ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANDRZEJ MOSTOWSKI (Warszawa)

Niesprzeczność i niezależność hipotezy continuum*

1. Matematycy lubią klasyfikować osiągnięcia naukowe pod względem ich doniosłości. Każdy jest zawsze gotów wskazać „najważniejsze odkrycie ostatnich n lat" i twierdzić, że jego wybór jest najlepszy ze wszystkich możliwych. Ponieważ autor tego artykułu nie jest wyjątkiem z ogólnej reguły, zakomunikuje swoją opinię cierpliwemu czytelnikowi: nie mam żadnej wątpliwości, że najważniejszym osiągnięciem matematycznym ostatnich 30 lat było udowodnienie niesprzeczności i niezależności ogólnej hipotezy continuum. Pierwszy dowód został znaleziony prawie 30 lat temu przez Gödla, drugi zaś w 1963 roku przez P. J. Cohena.

Oczywiście każde porównanie znaczenia jednego odkrycia z innym jest w wysokim stopniu subiektywne. Jestem jednak przekonany, że powyższy wybór byłby zaaprobowany przez większość logików i specjalistów z teorii mnogości, jak również prawdopodobnie przez wielu innych matematyków. To przekonanie opieram na tym, że hipoteza continuum zajmuje bardzo specjalne miejsce między innymi nierozwiązanymi problemami matematycznymi.

2. Hipoteza continuum była sformułowana przez Cantora w roku 1884. Mówi ona, że nie istnieje zbiór liczb rzeczywistych, którego moc jest większa od mocy zbioru liczb naturalnych ale mniejsza od mocy zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Mówiąc innymi słowami, hipoteza continuum mówi, że dla każdego zbioru X liczb rzeczywistych istnieje jednoznaczna funkcja, która albo przekształca X na zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, albo też zbiór liczb naturalnych przekształca na cały zbiór X.

Uogólniona hipoteza continuum, która także została sformułowana przez Cantora, dotyczy dowolnego nieskończonego zbioru A i rodziny $P(A)$ wszystkich podzbiorów zbioru A i mówi, że każda podrodzina rodziny $P(A)$ jest równoliczna albo z jakimś podzbiorem zbioru A, albo z całą rodziną $P(A)$. Ta hipoteza ogranicza zatem zakres wszystkich możliwych

---

* Artykuł niniejszy jest autoryzowanym i uzupełnionym przez autora przekładem artykułu, który ukazał się w *Elemente der Mathematik* 19 (1964), str. 121-125.

mocy: nie istnieje żadna moc, która jest większa od mocy zbioru A i mniejsza od mocy rodziny $P(A)$. Cantor twierdził w pewnym momencie, że posiada dowód swojej hipotezy, ale musiał zauważyć potem jakąś lukę, ponieważ dowodu tego nigdy nie opublikował.

3. Wiadomo, że istnieje wiele nierozwiązanych problemów i hipotez w matematyce, a w szczególności w teorii mnogości. Hipoteza continuum jest słynna z licznych powodów.

Pierwszym powodem jest to, że hipoteza continuum mówi o bardzo prostych pojęciach: wystarczy znać skromne początki teorii mnogości, żeby tę hipotezę zrozumieć i pojąć jej znaczenie.

Drugim powodem jest to, że problem, którym się hipoteza continuum zajmuje, jest podstawowy dla teorii mnogości i całej matematyki. Zawsze, gdy napotykamy na jakiś zbiór, pytanie o jego moc jest najprostsze ze wszystkich, jakie się nasuwają. Oczywiście, nasuwa się ono w związku ze zbiorem liczb rzeczywistych, ponieważ bez wątpienia należy on do zbiorów najczęściej używanych w matematyce. Postawienie tego pytania od razu skierowuje naszą uwagę na hipotezę continuum, ponieważ hipoteza ta mówi, że moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych jest drugą co do wielkości nieskończoną mocą.

Trzeci powód związany jest z filozoficznymi podstawami matematyki. Powiemy tutaj kilka słów o znaczeniu hipotezy continuum dla filozofii matematyki, chociaż pojęcia występujące w tym zagadnieniu nie należą do najprostszych.

Jak wiadomo, matematycy XIX wieku sprowadzili wszystkie podstawowe pojęcia, a w szczególności pojęcie liczby, do pojęć teorii mnogości. Pojęcie zbioru okazuje się jednak bardziej skomplikowane niż można by to na początku przypuszczać. Najważniejsze pytanie filozofii matematyki można wyrazić w następujący sposób: Co to są zbiory i jak odkrywa się prawa, którym one podlegają? Co to są w szczególności zbiory liczb rzeczywistych? Czy każdy zbiór jest określony przez zdefiniowanie własności jego elementów (a więc w istocie rzeczy jest z tą własnością identyczny), czy też jest to jakiś abstrakcyjny obiekt, który istnieje niezależnie od naszej konstrukcji myślowej? Większość matematyków wolałaby z pewnością wybrać drugą z tych możliwości (którą często określa się jako matematyczny platonizm). Jeśli jednak zbiory istniałyby w tym samym sensie jak np. obiekty fizyczne, to powinno być możliwe np. ich przeliczenie. Całkowite fiasko wszystkich prób rozstrzygnięcia hipotezy continuum w tym czy innym kierunku jest jednym z najważniejszych argumentów przeciwko matematycznemu platonizmowi.

W końcu hipoteza continuum jest interesująca z czysto matematycznego punktu widzenia. Zwyczajna hipoteza continuum umożliwia konstruowanie różnych specjalnych zbiorów. Jest ona także narzędziem

pozwalającym na tworzenie różnych kontrprzykładów (w szczególności w teorii funkcji rzeczywistych). Uogólniona hipoteza continuum upraszcza w wysokim stopniu teorię potęgowania liczb kardynalnych. Ponieważ prawa dodawania i mnożenia dla liczb kardynalnych są bardzo proste, należałoby oczekiwać, że także potęgowanie będzie rządzone przez proste prawa.

4. Wszystkie te rozważania przemawiają za ważnością hipotezy continuum. Powinniśmy więc próbować udowodnić lub obalić tę hipotezę. Niestety problem prawdy w matematyce nie jest prosty. Powtórzmy jeszcze raz: Jeśli zbiory istniałyby w tym samym sensie jak obiekty fizyczne, moglibyśmy oczekiwać, że prawdziwość lub fałszywość hipotezy continuum zostanie w końcu odkryta. Jeśli jednak zbiory są tylko naszą własną konstrukcją myślową, odpowiedź na pytanie, czy hipoteza continuum jest prawdziwa, czy fałszywa może zależeć od tego, jakie konstrukcje przyjmiemy za dozwolone.

Porównanie z aksjomatem równoległości wyjaśni sytuację. Jeśli geometrię ujmujemy aksjomatycznie, pytanie o prawdziwość lub fałszywość postulatu równoległości nie ma żadnego sensu, ponieważ aksjomaty mogą być przyjmowane lub odrzucane zgodnie z naszym upodobaniem. Pytanie o prawdziwość postulatu będzie więc zastąpione przez pytanie o jego niesprzeczność i niezależność.

Sytuacja zmienia się, jeśli zajmujemy się geometrią nie jako teorią aksjomatyczną, ale jako badaniem własności przestrzeni fizycznej. Pytanie czy aksjomat równoległości jest prawdziwy ma wtedy sens, ale nie jest już pytaniem matematycznym.

W przypadku teorii mnogości nie wiemy czy ta druga postać problemu jest w ogóle możliwa, ponieważ nie możemy nic powiedzieć o dopuszczalności platonizmu. Z drugiej strony formalne problemy niesprzeczności i niezależności są sensowne i w wysokim stopniu interesujące.

5. Aksjomatyka teorii mnogości została pierwszy raz sformułowana przez E. Zermelo ponad 50 lat temu. Ma ona dwa pojęcia pierwotne: „zbiór" i „relacja przynależności". Aksjomaty brzmią jak następuje:

(1) Zbiory, które zawierają te same przedmioty jako elementy, są identyczne.

(2) Dla każdych dwóch przedmiotów istnieje zbiór, który zawiera dokładnie te dwa przedmioty jako elementy.

(3) Jeśli X jest zbiorem, to suma wszystkich zbiorów należących do X jest też zbiorem.

(4) Dla każdego zbioru X istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru X.

(5) Istnieje co najmniej jeden zbiór nieskończony.

(6) Niech $F(x, y)$ będzie jakimś warunkiem, który jest napisany za pomocą pierwotnych pojęć logiki i teorii mnogości. Jeśli dla każdego x istnieje dokładnie jedno $y = y(x)$, które razem z x spełnia ten warunek, to dla każdego zbioru X istnieje zbiór Y, którego wszystkie elementy są postaci $y(x)$, gdzie x przebiega elementy zbioru X.

Ostatnim aksjomatem, (7), jest aksjomat wyboru, którego nie będziemy tutaj formułowali explicite.

Ten system aksjomatów nazywa się *systemem aksjomatów Zermelo-Fraenkla*; zwykle oznaczany jest symbolem Z-F. Nasze przedstawienie tego systemu nie jest jeszcze zadowalające, ponieważ pewne pojęcia, jak „suma", „nieskończony" itd., nie są określone przez pojęcia pierwotne. Tę lukę można jednak łatwo uzupełnić i czytelnik, który zna choć skromne początki teorii mnogości, potrafi łatwo uczynić to sam.

Zauważmy, że istnieją jeszcze inne aksjomaty dla teorii mnogości, które różnią się częściowo od systemu Z-F. Dyskusja tych zagadnień zaprowadziłaby nas jednak za daleko.

Wprowadzimy jeszcze kilka definicji, które pozwolą nam poznać myśl przewodnią dowodów niesprzeczności i niezależności hipotezy continuum.

Jedną z konsekwencji aksjomatów (1)-(6) jest tzw. twierdzenie o podzbiorach, które początkowo zostało przyjęte przez Zermelo jako aksjomat: *Niech $F(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ będzie warunkiem, który wyraża się za pomocą pierwotnych pojęć logicznych i teorio-mnogościowych. Jeśli A jest jakimś zbiorem, to istnieje — dla dowolnych $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — podzbiór A, który składa się z tych wszystkich elementów zbioru A, które razem z $u_1, u_2, \ldots, u_n$ spełniają warunek F. Ten zbiór oznaczamy przez $\{x \in A\colon F(x, u_1, \ldots, u_n)\}$.*

Rozpatrzymy w szczególności warunek F, w którym wszystkie stwierdzenia egzystencjalne i założenia ogólne odnoszą się do A. W takim warunku nie występuje więc żadna formuła postaci

(i) dla każdego x,

(ii) istnieje x,

ale mogą występować formuły:

(i') dla każdego x należącego do A,

(ii') istnieje x należące do A.

Jeśli w dowolnym warunku F zastąpimy wszystkie formuły (i) i (ii) przez (i') i (ii'), to otrzymamy nowy warunek $F^{(A)}$, który nazywamy warunkiem F ograniczonym do A. Dla kogoś, kto uważa, że poza elementami A nie istnieje żaden przedmiot, warunki F i $F^{(A)}$ są równoważne, ponieważ (i) i (i') oraz (ii) i (ii') znaczą dla niego to samo.

Zbiór $\{x \in A\colon F^{(A)}(x, u_1, \ldots, u_n)\}$ nazywamy *rozciągłością F w A*, elementy $u_1, \ldots, u_k$ nazywamy *parametrami rozciągłości.*

6. Wynik Gödla o niesprzeczności mówi co następuje:

I. *Jeśli aksjomaty* (1)-(6) *systemu* Z-F *są niesprzeczne, to pozostają one niesprzeczne po dołączeniu do nich uogólnionej hipotezy continuum (i aksjomatu wyboru* (7)).

(Uwaga o aksjomacie wyboru jest w zasadzie zbędna, ponieważ wynika on z uogólnionej hipotezy continuum.)

Gödel udowodnił to twierdzenie przez konstrukcję pewnego modelu. Zdefiniował on (opierając się wyłącznie na aksjomatach (1)-(6)) pozaskończony ciąg zbiorów K_α. Zbiór X nazywa się *konstruowalny*, jeśli należy do jakiegoś K_α. Hipoteza

każdy zbiór jest konstruowalny

nazywa się *aksjomatem konstruowalności*. Aksjomat wyboru i uogólniona hipoteza continuum są konsekwencjami aksjomatu konstruowalności. Jednocześnie aksjomat konstruowalności jest niesprzeczny, ponieważ jest spełniony w zakresie zbiorów konstruowalnych.

Musimy jeszcze zdefiniować ciąg K_α. Robi się to za pomocą indukcji pozaskończonej. K_0 jest zbiorem pustym; jeśli α jest liczbą graniczną, to bierzemy jako K_α sumę wszystkich K_β dla $\beta < \alpha$. Jeśli $\alpha = \beta + 1$, to bierzemy jako K_α zbiór rozciągłości w K_β wszystkich możliwych warunków z parametrami w K_β.

Myśl przewodnią Gödla możemy wyjaśnić następująco: Mając K_β już zdefiniowane, sprawdzamy czy jest to model dla aksjomatów Z-F. W tym celu ustalamy czy twierdzenie o podzbiorach jest prawdziwe w K_β, albo, co na jedno wychodzi, czy rozciągłości wszystkich możliwych warunków z parametrami w K_β należą do K_β. Jeśli to nie zachodzi, to dołączamy brakujące rozciągłości do K_β i powtarzamy ten proces tak długo, aż wyczerpiemy wszystkie liczby porządkowe. W tak otrzymanej klasie twierdzenie o podzbiorach jest oczywiście prawdziwe. Można pokazać, że wszystkie aksjomaty razem z aksjomatem konstruowalności są też w niej spełnione.

7. Problem niezależności hipotezy continuum od aksjomatów (1)-(7) pozostawał przez wiele lat nie rozwiązany. Nawet pozornie dużo prostszy problem niezależności aksjomatu konstruowalności pozostawał nie rozwiązany na przekór wielu próbom podejmowanym przez najwybitniejszych logików. Od szeregu lat było wiadomo, że Gödel zna dowód niezależności pewnika wyboru od pewnej aksjomatyki słabszej od Z-F, jednak, pomimo wielu pytań, Gödel nigdy nie wyjaśnił szczegółów swego odkrycia.

W roku 1963 P. J. Cohen z Uniwersytetu Stanford znalazł metodę, która za jednym zamachem pozwoliła mu rozwiązać prawie wszystkie problemy niezależności. Jego rezultaty są opublikowane w pracy [2].

Wszystkie niżej wymienione wyniki P. J. Cohena są udowodnione przy założeniu niesprzeczności aksjomatów (1)-(6):

II. *Aksjomaty* (1)-(6) *pozostaną niesprzeczne, jeśli dołączymy do nich zaprzeczenie aksjomatu wyboru; pozostają one też niesprzeczne po dołączeniu do nich następującego bardzo mocnego stwierdzenia: Istnieje przeliczalny zbiór M o własnościach*: (i) *elementami zbioru M są rozłączne pary, których elementami są zbiory liczb rzeczywistych*, (ii) *nie istnieje funkcja wyboru dla M (tzn. nie istnieje zbiór A taki, że dla każdego X należącego do M iloczyn* $A \cap X$ *ma dokładnie jeden element).*

III. *Aksjomaty* (1)-(6) *pozostają niesprzeczne, jeśli dodamy do nich następujące stwierdzenie: nie istnieje żadna relacja, która dobrze porządkuje zbiór liczb rzeczywistych.*

Twierdzenia II i III dają niezależność aksjomatu wyboru.

IV. *Aksjomaty* (1)-(6) *pozostają niesprzeczne, jeśli dodamy do nich aksjomat wyboru* (7), *jak również dowolne jedno z następujących stwierdzeń: Moc zbioru liczb rzeczywistych jest równa drugiej co do wielkości, trzeciej co do wielkości, ...,* $(\omega+1)$*-ej nieskończonej mocy.*

Ogólnie mówiąc, można bez sprzeczności dodać do aksjomatów (1)-(7) następujące stwierdzenie: Moc zbioru liczb rzeczywistych jest równa $(\alpha+1)$-ej nieskończonej liczbie kardynalnej, gdzie α jest liczbą porządkową definiowalną. Ścisłe określenie tego, co należy tu rozumieć przez definiowalność przekracza jednak ramy tego artykułu. Można także zamiast $\alpha+1$ wziąć pewne (ale nie wszystkie) definiowalne liczby graniczne.

Twierdzenie IV daje niezależność hipotezy continuum.

V. *Aksjomaty* (1)-(6) *pozostają niesprzeczne, jeśli dołączy się do nich aksjomat* (7), *uogólnioną hipotezę continuum, jak również zaprzeczenie aksjomatu konstruowalności.*

Twierdzenie V rozwiązuje problem niezależności aksjomatu konstruowalności. Jak widzimy, wszystkie ważne problemy niezależności zostały rozwiązane przez twierdzenia Cohena.

Modele, które skonstruował Cohen, są budowane w podobny sposób, jak modele Gödla. Wyjaśnimy tutaj myśl Cohena w bardzo prostym przypadku.

Przede wszystkim zauważymy, że nie tylko klasa wszystkich zbiorów konstruowalnych jest modelem dla teorii mnogości. Jak się okazuje, są nawet stosunkowo niewielkie (przeliczalne) liczby graniczne α takie, że opisany przez nas wyżej zbiór K_α jest modelem dla Z-F. Czytelnik, który słyszał o twierdzeniu Skolema-Löwenheima, nie powinien być zdziwiony tym wynikiem: każdy nieskończony model dla dowolnej teorii zawiera zawsze podmodel przeliczalny.

Otóż Cohen konstruuje swój model wychodząc z jakiegoś nieustalo-

nego z początku zbioru X, np. złożonego z liczb naturalnych, lub z jakiegoś nieustalonego ciągu pozaskończonego X o wyrazach rzeczywistych, którego długość jest $< \alpha$. Następnie powtarza on operacje Gödla wychodząc nie od zbioru pustego, ale od zbioru X. Operacje te wykonuje się tylko α razy. W ten sposób Cohen dochodzi do zbioru $K_\alpha(X)$, który ma — obrazowo mówiąc — tę samą „wysokość" co K_α, ale jest od K_α „szerszy", gdyż zawiera zbiór X nie należący na ogół do K_α.

Jeśli X jest wybrane dowolnie, to $K_\alpha(X)$ nie jest na ogół modelem. Dla pewnych X można natomiast otrzymać model. Cohen pokazał mianowicie, że jest tak, jeśli X nie należy wprawdzie do K_α, ale każda własność zbioru $K_\alpha(X)$ daje się wypowiedzieć jako własność samego modelu K_α. Ta redukcja własności zbioru $K_\alpha(X)$ do własności samego K_α i dowód, że dla pewnych X jest ona możliwa, są najistotniejszymi elementami całej konstrukcji Cohena.

Wchodzenie w dalsze szczegóły nie byłoby tu niestety możliwe. Czytelnik, który interesuje się tymi zagadnieniami, musi przestudiować prace oryginalne, w szczególności nadaje się do tego książka [3].

Słówko jeszcze o hipotezie continuum. Jeśli konstrukcję zbioru $K_\alpha(X)$ przeprowadzimy wychodząc od ciągu X, którego wyrazami są liczby rzeczywiste, a którego długość jest np. setną z kolei liczbą kardynalną modelu K_α, to w $K_\alpha(X)$ moc zbioru liczb rzeczywistych tego modelu jest co najmniej równa setnej liczbie kardynalnej modelu K_α. Dodatkowe rozważania pokazują, że liczby kardynalne obu modeli K_α i $K_\alpha(X)$ są takie same. Zatem w $K_\alpha(X)$ hipoteza continuum nie zachodzi. Przeciwnie: w $K_\alpha(X)$ jest prawdziwe zdanie, które mówi, że zbiór liczb rzeczywistych ma moc co najmniej $\aleph_{100}$. Oczywiście, liczbę 100 można tu zastąpić dowolną inną liczbą skończoną, a także — jak wspomnieliśmy — niektórymi liczbami pozaskończonymi.

W międzyczasie niektórzy inni matematycy zastosowali metodę Cohena i z jej pomocą udowodnili niezależność dalszych hipotez (istnienie zbiorów niemierzalnych, hipoteza Suslina i inne). Prace szeregu dalszych matematyków pozwoliły też istotnie uprościć pierwotny pomysł Cohena.

8. Formalne problemy niesprzeczności i niezależności hipotez teoriomnogościowych można więc uważać jako zasadniczo rozwiązane. Aksjomatyczna teoria mnogości znajduje się teraz w tym samym położeniu co aksjomatyczna geometria po pracach Kleina i Poincarégo. Z drugiej strony problem prawdy jest dalej otwarty. Ten problem istniał oczywiście na długo przed Cohenem, prace Cohena postawiły go tylko w szczególnie jaskrawym świetle, tak jak modele Poincarégo i Kleina pokazały jasno, na czym polega problem prawdziwości aksjomatu o równoległych. Wydaje się bardzo prawdopodobne, że podobnie jak po odkryciach Poincarégo

i Kleina geometria euklidesowa i nieeuklidesowa zyskały prawo obywatelstwa w matematyce, tak po pracach Cohena powstaną różne a równouprawnione teorie mnogości. O ile tak się stanie, to będziemy musieli stwierdzić, że w meczu między platonizmem a formalizmem ten ostatni zdobył znowu jeden punkt.

Prace cytowane

[1] Kurt Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set-theory*, Ann. Math. Stud. 3 (1940).

[2] Paul J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Part I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50 (1963), str. 1143-1148; Part II, ibid. 51 (1964), str. 105-110.

[3] — *Set theory and the continuum hypothesis*, New York — Amsterdam 1966.