu pierwiastkiem, klasę abstrakcji — abstraktem, a elementy najmniejsze i największe zbioru odpowiednio minimum i maksimum tego zbioru, niekiedy zaś jest rażąco tradycyjna „logistyka", „liczby względne", „liczby bezwzględne". Nawiasem mówiąc „liczby względne" zniknęły już nawet z programów szkolnych. Niezbyt fortunne wydają się także nie spotykane przeze mnie gdzie indziej takie zwroty, jak „zapas funkcji" (przeciwdziedzina), „partykularyzacja" ew. „uszczególnienie zmiennej" (dołączanie małego kwantyfikatora), a zwłaszcza „element dołujący nad zbiorem" (ograniczający zbiór z dołu). Warto też może zauważyć, że wiele ustępów jest wprost przeładowanych definicjami pojęć, z których nigdzie potem się nie korzysta.

Omawiana książka ma również szereg zalet. Sporo jest przykładów i są one na ogół nieźle dobrane. Bardzo cenne jest obszerne omówienie budowy, a następnie wykorzystywanie diagramów relacji. Ten bardzo poglądowy sposób ich przedstawiania jest trudny do znalezienia w literaturze polskiej. Korekta książki musiała być przeprowadzona bardzo starannie, ponieważ w trakcie czytania znalazłem tylko jeden błąd (na rys. 10 zbędny jest obwód okręgu, na którym umieszczone są liczby 1–7). Bardzo dokładny jest skorowidz nazw — rzecz bardzo istotna wobec olbrzymiej ilości wprowadzanych pojęć. Spis literatury jest raczej niekompletny. Autor nazwał go wprawdzie spisem cytowanej literatury, wydaje się jednak, że w książkach tego typu ważniejsze jest podanie łatwo dostępnych publikacji, w których czytelnik może znaleźć jakieś dodatkowe wiadomości na dany temat. Z tego powodu mniej istotne jest cytowanie książki G. Papy *Premiers éléments de mathématique moderne* przy równoczesnym braku tak podstawowych w polskiej literaturze pozycji z teorii mnogości i logiki matematycznej, jak książki Grzegorczyka, Kuratowskiego czy Sierpińskiego.

Janusz Onyszkiewicz

S. Kartasiński i M. Okołowicz, *Analiza matematyczna*, Podręcznik dla Studium Nauczycielskiego, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1967, str. 239, cena zł 27.—

Recenzowana książka jest pierwszym wydaniem podręcznika zatwierdzonego przez byłe Ministerstwo Oświaty i przeznaczonego dla studentów Studium Nauczycielskiego (dalej nazywane SN). Stanowi modyfikację i poszerzenie skryptu wydawanego już parokrotnie przez PZWS, a przeznaczonego także dla SN. Zakresem swoim obejmuje elementy klasycznej analizy matematycznej, omawiając pojęcie i podstawowe własności ciągów i funkcji jednej zmiennej, funkcje elementarne, rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej z zastosowaniami do badania przebiegu funkcji, rachunek całkami nieoznaczonymi i oznaczonymi z zastosowaniami geometrycznymi (pola, objętości, długość krzywej) i fizycznymi (momenty, środek masy, praca, ciś-

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

nienie i parcie) oraz wstępne wiadomości dotyczące szeregów liczbowych i funkcyjnych.

Należy sądzić, że zakres materiału zawarty w książce podyktowany jest programem analizy matematycznej w SN i przy dwuletnim trwaniu tego ostatniego jest zupełnie wystarczający. Jedyne zastrzeżenie może budzić tu pominięcie zupełnie zagadnień miarowych, tak przecież ważnych dla przyszłego nauczyciela matematyki, niezależnie od szczebla nauczania. Na podkreślenie zasługuje fakt umieszczenia w książce dużej ilości zastosowań, zwłaszcza fizycznych. Wydaje się natomiast zbyteczne powtarzanie materiału szkolnego (np. funkcje elementarne) oraz materiału z tzw. algebry wyższej, który, sądząc chociażby ze sposobu przedstawienia go w recenzowanej książce, jest przewidziany do realizacji w trakcie innego przedmiotu w SN. Niech mi będzie wolno także wyrazić nadzieję, że przy przedłużeniu okresu studiów w SN do lat trzech znajdzie się w tym przedmiocie (lub poza nim, co byłoby rozwiązaniem mniej korzystnym) miejsce na pewne uogólnienia pojęć klasycznej analizy w kierunku analizy funkcjonalnej (oczywiście informacyjnie, raczej przez wskazanie kierunków tych uogólnień).

Poważniejszej natury zastrzeżenia budzi natomiast sposób przedstawienia pewnych partii materiału. Występuje tu wyraźna niejednorodność tekstu ze względu na ścisłość przedstawianego w nim materiału. Pewne partie książki opracowane są bardzo starannie i jasno, i redakcyjnie, i pod względem poprawności merytorycznej, są natomiast (niestety dość częste) paragrafy, w których wstępują niezręczności redakcyjne, niejasności sformułowania, a czasem nawet wręcz błędy. Pozwolę sobie zilustrować to poniżej przykładami. Definicji pary uporządkowanej na str. 4 nie można uznać za poprawną. Ponadto autorzy nie używają wygodnego i ogólnie przyjętego terminu: iloczyn kartezjański. Ostatnie zdanie ze str. 4 jest przykładem niezręcznego sformułowania myśli: „możemy powiedzieć" w tym zdaniu najlepiej po prostu opuścić. Zgodnie z definicją funkcji na str. 5 zakres funkcji zawiera się w zbiorze Y, ale nie musi mu być równy. Termin „funkcja zmiennej rzeczywistej", jak sama nazwa wskazuje, nie oznacza funkcji, której wartości są liczbami rzeczywistymi. Zamiast tytułu „Sposoby wyznaczania funkcji" na str. 6 wolałbym „Sposoby podawania funkcji". Zdania następujące po tym tytule są niezbyt zręczne. Pierwsze sugeruje, że nakładamy pewne warunki na zbiory X i Y, a przecież nie o to tu chodzi. Pierwsza część drugiego zdania sugeruje, że już jakieś elementy odpowiednie w drugim zbiorze istnieją, a chodzi tylko o ich znalezienie. Funkcja sin podana tabelą na str. 7 i funkcja sin znana z trygonometrii to różne funkcje, bo mają różne pola — trzeba to Czytelnikowi uświadomić. Podobne nieporozumienie występuje z przybliżonym podawaniem wartości funkcji. Zagadnienie określania (wolałbym zresztą wyznaczania) dziedziny funkcji nie zostało przedstawione jasno, przecież w definicji funkcji wymagamy przy jej podawaniu określenia od razu także i jej dziedziny. Zwrot „funkcja istnieje" (str. 8, a także inne) uważam za wyraźnie niezręczny. Przypadek $n = 0$ przy omawianiu wielomianów na str. 11 wymagałby objaśnienia, wobec kłopotów z określaniem potęgi 0^0. Pojęcie funkcji uwikłanej na str. 12 nie zostało wprowadzone należycie, Czytelnik tego pojęcia w podanym ujęciu nie może zrozumieć, co jeszcze pogłębiają przykłady poniżej (funkcja ma dwie „wyraźne" postacie). To niejasne postawienie sprawy przewija się zresztą przez całą książkę (np. str. 141). Na początku str. 13 jest oczywista pomyłka, funkcja dwu zmiennych nie przyporządkowuje parom par. Podana na tejże stronicy interpretacja geometryczna funkcji dwu zmiennych wymaga założenia, że $z \geqslant 0$. I tu i w wielu innych miejscach w książce występuje tendencja do dość dowolnego zastępowania tworów analitycznych geometrycznymi i na odwrót. Wniosek o tym, że całkowita krotność okresu jest też okresem (str. 16) wymaga dodatkowego założenia o polu funkcji (wraz z x także i $x-\omega$ musi do pola należeć). Definicja funkcji odwrotnej (str. 17) jest zupełnie niejasna, jeżeli nie niepoprawna. Opis

tworzenia wykresu funkcji odwrotnej jest też niejasny, nie mówiąc o niezgodności tekstu z rysunkiem. W przykładzie c) na str. 18 nie jest spełniony, wymagany przy złożeniu funkcji, warunek $Z \subset U$. Wyjaśnienie pojęcia funkcji złożonej wielokrotnie (str. 18/19) jest co najmniej niejasne. Nieprawdą jest, że wszystkie wyrazy ciągu harmonicznego należą do (otwartego, zgodnie z symboliką w książce) przedziału $(0, 1)$. W definicji pojęcia $a_n \to \infty$ na str. 31 zastosowano mylący porządek kwantyfikatorów. Czy, choćby ze względu na drożność ze studiami wyższymi, nie należało podać dowodów twierdzeń o granicy sumy itp. dwu ciągów. Początku § 5 „Ułamki dziesiętne nieskończone" (str. 35) nie można uznać za poprawny; czy nie należało z paragrafem tym poczekać do pojęcia szeregu? Sprawa określoności funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 na str. 40 została postawiona niejasno, funkcja raz ma, a raz nie musi mieć wartości w tym punkcie. W definicji granicy funkcji brak założenia $x_n \neq x_0$. W 5 wierszu od góry na str. 43 zwrot „mówimy" (zarezerwowany w matematyce zwyczajowo dla definicji) należy zastąpić zwrotem „twierdzimy". Nie ujednolicono symboliki na granice jednostronne funkcji. Po co przy wyznaczaniu granicy funkcji x^2 na str. 43 używać dwu różnych ciągów. Funkcja $\frac{x}{|x|}$ nie jest określona dla $x = 0$ (do str. 44). Dlaczego nie używać dwu różnych nieskończoności $\infty = +\infty$ i $-\infty$, a wprowadzać mylący symbol ∞ (str. 44, wiersz 18 od góry). Po umieszczeniu funkcji x^2 w przykładach wyznaczania granicy, formułowanie w postaci twierdzeń przykładów granic funkcji stałej i tożsamościowej jest przesadą. Twierdzenia o granicy sumy itp. funkcji były formułowane dla punktu x_0 skończonego i dla skończonych granic, a na str. 47/48 stosowane są gdy $x \to \infty$, a także gdy granice są nieskończone (wiersz 6 od góry, str. 48). Co mają własności funkcji ciągłej do wyznaczania granicy funkcji $\frac{\sin x}{x}$ dla $x \to 0$ (do zdania po tytule § 3 na str. 54). Jeżeli w wielomianie mają występować jedynie funkcje potęgowe o wykładnikach naturalnych (str. 58), to skąd w nim stała a_n? Funkcja liniowa nie jest funkcją potęgową (str. 58), zgodnie z definicją tej ostatniej na tejże stronicy. Funkcja liniowa jest nieograniczona jedynie dla $a \neq 0$. Do zadań na str. 62 — czy nie lepiej temat podać raz, a potem wymieniać tylko funkcje. Ta sama uwaga odnosi się do sformułowania wielu zadań w książce. Czy wprowadzenie tak ogólnego jak na str. 65 znaczenia terminu parabola nie jest mylące? Wniosek co do x z równania $\sin x = \frac{1}{2}$ jest szkolną pomyłką. Definicji funkcji cyklometrycznych na str. 74 nie można uznać za poprawne; zamiast wyraźnie postawić sprawę z zacieśnianiem funkcji trygonometrycznych — pełno niejasności. Rozumowanie na przełomie str. 78/79 jest zbędne, wystarczy bowiem w przedostatnim wzorze na str. 78 potraktować a jako zasadę nową, a b jako starą. Aż się prosi przykład funkcji ciągłej, nie posiadającej pochodnej (str. 84). Punkt $M \to P$ dla $\Delta x \to 0$ (str. 85) pod założeniem, że krzywa jest ciągła w punkcie P. W twierdzeniu o pochodnej ilorazu na str. 87 brak założenia o niezerowaniu się mianownika. Wypowiedź twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej na str. 90 jest niepełna, brak w niej wyraźnego zaznaczenia koniecznego tu podstawienia. Stwierdzenie w wierszach 5–4 od dołu na str. 98 jest błędne. Czy z terminem „punkt przegięcia" ze str. 107 nie poczekać do porządnej definicji tego pojęcia? Do zadań na str. 108 — normalnie robimy odwrotnie: po to badamy znak pochodnej, byśmy mieli ułatwione sporządzenie wykresu funkcji. Rozumowanie na str. 115, ustalające związek między różniczką a przyrostem funkcji, wymaga założenia $dy \neq 0$, zbędnego przy innym ujęciu zagadnienia. Założenie ciągłości w twierdzeniu na str. 121 jest zbędne. Przedostatnie zdanie na str. 136 zawiera złośliwą pomyłkę, rozważana tam funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 4)$ i $(4, \infty)$, ale nie jest rosnąca w całej swojej dziedzinie. Czy wypukłości

i wklęsłości nie należałoby zaliczyć do badania przebiegu funkcji? W rozważaniach dotyczących wypukłości na str. 139 należy założyć ciągłość drugiej pochodnej, wobec tego, że pod takim założeniem były wypowiedziane stosowane tu twierdzenia dotyczące ekstremów funkcji. Na początku str. 141 nie $x' \to 0$, a $x \to 0$, bowiem x' dysponować nie możemy! Wniosek o zmierzaniu do 1 stosunku cięciwy do odpowiadającego jej łuku (str. 143) wymaga dodatkowego założenia o krzywej. Przeprowadzony na str. 144 rachunek nie upoważnia do obliczenia krzywizny elipsy w punkcie $(a, 0)$. Na str. 145 brak definicji gałęzi nieograniczonej. Metoda poszukiwania asymptoty pionowej na str. 146 nie zgadza się z jej definicją. A czy w ogóle nie omówić asymptot wcześniej, już przy badaniu przebiegu funkcji? Wobec wieloznaczności symbolu całki nieoznaczonej, wzory na całkę sumy itp. wymagają dodatkowych, niezbędnych objaśnień. Brak też wyraźnego — a istotnego tu — stwierdzenia, że rachunek całkami nieoznaczonymi uprawiamy w przedziale. Założenia o funkcji $u(z)$ poczynione przy całkowaniu przez podstawienie (str. 156) nie gwarantują jej odwracalności. Na zakończenie rozważań dotyczących całkowania funkcji wymiernej (str. 166) należało zaznaczyć, że nie rozwiązano zagadnienia w całej ogólności. Funkcja ciągła w przedziale musi być w nim oczywiście określona (do str. 169). Założenia dotyczące ciągu podziałów, przyjęte na str. 171, nie gwarantują zmierzania długości oczek do zera. Ograniczenia dotyczące funkcji znakozmiennej w punkcie d) str. 173 są zupełnie zbyteczne — należało tylko proces całkowy prowadzić dla dowolnej funkcji. Wobec rozważania całki oznaczonej tylko z funkcji ciągłej nie ma w książce wyraźnej definicji całkowalności funkcji, przez co pojęcie funkcji całkowalnej wisi w powietrzu. Przy rozpatrywaniu funkcji tylko ciągłych zwrot „jeżeli" na początku zdania w wierszu 10 od góry na str. 182 jest oczywiście zbyteczny. Podobnie przy ujęciu zastosowanym w książce, założenie ciągłości w punkcie funkcji podcałkowej w twierdzeniu na str. 184 jest zbyteczne, funkcja $f(x)$ powinna być ciągła w całym przedziale (a, b). Uzasadnianie ciągłości funkcji $\varphi(x)$ w dowodzie tego twierdzenia (mającym zresztą miejsca redakcyjnie niezbyt jasne) wobec wykazywania w dalszym ciągu, że $\varphi(x)$ jest funkcją różniczkowalną, jest oczywiście zbyteczne. Skąd ta styczność w wierszach 13–12 od dołu na str. 193? Dlaczego przy definiowaniu długości krzywej przez granicę na str. 199 nie wspomniano o niezależności długości od doboru ciągu podziałów? Na str. 201 brak definicji gęstości punktowej. Definicja szeregu na str. 215 jest rażąco niepoprawna. Reszta n-ta szeregu zbieżnego nie maleje (str. 217), a tylko zmierza do zera. Brak dowodu kryterium d'Alemeberta dla $q > 1$ (str. 220–221). Użycie na zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego symbolu $(-r, r)$, niezależnie od tego, co potem powiedziano, oznacza, że szereg na krańcach przedziału zbieżności nie jest zbieżny. Nie budzi mego entuzjazmu fakt nazywania szeregów potęgowych wielomianami (żeby chociaż uogólnionymi).

Brak w książce skorowidza, brak podania literatury uzupełniającej. Na podkreślenie zasługuje natomiast duża ilość przykładów i zadań (597 zadań, w tym wiele interesujących; szkoda, że teoria szeregów została zupełnie pozbawiona zadań) oraz na ogół starannie wykonane rysunki.

Proszę wybaczyć recenzentowi zbyt może drobiazgowe wskazywanie niedociągnięć w recenzowanej książce. Usprawiedliwia mnie to, że recenzuję podręcznik dla przyszłych nauczycieli oraz fakt obserwowania nagminnie podobnych niedociągnięć przy egzaminach wstępnych dla absolwentów SN, którzy kandydują na wyższe studia matematyczne. Wniosek: konieczność jak najszybszego usunięcia ich z obowiązującego podręcznika.

Zenon Moszner