ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z. KRYGOWSKA (Kraków)

„Traktat z Echternach" o nauczaniu geometrii

Gorąca dyskusja, tocząca się przede wszystkim na zachodzie, na temat nauczania geometrii skoncentrowała się w ostatnich latach dokoła dwóch podstawowych koncepcji, reprezentowanych przez dwóch wybitnych matematyków francuskich: G. Choqueta i J. Dieudonnégo. Koncepcje te rozwinięte w dwóch książkach (1), które ukazały się prawie równocześnie w roku 1964, czytelnik Wiadomości Matematycznych poznał w bardzo ogólnym zarysie z kilku artykułów i recenzji (2). Można je z grubym przybliżeniem i uproszczeniem scharakteryzować w sposób następujący.

Według G. Choqueta dla matematyka najelegantszy i najgłębszy sposób studiowania przestrzeni euklidesowej, to studium przestrzeni wektorowej nad ciałem R, zaopatrzonej w dwuliniową formę symetryczną $u \cdot v$ taką, że $u \cdot u > 0$ dla każdego $u \neq 0$.

W nauczaniu natomiast należy wyróżnić trzy etapy. Nauczanie dzieci do lat dwunastu może i powinno być oparte na obserwacji i na abstrahowaniu pojęć geometrycznych z doświadczenia. Od trzynastego do szesnastego roku młodzież zapoznaje się z dedukcyjnym kursem geometrii opartym na bardzo mocnych i intuicyjnych aksjomatach, w których równoległość i symetria odgrywają zasadniczą rolę. W kursie tym konstruuje się w ramach geometrii przestrzeń wektorową, ale nie wychodzi się od razu od aksjomatycznej definicji tej przestrzeni. Młodzież w wieku lat 17 powinna już i może ująć geometrię jako szczególny model tej struktury.

---

(1) G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris 1964.
J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964.

(2) G. Choquet, *Pewna aksjomatyka geometrii elementarnej odpowiednia dla celów nauczania*, Wiadomości Matematyczne 5 (1962), str. 87-108.
Z. Krygowska, *Dyskusja o nauczaniu geometrii na dorocznym kongresie nauczycieli matematyki szkół średnich w Belgii*, Wiadomości Matematyczne 6 (1962), str. 17-22.
Z. Krygowska, *Nauczanie geometrii w jednolitej matematyce współczesnej*, Wiadomości Matematyczne 6 (1962), str. 23-42.
S. Straszewicz, G. *Choquet, L'Enseignement de la géométrie* (recenzja), Wiadomości Matematyczne 9 (1967), str. 319-322.

J. Dieudonné protestuje przeciw wprowadzaniu do nauczania etapu pośredniego, sugerowanego przez G. Choqueta, to jest aksjomatyki geometrii, stanowiącej podstawę do konstrukcji modelu geometrycznego przestrzeni liniowej i wektorowej (według G. Choqueta dla uczniów od 13 do 16 lat). Według J. Dieudonnégo nauczanie geometrii powinno obejmować tylko dwa etapy: naiwne i na wpół eksperymentalne, intuicyjne oraz na wpół rozumowe nauczanie geometrii w klasach niższych oraz porządne aksjomatyczne studium przestrzeni liniowej, następnie zaś wektorowej euklidesowej w klasach następnych. Sprzeciwia się on wszelkim kompromisom między systemem Euklidesa-Hilberta a — jak pisze — „nagą aksjomatyką algebry liniowej"(3). Aksjomatykę proponowaną przez Choqueta określa jako „niepotrzebną i szkodliwą"(4), widząc w tym „dziwne zjawisko uczuciowego przywiązania do tradycyjnego układu aksjomatów"(5). Między oboma matematykami dochodziło w toku dyskusji na te tematy do bardzo ostrych starć, te same starcia powtarzały się w dyskusjach ich zwolenników i przeciwników, przy czym zwolennicy koncepcji Choqueta i kompromisu (na pewnym etapie nauczania) między geometrią klasyczną a geometrią wcieloną do algebry, nazywani są przez zwolenników koncepcji Dieudonnégo „reakcjonistami".

W podjętej przez G. Papy'ego w Belgii reformie programowej uwzględnia się w pewnym sensie (choć w innym ujęciu aksjomatycznym) sugestię Choqueta w klasach uczniów 12- i 13-letnich. Kurs geometrii jest tu zupełnie dedukcyjny. Rozwija się precyzyjnie geometrię afiniczną, konstruuje przestrzeń liniową wektorów w sensie geometrycznym, wprowadza metrykę za pomocą iloczynu skalarnego (6). W następnej klasie odbywa się „odwrócenie systemu". Twierdzenia udowodnione poprzednio o wektorach geometrycznych przyjmuje się za definicję przestrzeni liniowej i od tego momentu cała matematyka szkolna znajduje w tej definicji swoją bazę. Eksperymenty Papy'ego, prowadzone w wielu szkołach przy poparciu władz oświatowych (powołanie i finansowanie ośrodka takich badań w Brukseli), są szeroko propagowane i dyskutowane na całym świecie, stanowiły też jeden z punktów narady Sekcji Dydaktycznej kongresu matematyków w Moskwie w roku 1966. G. Papy sądzi, że zharmonizował w swoim systemie obie przeciwstawne tendencje, z tym, że obniżył próg postulowany przez G. Choqueta o dwa lata.

Koncepcja nauczania geometrii była przedmiotem dyskusji w toku dorocznej konferencji Międzynarodowej Komisji do Studiowania i Ulepsza-

(3) J. Dieudonné, op. cit. str. 17.

(4) tamże.

(5) tamże.

(6) G. Papy, *Mathématique Moderne* 1, Didier, Bruxelles 1963, *Mathématique Moderne 2*, Didier, Bruxelles 1965, *Mathématique Moderne 5*, 1966, *Vectorial Euclidien plan*, Ministère de l'Education Nationale et de la Culture, 1965.

nia Nauczania Matematyki w Rawennie w roku 1965. W konferencji tej wzięli udział matematycy i dydaktycy matematyki 14 krajów (w tym także Polski). Po bardzo burzliwych naradach przyjęto ostatecznie na wniosek profesora A. Revuz rezolucję wyrażającą kompromis między koncepcjami G. Choqueta i J. Dieudonnégo. W tym samym roku na konferencji Międzynarodowej Komisji do Nauczania Matematyki w Echternach tekst rezolucji raweńskiej został zgodnie podpisany przez obu tych matematyków. Odtąd nadano jej nazwę „traktatu z Echternach", uznawanego ogólnie za dydaktyczną wytyczną do konstruowania programów geometrii w nauczaniu młodzieży od lat 12 do 18.

Konstrukcja programu geometrii w szkole polskiej odbiega od tych wytycznych w tym sensie, że faza przygotowawcza (geometria, z której ma się wyłonić idea przestrzeni wektorowej) jest przesunięta o trzy lata w górę w stosunku do koncepcji Papy'ego oraz że pojęcia algebraiczne są tu wprowadzane tylko niejawnie. Być może, że pewne z tych zagadnień będą mogły znaleźć swoją realizację w kursie geometrii analitycznej, który, wobec pełnego rozwinięcia struktury przestrzeni wektorowej w algebrze wektorów w nauce geometrii płaszczyzny, mógłby być potraktowany nowocześnie. Nie można jednak ukrywać tego, że w opinii zwolenników Dieudonnégo i Papy'ego pozostajemy jeszcze niewątpliwie na pozycjach „reakcyjnych". Faza ta wydaje się jednak konieczna jako punkt wyjścia do dalszego etapu reformy.

Poniżej cytujemy pełny tekst „traktatu z Echternach" (7).

1. Wprowadzenie do nauczania młodzieży w wieku od 10-11 lat do 18 lat pojęć algebry współczesnej jest realizowane bez większych trudności. Pojęcia te wnoszą ścisłość i jasność do dziedziny, w której początkujący dysponował tylko wprawą opartą bardziej na rutynie niż na myśleniu. Pojęcia te wzbudzają zainteresowanie nauką, w której dotąd często panowała nuda.

Na odwrót, wysiłki w kierunku modernizacji nauczania geometrii natrafiały na trudny problem. Geometria konstruowana od czasów Euklidesa jako struktura, mająca niezaprzeczalne piękno, mogła być włączona w dynamiczną organizację matematyki współczesnej tylko za cenę głębokiego przekształcenia. Z drugiej strony wykład Euklidesa — lub jego warianty — ma jeszcze zwolenników, którzy manifestują swoje uczuciowe doń przywiązanie i uważają za świętokradztwo każdą próbę jego unowocześnienia. Gdyby sprzeciw tego rodzaju podtrzymywano dalej, doprowadziłoby to do całkowitego wyeliminowania geometrii, czego nikt sobie nie życzy.

---

(7) Tekst ten został przekazany wszystkim uczestnikom konferencji w Rawennie z upoważnieniem i zaleceniem jego opublikowania w czasopismach różnych krajów.

Rozważania matematyków i doświadczenia szkolne nauczycieli udowodniły jednakże, że obecnie można uczyć geometrii w sposób odpowiadający różnym postulatom, formułowanym z różnych stanowisk, które tylko przy powierzchownym ich rozpatrywaniu wydają się sprzeczne.

2. Niewątpliwie geometria zajmuje oddzielne miejsce w nauczaniu młodzieży w wieku od 10 do 18 lat, ale nie chodzi o taką jej izolację, która ostatecznie zamknęłaby ją w sobie samej.

(a) Jest to z jednej strony teoria matematyczna stosunkowo złożona i z pewnością najbardziej złożona spośród tych, których się uczy przed uniwersytetem. Mieści się ona jednak doskonale w ujednoliconym systemie matematyki: jest to nauka o skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych, zaopatrzonej w iloczyn skalarny („przestrzeń wektorowa euklidesowa"). Takie jej rozumienie umożliwia i narzuca naukę o strukturach podstawowych dla większości gałęzi matematyki (przestrzenie wektorowe, grupy transformacji, przestrzenie metryczne).

(b) Z drugiej strony jest to także teoria fizyczna zdająca sprawę z codziennej rzeczywistości.

(c) Nauczanie geometrii, które nie uwzględniałoby obu tych aspektów byłoby niekompletne i nie osiągałoby niechybnie jednego z jego celów: dać wyrównane wykształcenie. Jeżeli złożoność geometrii stwarza trudności pedagogiczne, to opanowanie tej złożoności i zredukowanie jej do struktury matematycznej, wyrażającej ją w sposób prosty, są kapitalnymi osiągnięciami w kształceniu umysłu.

3. W szczególności, doświadczenia przeprowadzone z inspiracji Belgijskiego Ośrodka Pedagogiki Matematyki dowodzą, że te wymagania mogą być realizowane. W związku z tym należy wyróżnić dwa etapy:

(a) Uczniowie w wieku 10-11 do 14-15 lat. Nauka jest przygotowana przez uprzednie posługiwanie się pojęciami zbioru, relacji, działania, grupy.

Dysponując tymi narzędziami abstrahowanymi z różnych sytuacji (w większości niegeometrycznych), można przystąpić do konstrukcji geometrii opartej na spontanicznej działalności geometrycznej dziecka oraz na geometrycznej koncepcji panującej w społeczeństwie, w którym ono żyje (8). To prowadzi do aksjomatyzacji, którą wydobywa się stopniowo, i która umożliwia począwszy od tego wieku prawdziwą dedukcję. W toku tej konstrukcji otrzymuje się ciało liczb rzeczywistych, prze-

(8) Chodzi tu o uwarunkowanie pierwszych pojęć dziecka przez technikę i formy przemysłowe, architektoniczne, przez przyrodę, w której żyje. Stwierdzono na przykład, że w nauczaniu dzieci żyjących w buszu trzeba zaczynać naukę geometrii od innych form i kształtów niż te, które są bliskie dziecku europejskiemu.

strzenie wektorowe (dwuwymiarowe i trójwymiarowe) nad tym ciałem oraz iloczyny skalarne w tych przestrzeniach.

We wszystkich tych przypadkach chodzi o świadomą konstrukcję na podstawie nie poddawanej w wątpliwość rzeczywistości oraz nie mniej uznawanej powszechnej idealizacji; konstrukcja ta, trzeba to podkreślić, jest rezultatem działalności dziecka, prowadzonego przez nauczyciela, który bez dogmatyzmu oświetla mu drogę.

(b) Uczniowie w wieku od 14-15 lat do 17-18 lat. Przy końcu poprzedniego okresu uczeń zdobył bogactwo doświadczenia. Jednakże, gdyby zażądano od niego przedstawienia drogi, którą przebył, na ogół nie byłby do tego zdolny i popadłby w zniechęcenie. Ale w tym stadium właśnie można mu zwrócić uwagę na to, że nie ma potrzeby na nowo wracać do tego samego, i że wystarczy mu zużytkować strukturę „przestrzeni wektorowej euklidesowej", którą skonstruował, ponieważ ujmuje ona na raz wyniki trzech lat matematyzacji przestrzeni konkretnej. Rozumie więc, że dysponuje inną aksjomatyzacją geometrii, logicznie równoważną pierwszej, zatem wyrażającą tę samą rzeczywistość, a więc także aksjomatyzacją, którą można się posługiwać w konkretnej przestrzeni, ale która jest matematycznie o wiele mocniejsza, ponieważ bardziej czysta, lepiej skonstruowana i bardziej bezpośrednio operatywna. Wyposażony w to narzędzie nie tylko odnajdzie i skondensuje przedtem zdobyte wiadomości, ale bez trudu pójdzie dalej: trygonometria, liczby zespolone staną się łatwymi i naturalnymi zdobyczami.

W ten sposób uczeń przeżyje sam to, co nazywamy aksjomatyzacją, to co jest porównaniem dwóch aksjomatyzacji i wypróbuje zalety „dobrej" aksjomatyki. Zdobędzie nie tylko ważną wiedzę, ale także prawdziwą kulturę, dzięki której, jeżeli się przy tym tylko zatrzyma, nie będzie intelektualnie wyobcowany z własnej epoki; jeśli zaś pójdzie dalej, to pozostanie mu tylko rozwijać i umacniać działalność, której się nauczył, bez konieczności przechodzenia przez trudne adaptacje.

4. Zdając sobie wnikliwie sprawę z danych psycho-socjologicznych, pedagogicznych i matematycznych zagadnienia nauczania geometrii, można z nich wysnuć rozwiązanie, którego istnienie jest faktem. To doświadczenie skorygowało pewne poglądy nieostrożnie zaawansowane na temat wieku, poniżej którego niektóre pojęcia są dla dziecka nieprzystępne.

Rozwiązanie to, dopuszczające zresztą różne warianty, nie jest oczywiście jedynie możliwe. Dostarcza ono jednak przykładu, który może być od razu wykorzystany.