ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

wmptm 1897

D. H. LEHMER (Berkeley)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zmechanizowana matematyka*

Wielki to zaszczyt otrzymać zaproszenie na tę mównicę. Wystarczy tylko przeczytać nazwiska moich wybitnych poprzedników, by uświadomić sobie, że jest to trzydzieści siedem wydarzeń, które niełatwo jest kontynuować. Ponieważ zajmuję się przede wszystkim matematyką czystą, niepokój mój wzrósł, gdy stwierdziłem, że trzydzieści dwa wykłady dotyczyły zastosowań matematyki w innych naukach. Trudność mego położenia stanie się oczywista, gdy zapowiem, że będę mówił o zastosowaniach innych nauk do matematyki.

Jestem jednak przekonany, że gdyby profesor Gibbs był z nami dzisiaj, należałby do pierwszych, którzy aprobowaliby zastosowanie urządzeń mechanicznych dla lepszego zrozumienia zarówno czystej, jak i stosowanej matematyki. Dla poparcia tego poglądu pragnę zwrócić uwagę państwa na fragment historii matematyki na przełomie XIX i XX wieku. Mam tu na myśli odkrycie przez Gibbsa zjawiska, które obecnie nosi jego imię. W roku 1898 Michelson i Stratton z Uniwersytetu w Chicago zakończyli konstrukcję wielkiego osiemdziesięciowyrazowego analizatora harmonicznego i opublikowali w Philosophical Magazine rysunki kilku jego tworów. Jednym z nich był wykres funkcji

$$F_{80}(x) = 2\sum_{n=1}^{80}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Jak wszyscy sobie przypominamy, odpowiedni szereg nieskończony jest szeregiem Fouriera „zębatej funkcji"

$$y(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad x = \pi, \end{cases}$$
$$y(x+2\pi) = y(x).$$

---

* Trzydziesty ósmy wykład poświęcony pamięci Josiah Willarda Gibbsa wygłoszony na dorocznym zjeździe Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego w Denver dnia 26 stycznia 1965 r.

Reprinted with permission of the publisher The American Mathematical Society from the Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 72, No. 5, pp. 739-750, Copyright © 1966.

Podany przez Michelsona wykres funkcji $F_{80}(x)$ wykazywał rodzaj drżenia, gdy x zbliżało się do π, dając dziewięcioprocentowe przekroczenie wartości oczekiwanej. Michelson wiedział, że jego urządzenie zapewniało większą dokładność i czuł, że zawiniła tu nie mechanika, lecz matematyka. Na wszelki wypadek napisał o tym nieco szorstki list do Nature (6 października 1898). Gibbs nadesłał dwie odpowiedzi ogłoszone 29 grudnia 1898 roku i 27 kwietnia 1899. W okresie między tymi dwiema datami Gibbs musiał dokładniej przeanalizować wykresy, gdyż w drugim liście koryguje swój pierwszy list i potwierdza rozbieżność około 9 procent, dokładniej

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\,du-\frac{1}{2}=0{,}0895.$$

Bez względu na to, w jaki inny sposób analizator Michelsona mógł przyczynić się do postępu nauki, faktem jest, że zwrócił uwagę na interesującą anomalię w teorii szeregów Fouriera. Obecnie lepiej rozumiemy ten dział matematyki i spodziewamy się podobnego zjawiska i w innych wypadkach.

Mechaniczne pomoce matematyczne są tak stare, jak sama matematyka. Babilońskie tabliczki gliniane i egipskie papirusy były po prostu środkami zapamiętywania używanymi czasami dla wyliczeń i utrwalania wyników matematycznych. Piasek, na którym kreślił Archimedes nie zostaje daleko w tyle za tablicą, na której powstaje znaczna część współczesnej matematyki. Bardziej zmechanizowanymi przyrządami były liniał i cyrkiel, analogowe przyrządy Greków, oraz liczydła i żłobione patyczki, urządzenia cyfrowe tej samej epoki. Rozpowszechnienie papieru i druku w Europie spowodowało wprowadzenie wykresów, nomogramów, a ponadto i suwaka logarytmicznego, dalszych urządzeń analogowych. Rozwój rachunku różniczkowego i całkowego pchnął matematykę ku ciągłości. Mimo to jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego, Leibniz, widział potrzebę pomocy mechanicznych dla rozwijanej przez siebie analizy kombinatorycznej i w związku z tym skonstruował urządzenie cyfrowe, rodzaj mechanicznych liczydeł, podobne do dzisiejszego arytmometru. Dwieście lat później maszyny takie produkuje się masowo, nie dla matematyki wprawdzie, lecz dla księgowych. Z początkiem bieżącego stulecia matematycy odkryli na nowo arytmometr. Na półkach zaczęły pokrywać się kurzem tablice logarytmów, natomiast zaczęły ukazywać się masowo tablice funkcji specjalnych. Samo istnienie takich tablic stało się dla innych matematyków pretekstem do pozostawiania rozwiązań różnych zagadnień w postaci zależnej od funkcji specjalnych. Odkryto w ten sposób wiele interesujących własności tych funkcji, chociaż początkowo badania były oparte na małych, niedokładnych tablicach,

opracowanych na podstawie tego, co obecnie nazywamy protekcjonalnie „ręcznym rachunkiem". Wszystko to zawdzięczamy zatem księgowemu. Jemu także i przeprowadzającym spis ludności zawdzięczamy karty perforowane, osiągnięcie początku obecnego stulecia.

Istniało trochę wynalazków (1), a nawet i konstrukcji urządzeń przeznaczonych do specjalnych zastosowań matematycznych. Jeżeli chodzi o urządzenia analogowe, wspomnijmy planimetr i inne integratory, analizator harmoniczny, taki, jak wspomniany już analizator Michelsona. Szczytowym osiągnięciem w tym kierunku był analizator różniczkowy Busha (1930), którego części składowe były potem zastępowane urządzeniami elektronowymi. Jeżeli zaś chodzi o urządzenia cyfrowe, to maszyna różnicowa Babbage'a jest samotnym pomnikiem pięknego wynalazku pogrążonego przez niedoskonałą technikę lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Trzeba było dokładniej poznać fizykę, by móc zrealizować idee Babbage'a pomocy matematyce. Nieco później Jevons wynalazł urządzenie cyfrowe przeznaczone specjalnie do zagadnień logiki formalnej. O ile jestem dobrze poinformowany, nie zostało ono nigdy skonstruowane. Nawet dzisiaj nie mamy żadnych specjalnych urządzeń do takich celów.

Należy wspomnieć jeszcze o pewnym urządzeniu teoretycznoliczbowym wynalezionym z górą 2000 lat temu przez Eratostenesa i nazywanym sitem. Wydaje się, że urządzenie to zostało po raz pierwszy zrealizowane graficznie przez Hindenburga w roku 1776. Do początku XX wieku sita graficzne były używane w różnych formach do układania dużych tablic dzielników i do rozwiązywania równań diofantycznych. Sito to stało się w roku 1927 mechanicznym, a w 1932 — fotoelektrycznym.

Do końca wielkiego kryzysu (2) rozwój przemysłu telefonicznego i techniki kart perforowanych doprowadził technikę przekaźników elektromechanicznych do takiego stopnia, że można było liczyć na to, iż tysiące takich elementów będzie harmonijnie pracowało z wystarczającą niezawodnością. Aikenowi i Stibitzowi przyszło do głowy, że to właśnie jest elementem, na którym można oprzeć wykonalną realizację maszyny różnicowej Babbage'a. Tak więc w roku 1945 powstały dwa sterowane za pomocą taśm perforowanych potwory, bezpośrednie zwiastuny dzisiejszych komputerów.

Także w czasie kryzysu problem liczenia promieni kosmicznych doprowadził do udoskonalenia innego mechanizmu. Chodzi tu o przerzutnik dwustabilny używany także w sicie fotoelektrycznym. Mauchley i Eckert doszli do przekonania, że łącząc dziesiątki tysięcy takich obwodów można

(1) Wiele informacji o historii maszyn znajdzie czytelnik w książkach A. B. Empachera *Maszyny liczą same?*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1960 i *Potęga analogii*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1964 (Przypisek Redakcji).

(2) Mowa o kryzysie 1929-1933 (Przypisek Redakcji).

otrzymać nadzwyczaj szybko liczący układ bez żadnych części ruchomych. Tak powstał pomysł pierwszego komputera, ENIAC'a. Narodziny jego w roku 1947 zapoczątkowały nową epokę zmechanizowanej matematyki, jak również całego naszego systemu społecznego. Fantastyczna szybkość ENIAC'a, maszyny powolnej w dzisiejszym rozumieniu, zmusiła do zaniechania nie tylko idei kontroli ludzkiej, ale nawet kontroli za pomocą taśmy perforowanej. Władza została przekazana samej maszynie. Podczas gdy taka oczywista polityka spowodowała dreszcze u dziennikarzy, wywołała ona korzystne następstwa dla matematyki: a) umożliwiła większą elastyczność w użytkowaniu maszyny i b) zmusiła do wprowadzenia pewnych operacji lub instrukcji logicznych, co okazało się nadzwyczaj pożyteczne dla innych gałęzi matematyki, nie tylko dla rozwiązywania równań różniczkowych.

Po powolnym starcie, w przeciągu ostatnich dwóch dziesiątków lat udoskonalenie niezawodności i szybkości okazało się tak wielkie, że aż trudno je właściwie ocenić. Niezawodność, choć trudniej dostrzegalna, wzrosła bardziej niż szybkość. Ze wzrostem szybkości malał koszt pojedynczej operacji, osiągając obecnie, dla powszechnie używanych maszyn, jeden cent za 10 000 lub więcej mnożeń. Maszyny te wykonują elementarne operacje arytmetyczne i logiczne 10^5 do 10^7 razy szybciej niż człowiek. Liczba ta jest trudna do wyobrażenia i nie została osiągnięta w żadnej innej gałęzi nauki. Hamming zwraca uwagę, że najszybszy sposób przebycia trasy z Denver do Nowego Jorku jest zaledwie około 100 razy szybszy od marszu energicznym krokiem. Jeżeli za pomocą maszyny można wykonywać obliczenia 10^5 do 10^7 razy szybciej niż ręcznie, to zmienia to cały pogląd na obliczenia, a także na uzasadnienie ich wykonywania. Wraz ze wzrostem szybkości następował wzrost pojemności pamięci potrzebnej do pomieszczenia większej ilości wyników pośrednich, koniecznych do rozwiązania bardziej skomplikowanych problemów, które obecnie mogą być rozwiązane w sensownym czasie. Współczesna maszyna ma także nieco większy zapas rozkazów niż jej przodek z początku lat pięćdziesiątych, podstawowa jej struktura pozostała jednak niezmieniona.

Pomimo tak znacznego postępu i wynikającej z niego „rewolucji komputerowej", życie przeciętnego matematyka zajmującego się pracą badawczą w dziedzinie matematyki czystej uległo niewielkim zmianom. Zdarzają się tu jednakże wyjątki. Niektórzy z nas próbują rozwijać nowe sposoby rozwiązywania starych problemów. Już w roku 1948 Hartree przepowiedział, że z komputerów wyłoni się nowa matematyka. Chociaż to się ledwo zrealizowało, wiele nowych metod już rozpowszechniło się; wymieńmy tu programowanie liniowe czy metodę Monte Carlo, która teraz stała się możliwa do stosowania. Jednak wymóg wykonalności nie hamował nigdy wyobraźni matematyka. W rzeczywistości

metody dzisiaj używane są często najbardziej surowymi spośród proponowanych dawniej dla obliczeń ręcznych, gdyż one są właśnie najbardziej ekonomiczne.

Myśl Hartreego była słuszna: rzeczywiście mamy nowe gałęzie matematyki, których wyznawców możemy złośliwie porównywać do markietanek, gdyż nie posługują się oni komputerami. Działy te mogły powstać jedynie dzięki istnieniu komputerów. Takie dyscypliny, jak cybernetyka, sztuczna inteligencja, czy teoria automatów są interesujące same przez się i mogły powstać w czasach Babbage'a, a więc sto lat temu. O tym, że są to rzeczywiście działy matematyki, przekonuje nas fakt, że abstrakcyjny automat jest to uporządkowana czwórka $[A, B, C, D]$. Obserwujemy także tendencję do zajmowania się przypadkiem nieskończonym zamiast zmagania się z przypadkiem skończonym. Odbiegamy jednak za bardzo od zmechanizowanej matematyki.

Zwróciliśmy już uwagę, że tylko niewielu ludzi zajmujących się matematyką czystą ma pozytywny stosunek do komputerów, stosunek niektórych jest negatywny. Sądzą oni, że wiele obliczeń jest źle planowanych i że lepiej byłoby poświęcić więcej wysiłku na poszukiwanie nowych idei. Pogląd ten podziela wielu ludzi. Kilka lat temu spotkało mnie, jako redaktora małego czasopisma poświęconego obliczeniom, następujące wydarzenie. Otrzymałem krótką pracę, w której była podana wartość pewnej podstawowej stałej z dokładnością do około 500 miejsc dziesiętnych. W liście, w którym w uprzejmy sposób zakomunikowałem, że pracy nie zamieścimy, zwróciłem uwagę, że wartość tej stałej była już ogłoszona z dokładnością do około 2000 miejsc. W odpowiedzi swej autor zwrócił uwagę na to, że te 2000 cyfr wyliczone było przez maszynę, podczas gdy jego wynik bardziej zasługuje na ogłoszenie jako produkt „ręcznego wyrobu".

Stwierdziłem już, że przeciętny matematyk ma obojętny stosunek do komputerów. Sądzę, że większość obecnych albo zajmuje się czystą matematyką, albo ma sporadyczne momenty „czystości" w swoich „stosowanych" rozumowaniach. Ta większość nie potrzebuje wytłumaczenia wyżej omówionej postawy. Nieliczna reszta może wymagać kilku słów komentarza. Dlaczego nie możemy zmechanizować znacznej części matematyki, którą znajdujemy w bieżących czasopismach? Dlaczego tak mało matematyków zabiega o czas w ośrodkach obliczeniowych? Nie jest to problem języka, gdyż nawet psychologowie i językoznawcy mogą nauczyć się „rozmawiać" ze swoim komputerem. Przyczyną tego jest fakt, że obiekty matematyczne, z którymi mamy do czynienia, nie dają się w pełni opisać środkami komputera. Także liczba operacji, które mają być wykonane, jest mała i mieści się w ramach możliwości człowieka. Nie można niczego uzyskać przez wykonywanie pięciu kroków logicznych w tempie 15000 na sekundę. By zrozumieć lepiej pierwszą

trudność musimy tylko uprzytomnić sobie, że komputer jest skończonym zbiorem układów, z których każdy może znajdować się w skończonej liczbie stabilnych stanów (zazwyczaj dwóch). Przy każdym drgnięciu sprężynki zegara komputer znajduje się w jednym ze skończonej tylko ilości możliwych stanów. Komputer pracuje wreszcie przez skończony okres czasu, tj. przez skończoną ilość drgań sprężynki. W sumie ilość informacji jest skończona. Jednakże nawet taka liczba jak π zawiera nieskończoną ilość informacji. Tak więc komputer nigdy nie będzie w stanie zrozumieć takich tworów wyobraźni, jak liczby rzeczywiste, ciągłość, pochodne, różne rodzaje całek, cosinusy, pola, iloczyny nieskończone, czy nawet zbiór wszystkich wiązek algebry typu C^*. Z drugiej strony komputer nie ma kłopotów z takimi rzeczami, jak geometrie skończone, ciała skończone czy liczby naturalne, dopóki tylko wystarczają pojemność jego pamięci i przydzielony czas. Krótko mówiąc, prawie wszystko, czym zajmuje się matematyk, może być na komputerze tylko symulowane. Matematyk ma umysł analogowy, a komputer nie. Pociąga to za sobą dalsze trudności. Nawet podstawowe operacje dodawania i mnożenia na maszynie nie są tym, do czego przywykł matematyk, a to ze względu na skończoną szerokość arytmometru. Dodawanie może dawać zadziwiające wyniki z powodu „niemieszczenia się" rezultatu. Prawo łączności mnożenia może nie zachodzić z powodu błędów zaokrągleń. Granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

może okazać się równa 1 z powodu dodawania zmiennoprzecinkowego. Oczywiście zjawiska takie występowały i w zwykłym arytmometrze, teraz tylko spotęgowały się. Prawdziwa trudność leży w tym, że tylko skończona liczba aniołów może tańczyć na łebku szpilki, podczas gdy matematycy są bardziej skłonni interesować się tylko problemem nieskończonej ilości aniołów.

Jak każdemu wiadomo, człowiek zajmujący się matematyką stosowaną ma sposób na pokonanie tych trudności. Próbuje on operować symulowanym układem liczb rzeczywistych, dyskretną geometrią i rachunkiem różnic skończonych, przeciwdziałając zakłóceniom zaokrągleń i obcięć przez przedłużenie czasu i wielkości. Na szczęście wyniki komputera odpowiadają jakoś prawdziwej odpowiedzi na wyidealizowane pytanie z dokładnością wystarczającą do praktycznych zastosowań.

Co się jednak dzieje, gdy nie ma żadnego praktycznego celu? Co można zrobić z funkcją, której wartość jest 0 dla x wymiernego, a 1 dla x niewymiernego? Jeżeli mamy do czynienia z takimi obiektami, to jest tylko jeden sposób zastosowania komputerów. Musimy ścisnąć nieskończenie wiele naszych aniołów w jedno słowo maszyny. Komputer będzie mógł wykonać wówczas zgodnie ze swymi ograniczonymi regułami lo-

gicznymi pewną sensowną skończoną liczbę operacji na słowach, które zastępują zbiory nieskończone, tak samo jak robi to ręcznie matematyk. Zazwyczaj będzie to nieadekwatne. Matematyk wymaga od komputera, by „przechodził do granicy", by wybierał podciągi nieskończone i by korzystał z pewnika wyboru. We wszystkich takich przypadkach będzie musiał nadać słowom maszynowym nowe znaczenie, a z tym jest wiele kłopotu. Nic więc dziwnego, że większość nas może liczyć tylko na własne pomysły.

Pomimo tak pesymistycznych poglądów, komputer może odegrać pewną rolę w rozwoju matematyki. Wyróżniamy dwa rodzaje działalności w badaniach matematycznych: a) doskonalenie dróg wiodących od rozbudowanych działów matematyki do jej wysuniętych placówek oraz b) tworzenie takich właśnie nowych placówek. Biorąc pod uwagę drugą czynność, wydaje się, że istnieją obecnie dwa stanowiska dotyczące odkrywania nowych placówek. Najbardziej rozpowszechniony dziś pogląd daje pierwszeństwo uogólnianiu istniejących metod dowodów na przypadki ogólniejsze. Zmierza się przy tym raczej ku osłabianiu założeń niż ku wzmacnianiu wniosków, co sprzyja rozrostowi twierdzeń egzystencjalnych. Z punktu widzenia psychologicznego jest to uspokajające, gdyż jest mniej prawdopodobne, że napotka się na twierdzenia, których nie umie się udowodnić. Matematyka stałaby się pod takim reżimem rozszerzającym się światem ogólności i abstrakcji, rozciągającym się na wielowymiarowym krajobrazie bez rysów szczególnych, gdzie każdy kamień, na mocy definicji, jest bryłką złota.

Na szczęście istnieje inny pogląd. Daje on pierwszeństwo odkrywaniu jako sposobowi dojścia do nowych osiągnięć. Metoda ta służyła takim matematykom jak Euler i Gauss. Podczas mniej lub bardziej przemyślanych wypraw w ciemności świata matematyki mignął czasem komuś zarysy czegoś, co wydaje się niedosiężną górą; próbuje on przebić nową drogę ku niej. Czasem góra ta okaże się blisko leżącym głazem na równinie, częściej istnieje ona naprawdę, lecz zdobycie jej przekracza nasze siły. Potrzeba nowych, a nie starych metod, lecz brak ich. Prócz częstego braku powodzenia, przy stosowaniu tej metody napotyka się inne trudności. Jedną z nich jest rozpraszanie się: znajduje się swój własny mały świat pod każdym odwróconym kamieniem. Systematyczne badanie świata matematyki przemieniłoby ją w naukę klasyfikującą, gorszą od biologii. Należy umieć osądzić względną ważność wyniku. Jednym z kryteriów jest tutaj zasada, że twierdzenie o nieskończonej klasie obiektów matematycznych jest zazwyczaj ważniejsze niż twierdzenie o skończonej klasie, z tym jednak, że to ostatnie może być sprawdzone w skończonej liczbie kroków. Są tu jednak wyjątki; jednym z nich jest kontrprzykład. Dzięki jednemu kontrprzykładowi można zaoszczędzić niezliczone godziny bezowocnej pracy.

Komputery stosowano z dość dobrym skutkiem do znajdywania

kontrprzykładów, szczególnie w takich dziedzinach, jak algebra, teoria grup i teoria liczb. Gdy kontrprzykład jest już znaleziony, nie jest istotne, skąd on się wziął. Każdy może teraz sprawdzić, że domniemane twierdzenie jest fałszywe. Można teraz nawet być niewdzięcznym i nie wspominać o tym, że dzięki komputerowi lepiej znamy pewien fragment matematyki.

Przejdźmy teraz od tego najprostszego zastosowania komputera do następnego przypadku, mianowicie, gdy nie został znaleziony kontrprzykład, lecz wielka liczba N szczególnych przypadków danego twierdzenia została potwierdzona przez komputer. Gdy wzrasta N, wzrasta wiarygodność twierdzenia i to nieliniowo, jak powiedziałby Pólya. Chociaż tą drogą nie możemy uzyskać pełnego dowodu, istnieje zawsze możliwość, że szczegółowa analiza wielu przypadków szczególnych wykaże, dlaczego twierdzenie jest ogólnie prawdziwe. Pod właściwym kierunkiem, komputer może czasami przeprowadzić tę analizę sam. Tak więc komputer może stać się źródłem idei prowadzącej do poszukiwanego dowodu. I tutaj też nie ma żadnej potrzeby wspominania o pomocy z jego strony ([3]).

Może się zdarzyć jeszcze inaczej. Zamiast zdania, o prawdziwości którego chcemy się przekonać, zajmujemy się zbiorem przedmiotów matematycznych, na przykład algebr rzędu 32 z dzieleniem, i polecamy komputerowi zbadać je i wyniki podać w formie tablic. Znaczna część podstawowych klasycznych twierdzeń teorii liczb została odkryta na podstawie przykładów lub tablic. Dzisiaj można produkować tablice w takich ilościach, że ich wydawanie, a w pewnych przypadkach i korzystanie z nich, stanie się ekonomicznie niemożliwe. W tym przypadku można po prostu polecić, by komputer sam korzystał z nich (wewnątrz siebie). Na podstawie wyników podanych przez komputer można formułować nowe hipotezy, które mogą być interesujące i których dowód może nie być zbyt trudny. I w tym przypadku, ogłaszając nasze wyniki, nie musimy podawać, czyją one są zasługą.

Gibbs powiedział kiedyś, że algebra jest najwspanialszym środkiem zaoszczędzającym pracę, jaki kiedykolwiek wynaleziono. Nawet gdyby tak było, może to być bardzo męcząca robota. Niematematycy wiedzą lepiej od matematyków, że komputer jest doskonałym narzędziem do posługiwania się danymi nieliczbowymi. Tak powstaje możliwość powierzenia działań algebraicznych komputerowi zamiast człowiekowi. Po roku 1950 zaczęto to czynić od czasu do czasu. Układano programy różniczkowania funkcji elementarnych, działań na formalnych szeregach potęgowych, algebry funkcji wymiernych itd. Jeszcze bardziej złożone

---

([3]) Warto tu zauważyć, że przed dowodem prawa wzajemności liczb pierwszych Gauss sprawdził je ręcznie dla liczb pierwszych nie przekraczających 1000. Ileż czasu zaoszczędziłby w erze komputerów! (Przypisek Redakcji).

programy operowania symbolami są zapowiedziane na niedaleką przyszłość. Na początku XX wieku przestano zajmować się teorią niezmienników algebraicznych, gdyż konieczne tam manipulowanie symbolami przekroczyło możliwości człowieka. Ten rodzaj mozolnej pracy jest łatwy dla komputera. Przy naszych nowych komputerach mogą odżyć zainteresowania pewnymi działami algebry. W tego rodzaju zastosowaniach pewne zasługi trzeba będzie przypisać komputerowi, ze względu na jego odpowiedzialność.

Przejdźmy teraz do mechanicznego dowodzenia twierdzeń, co wiąże się z dalszym wzrostem odpowiedzialności. Dziennikarzowi kojarzy się to z przejęciem czynności matematyków przez maszyny i z licznymi szeregami bezrobotnych matematyków. Prawda jest jednak wprost przeciwna. W prawie wszystkich dotychczasowych przypadkach mechanicznego dowodzenia twierdzeń potrzeba było wielu godzin pracy ludzkiej i kilku minut pracy maszyny, by otrzymać dowód kilku dobrze znanych twierdzeń. Wyniki tego są triumfem pomysłowości człowieka.

Jeden sposób postępowania jest następujący. Aby udowodnić dane twierdzenie p wprowadza się do pamięci maszyny 1) zbiór aksjomatów, o którym wiadomo, że wystarcza do dowodu zdania p, 2) założenia twierdzenia i 3) zaprzeczenie jego tezy. Komputerowi pozostawia się wyciąganie wniosków z tych danych do czasu, gdy uzyska dwa wyniki sprzeczne. Nie jest jasne, jakie są reguły podstawowe takiej gry. Oczywiście nieuczciwie jest pomagać komputerowi. Z drugiej strony bez wbudowania jakiegoś zabezpieczenia narażamy się na stratę cennego czasu maszyny. Przypuśćmy, na przykład, że chcemy polecić maszynie udowodnić twierdzenie, że każda liczba naturalna jest sumą 4 kwadratów. Wprowadzamy więc do maszyny znane aksjomaty Peany. Jeden z tych aksjomatów mówi, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to $n+1$ też jest liczbą naturalną. Ponieważ przydzielony czas maszyny jest skończony, musimy uchronić maszynę przed wnioskowaniem, że 2 jest liczbą naturalną, a więc i 3 jest liczbą naturalną itd. Innym zagadnieniem wymagającym rozważenia jest: jaki dobór aksjomatów jest „fair"? Jeśli umyślnie wprowadzimy (do maszyny) aksjomaty, które w rzeczywistości nie są konieczne w dowodzie twierdzenia p, możemy wywołać opóźnienie w pracy komputera wskutek jego „rozpraszania się". Z drugiej strony, jeżeli wprowadzimy zbiór aksjomatów, o którym wiemy że jest minimalnym zbiorem potrzebnym do dowodu zdania p, to czy nie będzie to zbyt wyraźną wskazówką? Ta interesująca gra zaczyna coraz bardziej przypominać pedagogikę niż matematykę. Aby pokazać, co się może zdarzyć, gdy zastosujemy pewne środki ochronne i jednocześnie udzielimy pewnej pomocy, dam przykład opisany w roku 1964. Należało udowodnić twierdzenie: *Jeżeli kwadrat każdego elementu grupy jest jednością, to grupa jest przemienna.* Dowód maszynowy składał się z czternastu kroków, z których cztery

istotne wyglądają w naszej symbolice następująco:

$$ab = ab[(ba)(ba)] = a(bb)a(ba) = (aa)ba = ba.$$

Stanowiło to przykład pięknej sztuki programowania. Inne próby maszynowego dowodzenia twierdzeń dotyczyły fragmentów geometrii płaszczyzny i rachunku predykatów pierwszego rzędu.

Inny sposób dowodzenia twierdzeń, i to taki, z którym miałem do czynienia, opiera się na odmiennych regułach. Mamy tu do czynienia ze spółką człowiek—maszyna. Człowiek dostarcza maszynie najdokładniejszych danych, jakie ma o danej hipotezie i metodę dowodu, co do której sądzi, że okaże się owocna. Widzicie państwo, że w tym przypadku dowód nie jest znany temu człowiekowi. W rzeczywistości nie wie on, czy twierdzenie jest fałszywe oraz, czy jeżeli jest prawdziwe, to maszyna potrafi je udowodnić. Maszynie poleca się przeprowadzać kolejne etapy dowodu, jeśli potrafi, w przydzielonym czasie. Mogą stąd państwo wnioskować, że jest wiele tych kroków i że nie mogą być one wykonane na papierze. Zazwyczaj kroki te są nie tylko bardzo liczne, ale i powiązane między sobą w skomplikowany sposób. Wykorzystujemy tutaj nie tylko szybkość komputera, ale i jego strukturę logiczną, która pozwala mu śledzić i modyfikować jego skomplikowany program w stopniu przekraczającym możliwości ludzkie. Twierdzenia tego rodzaju trudno spotkać w tych bezbarwnych działach matematyki, w których rzadkie są skomplikowane dowody. Nieskończenie wiele takich twierdzeń spotkać można jednakże na przykład w teorii liczb. Nadzwyczaj prostym przykładem takiego twierdzenia jest następujące: *Każdy zbiór pięciu kolejnych liczb nieparzystych zawiera liczbę pierwszą lub liczbę złożoną, podzielną przez liczbę pierwszą nie mniejszą od* 37. Twierdzenia tego nie da się polepszyć. Dowód tego twierdzenia składa się z 2048 kroków i jest zbyt trudny, by móc go prześledzić w szczegółach. Komputery znalazły znacznie bardziej skomplikowane dowody twierdzeń dotyczących rozmieszczenia reszt potęgowych dla modułu będącego liczbą pierwszą. W takich przypadkach schemat dowodu może rozgałęziać się na miliony drobnych kroków, nawet gdy maszynie udzielimy różnych heurystycznych wskazówek i zapełnimy jej pamięć różnymi instrukcjami. Programy takie mogą stanowić interesujący materiał badawczy dla archeologa w dalekiej przyszłości. By nawiązać do rzeczywistości, przytoczę twierdzenie, którego dowód przekracza możliwości nie tylko zespołów ludzkich, ale i komputerów, które znaleźć można w wielkich uniwersytetach. Rozumiem przez to, że dowód kosztowałby kilka tysięcy dolarów.

Twierdzenie dotyczy rozmieszczenia tak zwanych reszt piątego stopnia modulo liczba pierwsza p, tzn. liczb przystających do piątych potęg liczb całkowitych mod p. Twierdzenie, które należy udowodnić, jest następujące: *Istnieje taka stała absolutna C, że dla każdej liczby pierw-*

szej $p > 3331$ *istnieją trzy reszty piątego stopnia modulo* p, *będące kolejnymi liczbami naturalnymi mniejszymi od* C. Zastrzeżenie, że $p > 3331$ jest konieczne, ponieważ liczba pierwsza $p = 3331$ nie ma takiego zbioru trzech reszt piątego stopnia. Wiemy, że jeżeli liczba C istnieje, to musi być większa od 76613, lecz dziwiłbym się, gdyby była mniejsza od miliona.

Wróćmy na chwilę do wspomnianego poprzednio pierwszego rodzaju działalności badawczej w matematyce, tj. tworzenia lub ulepszania więzi między starymi i nowymi działami matematyki. Mechanizacja tego rodzaju działalności wydaje się, przynajmniej obecnie, nieefektywna lub zbyt trudna. Jednakże już w przypadku pionierskiej pracy Gelerntera w zakresie geometrii płaszczyzny widać możliwość uzyskiwania różnych dowodów przez danie priorytetów różnym metodom heurystycznym. W przeciągu następnych dwudziestu lat postęp może być tak duży, że umożliwi tworzenie pomostów między A i B, przechodzących przez zadane punkty C i D, tak jak teraz robi się to przy ustalaniu programów studiów. W tym okresie niewątpliwie mechaniczne dowodzenie twierdzeń pójdzie naprzód, przekształcając się w mechaniczne tworzenie teorii. Wszystko to będzie się działo oczywiście pod kierownictwem matematyków.

Dla bliższej przyszłości widać co najmniej dwie interesujące możliwości postępu mechanizacji matematyki. Jedną z nich jest możliwość zdalnego korzystania z maszyny przez wielu użytkowników na raz. Posiadając język dostatecznie ogólny, by operować symbolami i pewnym prostym aparatem numerycznym, taki system może stworzyć warunki pracy niemal porównywalne z tymi, do których jest przyzwyczajony przeciętny matematyk. Błyskawiczna możliwość przerzucania się takiego systemu pozwoli matematykowi skoncentrować się na jednym zagadnieniu na raz zamiast na pięciu czy sześciu, których wymaga w innym przypadku skuteczna działalność.

Inną możliwością wymagającą szczegółowego rozpatrzenia jest konstruowanie urządzeń szczególnego przeznaczenia, do specjalnych badań matematycznych. Ekonomiczne uzasadnienie nawet małych projektów tego rodzaju wydaje się na pierwszy rzut oka wątpliwe. Są jednakże sposoby obejścia tej przeszkody. Każde nowe osiągnięcie techniki elektronicznej czyni przestarzałym i prawie bezwartościowym to, co do tej pory było najlepsze z osiągalnego w tej dziedzinie. Dostępna jest niewolnicza praca studentów wydziałów elektrycznych. Jako ilustrację tego przytoczę fakt, że Delay Line Sieve [4] zbudowany został w ten właśnie sposób w Uniwersytecie Kalifornijskim dla sporadycznych zastosowań w teorii liczb. Pomimo swej stosunkowo prostej budowy może ta maszyna wykonywać 31 dzieleń, badać reszty z tych dzieleń i decydować co robić dalej — wszystko w przeciągu jednej milionowej sekundy.

---

[4] Nazwa maszyny (przypisek tłumacza).

Na koniec pragnąłbym sformułować krótko kilka uwag o ogólnym wpływie mechanizacji na matematykę w niezbyt odległej przyszłości. Mechanizacja daje pierwszeństwo raczej praktyce a nie teorii, czynom a nie słowom, wyraźnym odpowiedziom a nie twierdzeniom egzystencjalnym, definicjom sformalizowanym raczej niż o charakterze behawiorystycznym, zjawiskom lokalnym a nie globalnym, ograniczonym a nie nieskończonym, konkretom a nie abstrakcji, i można by powiedzieć, że uwypukla raczej stronę naukową niż artystyczną. Człowiek w tej symbiozie powinien dostarczyć wyobraźni, oceny, krytycyzmu, a także kontroli — tak jest, kontroli, aby w ten sposób umożliwić dalsze poszukiwanie prawdy w matematyce. Komputer jest instrumentem w naszym obserwatorium, oknem, przez które widać surowe fakty świata matematyki. Byłoby przyjemnie móc przewidzieć, że wraz z upływem czasu użycie tego instrumentu będzie się upowszechniać i istota matematyki ulegnie przeobrażeniu z niebezpiecznie niepewnej i płynnej sztuki, do jakiej pozornie dzisiaj się zbliża, w coraz bardziej strukturalną i sprecyzowaną naukę.

Jest jeszcze druga możliwość. Już teraz widzimy, jak z matematyki wyodrębnia się nowa nauka, zwana „nauką o komputerze" (5). Zawiera ona w sobie dosyć techniki, by odstraszyć topologów czy specjalistów od analizy funkcjonalnej. Wkrótce powstanie mur odgraniczający ją od matematyki. Mówi się, że wynalezienie fotografii uwolniło malarstwo z obowiązku przedstawiania natury i popchnęło je ku impresjonizmowi, a w końcu ku abstrakcjonizmowi. Wydaje mi się, że taka też będzie przyszłość matematyki. Dotychczas mamy Ansela Adamsa (6). Ciekawe byłoby usłyszeć, co na ten temat będzie powiedziane na siedemdziesiątym szóstym wykładzie poświęconym pamięci Gibbsa.

---

(5) W oryginale „computer science" (przypisek tłumacza).

(6) Ansel Adams — amerykański fotografik, znany ze zdjęć o tematyce przyrodniczej (przypisek tłumacza).