ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. SZARSKI (Kraków)

Mirosław Krzyżański
31. X. 1907 - 1. XII. 1965

Mirosław Krzyżański urodził się 31 października 1907 r. w Siergiejewie (ZSRR). W roku 1921 wstąpił do III klasy w gimnazjum im. J. Lelewela w Wilnie, gdzie w r. 1927 złożył egzamin dojrzałości. W tym samym roku rozpoczął studia matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Stefana Batorego w Wilnie. Dyplom magistra filozofii w zakresie matematyki uzyskał na Uniwersytecie Wileńskim w r. 1931. W latach 1932-1941 pracował jako nauczyciel matematyki w szkołach średnich w Drohiczynie nad Bugiem i w Wilnie, z przerwą w roku szkolnym 1934/35, kiedy to w związku z uzyskaniem stypendium Funduszu Kultury Narodowej udał się na studia specjalne do Warszawy i do Lwowa. W czasie pobytu we Lwowie nawiązał współpracę z Juliuszem Schauderem, czego wynikiem była wspólna publikacja na temat równań hiperbolicznych [5]. Stopień doktora filozofii w zakresie matematyki, na podstawie rozprawy pt.: *O uogólnionych funkcjach bezwzględnie ciągłych dwóch zmiennych* [2], został mu nadany w r. 1934 na Uniwersytecie Wileńskim. W okresie okupacji niemieckiej w latach 1941-1944 zajmował się w Wilnie udzielaniem lekcji z matematyki. W ramach repatriacji z ZSRR przybył w r. 1945 do Krakowa i został starszym asystentem Politechniki Śląskiej, a następnie adiunktem Politechniki Krakowskiej. W r. 1948 habilitował się na Uniwersytecie Jagiellońskim, przedstawiając rozprawę habilitacyjną pt.: *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales* [9], [10]. W r. 1949 uzyskał nominację na profesora nadzwyczajnego na Politechnice Krakowskiej a w r. 1955 został przeniesiony na stanowisko profesora nadzwyczajnego przy Katedrze Funkcji Analitycznych Uniwersytetu Jagiellońskiego. Nominację na profesora zwyczajnego UJ otrzymał w roku 1960, a w r. 1962 objął kierownictwo Katedry Funkcji Analitycznych UJ. Od roku 1949 pracował jako samodzielny pracownik naukowy w Dziale Równań Różniczkowych Instytutu Matematycznego PAN.

Obok wytężonej pracy naukowej prowadził profesor Krzyżański owocną działalność dydaktyczną ze studentami najpierw na Politechnice

Krakowskiej, a następnie na Uniwersytecie Jagiellońskim, gdzie między innymi wykładał analizę matematyczną, równania różniczkowe cząstkowe, równania całkowe, rachunek wariacyjny i rachunek prawdopodobieństwa.

W ramach Instytutu Matematycznego PAN kierował seminarium z równań różniczkowych fizyki i techniki. Na seminarium to licznie uczęszczali zarówno matematycy, jak i fizycy oraz inżynierowie; stało się ono znakomitą platformą dla nawiązywania współpracy między matematykami i przedstawicielami nauk przyrodniczych i technicznych. O potrzebie i aktualności seminarium poświęconego wspomnianej tematyce świadczy najlepiej fakt, że seminarium profesora Krzyżańskiego jest nadal kontynuowane pod niezmienionym tytułem i przy niezmienionej problematyce.

Profesor Krzyżański położył duże zasługi w dziele kształcenia młodych pracowników naukowych. Terenem, na którym młodzi matematycy pracowali pod jego kierunkiem, było seminarium prowadzone w ramach Katedry Funkcji Analitycznych UJ, jak również wspomniane wyżej seminarium w Instytucie Matematycznym PAN. Był promotorem w kilkunastu przewodach doktorskich, a trzy osoby spośród jego uczniów i współpracowników uzyskały stopień docenta.

Profesor Krzyżański utrzymywał żywe kontakty naukowe z matematykami zagranicznymi, zwłaszcza we Włoszech, Rumunii, Czechosłowacji i na Węgrzech. Do krajów tych wyjeżdżał kilkakrotnie, zapraszany na wykłady i konferencje.

Nie szczędząc w pracy naukowej i dydaktycznej swych nadwyrężonych chorobą sił, poświęcał czas również na pracę organizacyjną w Uniwersytecie Jagiellońskim, pełniąc w latach 1958/1959 i 1959/1960 funkcje prodziekana Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UJ. Był także prezesem Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego w latach 1959/1960 oraz 1960/1961.

Będąc w pełni sił twórczych zmarł nagle w dniu 1 grudnia 1965 roku i został pochowany na cmentarzu rakowickim w Krakowie. Matematyka polska straciła w osobie profesora Krzyżańskiego świetnego specjalistę w dziedzinie równań różniczkowych cząstkowych, wybitnego uczonego i nauczyciela.

Twórczość naukowa profesora Krzyżańskiego koncentrowała się wprawdzie na problemach z dziedziny równań różniczkowych fizyki i techniki, tj. równań cząstkowych rzędu drugiego, jednak w pierwszym okresie swej pracy badawczej zajmował się on zagadnieniami z teorii funkcji rzeczywistych.

I. Funkcje rzeczywiste. W pracy [1] podany jest warunek konieczny i wystarczający na to, by zachodził klasyczny wzór na różniczkowanie

względem parametru pod znakiem całki w przypadku, gdy funkcja podcałkowa jest funkcją o wahaniu skończonym względem parametru. Praca doktorska [2] oraz prace [3] i [7] zajmują się uogólnieniem pojęcia całki Denjoy na funkcje dwóch zmiennych niezależnych. Własności pochodnych cząstkowych funkcji dwóch zmiennych, o wahaniu skończonym w sensie Hardy'ego, są przedmiotem pracy [6].

II. Równania typu hiperbolicznego. Pod wpływem Juliusza Schaudera zainteresowania Krzyżańskiego skierowały się w stronę równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Pierwszą pracą z tej dziedziny była praca [4], w której uzyskane zostały oszacowania typu Friedrichsa i Lewy'ego dla rozwiązania liniowego równania hiperbolicznego. Rozwiązanie wewnątrz pewnego stożka zostało oszacowane przez jego wartości na pobocznicy stożka. Owocem współpracy z Schauderem była publikacja [5], w której przy wykorzystaniu oszacowań uzyskanych przez Krzyżańskiego autorzy wykazali, za pomocą twierdzenia Schaudera o punkcie niezmienniczym, istnienie rozwiązania problemu mieszanego dla quasi-liniowego równania hiperbolicznego o nieanalitycznych współczynnikach.

III. Równania typu parabolicznego i eliptycznego. Główny trzon spuścizny naukowej profesora Krzyżańskiego stanowią publikacje z dziedziny liniowych równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego, typu parabolicznego i eliptycznego. Można tu wyróżnić pewne grupy zagadnień, według których zostaną omówione dalsze prace.

a) *Jednoznaczność, istnienie i zasada ekstremum dla rozwiązań problemów granicznych.* W tym kręgu zagadnień, rozwijając idee pochodzące od M. Piconego, stosował Krzyżański z powodzeniem metodę tzw. dzielników tłumiących. Dla zilustrowania tej metody weźmy pod uwagę równanie typu parabolicznego

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,u_{x_ix_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\,u_{x_j} + c(t,x)\,u = u_t, \tag{1}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, z warunkiem początkowym

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Problem Cauchy'ego dla równania (1) z warunkiem (2), zadanym dla dowolnych x, polega na wyznaczeniu w warstwie $0 < t < T$ rozwiązania równania (1), ciągłego dla $0 \leqslant t < T$ i spełniającego warunek (2). Oznaczmy przez E_2 klasę funkcji $u(t,x)$, określonych dla x dowolnych i spełniających warunek: istnieją stałe dodatnie M i K takie, że

$$|u(t,x)| \leqslant M\exp(K|x|^2). \tag{3}$$

Otóż dla wykazania, że wspomniany problem, przy $\varphi \equiv 0$, ma w klasie E_2 tylko rozwiązanie zerowe, konstruuje się (przy stosownych założeniach o współczynnikach równania) tzw. dzielnik tłumiący, tj. funkcję $W(t,x) > 0$ klasy C^2 o następujących własnościach: jeżeli położymy $v(t,x) = u(t,x)\,W(t,x)^{-1}$, to w równaniu (analogicznym do (1), tylko z innymi współczynnikami b_j' i c'), które spełnia $v(t,x)$, współczynnik c' jest ujemny oraz $v(t,x) \to 0$, gdy $|x| \to \infty$. Wówczas, wobec ujemności c', dla $v(t,x)$ stosuje się w obszarach ograniczonych zasada ekstremum. Stąd, wobec $v(0,x) = 0$ oraz wobec znikania $v(t,x)$ w nieskończoności, otrzymuje się $v \equiv 0$ czyli $u \equiv 0$. W licznych pracach omawianej grupy stosuje Krzyżański opisaną wyżej metodę.

W pracach [8], [9], [10] oraz w pracy [38], która jest streszczeniem odczytu wygłoszonego na uniwersytecie w Bari, dowodzi autor, przy stosownych założeniach o współczynnikach równania, że w klasie E_2 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu Cauchy'ego i pierwszego problemu Fouriera. Wyniki te stanowią uogólnienie rezultatów uzyskanych przez M. Piconego oraz przez A. Tichonowa dla równania ciepła. W pracy [11] zostało udowodnione twierdzenie o istnieniu rozwiązania problemu Dirichleta dla liniowego równania eliptycznego w obszarze nieograniczonym, przy założeniu, że w obszarach ograniczonych problem ma rozwiązanie. Praca [12] poświęcona jest zagadnieniu istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu Dirichleta dla liniowego równania eliptycznego przy nieciągłych wartościach na brzegu. Podobne zagadnienia dla równania parabolicznego stanowią przedmiot pracy [13], w której wykazane zostało twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania z nieciągłymi wartościami początkowymi na charakterystyce. Istnieniem i jednoznacznością rozwiązań tzw. drugiego i trzeciego problemu brzegowego dla równań eliptycznych i parabolicznych w obszarach ograniczonych lub nieograniczonych zajmuje się autor w pracach [15] i [26]. W pracy [26] jest również rozważana zasada ekstremum dla rozwiązania równania parabolicznego. Praca [17] powstała w związku z badaniami prowadzonymi przez J. Litwiniszyna w zakresie hydrodynamiki. Zostały w niej wykazane jednoznaczność i istnienie rozwiązania problemu brzegowego dla równania ciepła w warstwie nieograniczonej równoległej do osi czasu. Jednoznacznością i istnieniem rozwiązania problemu Dirichleta w półprzestrzeni zajmuje się praca [20]. Pewne oszacowania oraz zasada ekstremum dla rozwiązań klasy E_2 równania parabolicznego w obszarach nieograniczonych podane są w pracy [23]. Podobne wyniki zostały uzyskane w pracach [24], [29] i [30], przy założeniu ogólniejszym, że współczynniki $b_j(t,x)$ i $c(t,x)$ w równaniu (1) mogą być nieograniczone, mając określony wzrost przy $|x| \to \infty$. Jeżeli w powyżej przytoczonej definicji klasy E_2 zastąpimy nierówność (3) przez nierówność

$$u(t,x) \geqslant -M\exp(K|x|^2),$$

to otrzymamy klasę oznaczoną przez E_2. Otóż, w pracy [33] została wykazana jednoznaczność rozwiązania problemu Cauchy'ego w klasie E_2 dla równania parabolicznego (1). W pracy [34] zawarte jest streszczenie odczytu plenarnego, wygłoszonego na konferencji „Equadiff" w Pradze w roku 1962, i zawierającego przegląd wyników dotyczących rozwiązań równań parabolicznych w obszarach nieograniczonych.

b) *Rozwiązanie podstawowe równania parabolicznego.* Osobną grupę wśród publikacji Krzyżańskiego stanowią prace na temat rozwiązania podstawowego równania parabolicznego. Pierwsze pozycje [14] i [16] z tego zakresu dotyczą następującego twierdzenia: każde rozwiązanie $u(t,x)$ równania ciepła w warstwie $0 \leqslant t < T$, spełniające warunki

$$1)\ u \geqslant 0, \quad 2)\ u(0,x) = 0 \text{ dla } x \neq 0, \quad 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx = 2\sqrt{\pi}$$

jest rozwiązaniem podstawowym. Podobne zagadnienie zostało rozstrzygnięte dla nieujemnych rozwiązań ogólnego równania parabolicznego (1) w pracach [36] i [39]. Ta ostatnia praca stanowi streszczenie odczytu wygłoszonego w uniwersytecie w Bari. Autor pokazał mianowicie, że rozwiązanie spełniające warunki 1) i 2) jest, z dokładnością do stałego czynnika, rozwiązaniem podstawowym. Dalsze prace dotyczą konstrukcji rozwiązania podstawowego. I tak, w pracy [18] autor konstruuje rozwiązanie podstawowe dla ogólnego równania parabolicznego o dwóch zmiennych niezależnych za pomocą skonstruowanego przez J. Hadamarda rozwiązania dla równania specjalnego. Twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i nieujemności rozwiązania podstawowego dla ogólnego równania parabolicznego (1) są przedmiotem pracy [25]. Współczynnik $c(t,x)$ może tu być nieograniczony, spełniający nierówność

$$|c(t,x)| \leqslant A^2|x|^2+B. \tag{4}$$

Analogiczne wyniki zostały uzyskane w publikacji [31] przy słabszym założeniu, że $c(t,x)$ spełnia nierówność postaci (4) po opuszczeniu z lewej strony znaku bezwzględnej wartości.

c) *Asymptotyczny przebieg rozwiązań równania parabolicznego.* Pozycja [19] zawiera twierdzenie o istnieniu granicy przy $t \to +\infty$ dla rozwiązania pierwszego problemu Fouriera w warstwie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, w przypadku równania parabolicznego o dwóch zmiennych. Poza tym pokazano, że granica spełnia odpowiednie równanie eliptyczne. W pracy [21] zostały otrzymane podobne wyniki dla rozwiązania określonego w ćwiartce $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Analogiczne twierdzenia przedstawione są w pracy [40], stanowiącej streszczenie wykładu wygłoszonego na uniwersytecie w Bari. Praca [22] zajmuje się przebiegiem asymptotycznym przy $t \to +\infty$ potencjałów cieplnych i całki Fouriera-Poissona dla równania ciepła.

Problemy analogiczne do rozważanych w publikacjach [19] i [21] stanowią przedmiot pracy [27] w przypadku trzeciego problemu Fouriera.

IV. Prace związane z rachunkiem prawdopodobieństwa. Żywe zainteresowania Krzyżańskiego rachunkiem prawdopodobieństwa, a w szczególności równaniami różniczkowymi i całkowymi, które występują w teorii prawdopodobieństwa, znalazły swój wyraz w kilku publikacjach. Pozycja [28] dotyczy twierdzenia orzekającego, że funkcja graniczna rozkładu dla ciągu procesów stochastycznych z czasem dyskretnym spełnia równanie różniczkowe dyfuzji pod działaniem sił zewnętrznych. W pracy [32] została podana metoda prowadząca do wyznaczenia pewnej klasy rozwiązań równania całkowego Smoluchowskiego. Zasada maksimum i jej konsekwencje dla rozwiązania równania różniczkowo-całkowego procesu stochastycznego Markowa są przedmiotem prac [35] i [37].

V. Książki i skrypty. Pozycją o wyjątkowym znaczeniu w spuściźnie naukowej profesora Krzyżańskiego jest jego książka *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego* [43], [44]. Jako pierwszy zarys książki powstał skrypt *Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu* [41], [42]. Pomyślana jako podręcznik jest książka Krzyżańskiego właściwie pierwszą monografią naukową i podręcznikiem z zakresu równań różniczkowych cząstkowych w polskim piśmiennictwie matematycznym. Jeśli zaś chodzi o obszerny zakres i bogactwo materiału, to książka ta nie ma równej sobie w światowej literaturze matematycznej. Napisana właściwym autorowi stylem, z wielką precyzją i z możliwie wyczerpującym omówieniem tematu, książka przedstawia w ujęciu metod klasycznej analizy matematycznej teorię liniowych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Tuż przed śmiercią profesor Krzyżański ukończył przygotowywanie nowej wersji swej książki, która ukaże się w języku angielskim.

Bibliografia prac

MIROSŁAWA KRZYŻAŃSKIEGO

[1] *Sur la dérivation de l'intégrale par rapport au paramètre*, Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, 26 (1933), str. 96-104.

[2] *O uogólnionych funkcjach bezwzględnie ciągłych dwóch zmiennych*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 6 (1934), str. 1-35.

[3] *Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris (1934), str. 2058-2060.

[4] *Sur les évaluations pour une équation du type hyperbolique*, Studia Mathematica, 5 (1935), str. 151-154.

[5] (und J. Schauder) *Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben*, Studia Mathematica, 6 (1936), str. 162-189.

[6] *Sur les fonctions à variation bornée au sens de Hardy*, Prace Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Wilnie, Wydział Nauk Matematycznych i Przyrodniczych, 12 (1937), str. 1-3.

[7] *Sur l'extension de l'opération intégrale de Denjoy aux fonctions de deux variables*, Prace Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Wilnie, Wydział Nauk Matematycznych i Przyrodniczych, 13 (1938), str. 1-11.

[8] *Sur les solutions des équations du type parabolique déterminées dans une région illimitée*, Bulletin of the American Mathematical Society, 47 (1941), str. 911-915.

[9] *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 18 (1945), str. 145-156.

[10] *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 20 (1947), str. 7-9.

[11] *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze ficiche, matematiche e naturali, 4 (1948), str. 408-416.

[12] *Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence*, Studia Mathematica, 11 (1949), str. 95-125.

[13] *Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 23 (1950), str. 95-111.

[14] *Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 8 (1950), str. 193-199.

[15] *Sur le second problème aux limites pour les équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique et parabolique dans un domaine non borné*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 5 (1951), str. 1-21.

[16] *Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur — note complémentaire*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 13 (1952), str. 24-25.

[17] *O zagadnieniu Fouriera w warstwie nieograniczonej*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 5 (1953), str. 584-588.

[18] *Sur la solution fondamentale de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 40 (1955), str. 89-97.

[19] *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation du type parabolique*, Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 4 (1956), str. 247-251.

[20] *O rozwiązaniu zagadnienia Dirichleta w półprzestrzeni*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Matematyka, Fizyka, Chemia, 3 (1957), str. 41-48.

[21] *Recherches concernant l'allure des solutions de l'équation du type parabolique lorsque la variable du temps tend vers l'infini*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 23 (1957), str. 28-32.

[22] *Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson*, Annales Polonici Mathematici, 3 (1957), str. 288-299.

[23] *Evaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné*, Annales Polonici Mathematici, 4 (1957), str. 93-97.

[24] *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 7 (1959), str. 131-135.

[25] (et A. Szybiak) *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 27 (1959), str. 1-10.

[26] *Sur l'unicité des solutions des second et troisième problème de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique*, Annales Polonici Mathematici, 7 (1960), str. 201-208.

[27] *Sur l'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs à une équation linéaire parabolique*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 28 (1960), str. 37-43.

[28] (i B. Choczewski) *O równaniu dyfuzji pod działaniem siły zewnętrznej i o równaniu Kolmogorowa*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Prace Matematyczne, Zeszyt 6 (1961), str. 5-20.

[29] *Evaluations des solutions de l'équation linéaire du type parabolique à coefficients non bornés*, Annales Polonici Mathematici, 11 (1962), str. 253-260.

[30] *Une propriété des solutions de l'équation linéaire du type parabolique à coefficients non bornés*, Annales Polonici Mathematici, 12 (1962), str. 209-211.

[31] *Sur la solution fondamentale de l'équation linéaire normale du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 32 (1962), str. 326-330, 471-476.

[32] *Certains opérateurs fonctionnels et l'équation intégrale de Smoluchowski*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 14 (1962), str. 359-370.

[33] (et P. Besala) *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, 33 (1962), str. 230-236.

[34] *Solutions of a linear second order equation of parabolic type defined in an unbounded domain*, Differential equations and their applications, Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962, str. 55-63.

[35] *Principe d'extremum relatif aux solutions de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien purement discontinu*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 11 (1963), str. 531-534.

[36] *Sur les solutions non négatives de l'équation linéaire, normale parabolique*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, 9 (1964), str. 393-408.

[37] *Principe d'extremum relatif aux solutions de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien mixte*, Annales Polonici Mathematici, 16 (1965), str. 365-370.

[38] *Sur l'unicité et l'existence des solutions des problèmes aux limites relatifs aux équations paraboliques*, Conferenze del seminario di matematica dell'Università di Bari, 1964, str. 3-11.

[39] *Propriétés des solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique*, Conferenze del seminario di matematica dell'Università di Bari, 1964, str. 12-19.

[40] *Sur l'allure asymptotique des solutions des équations paraboliques*, Conferenze del seminario di matematica dell'Università di Bari, 1964, str. 20-28.

Książki i skrypty

[41] *Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu*, część I, (skrypt), Kraków 1951, 226 stron.

[42] *Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu*, część II, (skrypt), Kraków 1952, 337 stron.

[43] *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, część I, Warszawa 1957, 617 stron.

[44] *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, część II, Warszawa 1962, 445 stron.