ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z. SEMADENI (Warszawa)

Uwagi do artykułu J. Mikusińskiego „O twierdzeniu Zorna"

Interesujący artykuł [4] J. Mikusińskiego zawiera pewne nieścisłości historyczne. Ponieważ mylne poglądy związane ze słynną pracą [5] Zorna są bardzo rozpowszechnione, warto je sprostować. Źródłem tych nieporozumień jest to, że wszyscy cytują pracę Zorna, ale prawie nikt jej nie czyta.

Na wstępie autor pisze: „Twierdzenie Zorna, zwane przeważnie lematem Zorna, udowodnione w roku 1935, ...". Otóż Zorn [5] nie udowodnił tego, co powszechnie nazywa się dziś lematem Zorna; nie nazwał go też twierdzeniem ani lematem. Był to dla niego aksjomat i jego słowa nie pozostawiają żadnej wątpliwości: „We wish to show how, by introducing a certain axiom on sets of sets instead of the well-ordering theorem, one is enabled to make the proofs shorter and more algebraic". Po napisaniu dwóch pomocniczych definicji Zorn napisał: „Then our *maximum principle* is expressible in the following form". Użył on terminu „zasada maksimum", i to jest termin warty rozpowszechnienia. (Historyk matematyki mógłby próbować dociec, kto pierwszy użył nazwy „lemat Zorna".)

Na stronie 227 autor pisze: „O trzynaście lat wcześniej niż Zorn podał Kuratowski twierdzenie bardzo niewiele różniące się od twierdzenia Zorna: V. *Jeżeli suma mnogościowa każdej liniowo uporządkowanej podrodziny $\mathscr{G}$ rodziny zbiorów $\mathscr{F}$ należy do $\mathscr{F}$, to w $\mathscr{F}$ istnieje zbiór maksymalny* (...) Twierdzenie Kuratowskiego choć pozornie słabsze, można więc uważać za równoważne z twierdzeniem Zorna."

Po konfrontacji z oryginałami okazuje się jednak, że twierdzenie V jest identyczne ze sformułowaniem podanym przez Zorna.

W pracy Kuratowskiego ([2], str. 89) czytamy natomiast: „E étant un ensemble donné et A un sous-ensemble de E à propriété $\mathscr{R}$; si la somme de toute classe bien ordonnée de sur-ensembles croissants de A (contenus dans E) à propriété $\mathscr{R}$ est un ensemble à propriété $\mathscr{R}$, — il existe un sur-ensemble de A qui est saturé par rapport à la propriété d'»être un sous-ensemble de E à propriété $\mathscr{R}$«."

Twierdzenie Kuratowskiego jest więc silniejsze, bowiem ma słabsze założenia: wystarczy sprawdzić, że suma mnogościowa każdej dobrze uporządkowanej podrodziny $\mathscr{G}$ należy do $\mathscr{F}$.

Twierdzenie Kuratowskiego-Zorna jest blisko związane z następującym twierdzeniem Hausdorffa ([1], str. 140): Każda liniowo uporząd-

kowana podrodzina $\mathscr{G}$ rodziny $\mathscr{F}$ zawiera się w maksymalnej liniowo uporządkowanej podrodzinie rodziny $\mathscr{F}$ [1]. Twierdzenie Kuratowskiego-Zorna wynika natychmiast z twierdzenia Hausdorffa; odwrotne rozumowanie jest też łatwe (klasa rodzin całkowicie uporządkowanych i zawartych w $\mathscr{F}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję; do niej można stosować zasadę Kuratowskiego-Zorna).

K. Kuratowski opublikował swoje twierdzenie 13 lat przed Zornem; w swej pionierskiej pracy [2] chciał on zastąpić powszechnie używaną metodę dowodową polegającą na dobrym uporządkowaniu rozpatrywanego zbioru i stosowaniu indukcji pozaskończonej przez znacznie elegantsze rozumowanie oparte na jednym z wariantów zasady maksimum. Niestety, polska szkoła matematyczna nie zrozumiała doniosłości tej zasady; polscy matematycy nauczyli się operowania „lematem Zorna" ćwierć wieku później od Amerykanów.

W monografii [3] zasada maksimum jest udowodniona, ale jest potraktowana marginesowo. Umieszczona jest w rozdziale oznaczonym gwiazdką, tzn. wykraczającym poza materiał objęty ówczesnym programem uniwersyteckim (natomiast „alefy i ich arytmetyka" to był materiał obowiązujący!).

Dzisiejsze książki z algebry abstrakcyjnej, topologii ogólnej i analizy funkcjonalnej poświęcają na ogół kilka początkowych stron przypomnieniu pewnych pojęć teorii mnogości; wśród nich niemal zawsze figuruje „lemat Zorna", który jest powszechnie zaliczany do kilku najważniejszych twierdzeń teorii mnogości. Warto więc sobie uzmysłowić, jak mało brakowało, aby było ono uznawane za osiągnięcie matematyki polskiej. Nie ma obecnie sensu kruszyć kopie o priorytety; może jednak warto stale używać terminu „zasada Kuratowskiego-Zorna", który stosowany jest w niektórych książkach?

Prace cytowane

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[2] C. Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnement mathématiques*, Fund. Math. 3 (1922), str. 76-108.

[3] K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa 1952.

[4] J. Mikusiński, *O twierdzeniu Zorna*, Wiadom. Mat. 9 (1967), str. 225-232.

[5] M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), str. 667-670.

---

[1] Użyłem tu terminologii i oznaczeń autora. Nawiasem mówiąc, wydaje mi się, że termin „zbiór liniowo uporządkowany", choć często używany, jest niezbyt udany. Słowo „liniowy" kojarzy się z przestrzeniami i operatorami liniowymi; „liniowy porządek" to mógłby, sądząc po nazwie, być częściowy porządek w przestrzeni liniowej. Termin „całkowicie uporządkowany", również często używany, wydaje się znacznie lepszy; „całkowity" to antonim słowa „częściowy".