ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

B. STACHURSKA (Kraków)

Przykład wprowadzenia uczniów w teorię grup

Konieczność przeprowadzenia istotnych zmian w programach i metodach nauczania matematyki w szkole jest faktem powszechnie znanym i nie wymaga uzasadnienia. Próby modernizacji matematyki szkolnej, podejmowane w wielu krajach, idą w dwóch kierunkach. Z jednej strony poprzez wprowadzenie elementów teorii mnogości, zmianę języka i symboli proponuje się nowoczesne ujęcie tradycyjnej matematyki szkolnej, z drugiej drogą doświadczeń wprowadza się do nauczania partie matematyki, których nigdy w programie szkolnym nie było, badając zdolność przyswojenia tego materiału przez uczniów, jego wartości kształcące oraz moc atrakcyjną i zainteresowanie jakie wzbudza. Jednym z przykładów eksperymentów drugiego rodzaju jest przeprowadzone przez Hansa Steinera nauczanie początków teorii grup, opisane przez niego w artykule *Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie* (1). Dostarczając nowego, syntetycznego spojrzenia na wiadomości już przez uczniów zdobyte, rozszerzając je poprzez wprowadzenie nowych pojęć i następnie budując początki teorii grup wprowadził on trzynasto- i czternastoletnich uczniów w czystą teorię matematyczną oraz umożliwił zdobycie następnego stopnia wtajemniczenia w to, czym naprawdę jest matematyka.

Dobrze wiadomo, że na początku naturalnej drogi prowadzącej do pojęcia grupy leży pojęcie zbioru. Następnie, określając iloczyn kartezjański zbiorów A i B oraz definiując relację określoną na tych zbiorach jako podzbiór ich iloczynu kartezjańskiego $A \times B$, można wprowadzić pojęcie odwzorowania zbioru A w zbiór B jako szczególny przypadek relacji określonej na tych zbiorach. Następnym etapem jest zdefiniowanie działania wewnętrznego w zbiorze A jako odwzorowania zbioru $A \times A$ w zbiór A. Po określeniu takich własności działania wewnętrznego jak łączność, istnienie elementu neutralnego, istnienie elementów odwrotnych można już podać definicję grupy: zbiór G z określonym w nim działaniem wewnętrznym jest grupą, jeżeli działanie to jest łączne, posiada element neutralny i dla każdego elementu zbioru G istnieje element

(1) Der Mathematikunterricht 11 (1965), str. 20-39.

odwrotny. Taka jest też, jak zobaczymy, kolejność stopniowo pokonywanych etapów prowadzących w przedstawianym nauczaniu do sformułowania definicji grupy.

1. Przygotowanie uczniów do podjęcia nauki o grupach. W okresie poprzedzającym naukę o grupach, przy przerabianiu obowiązującego programu zwrócono szczególną uwagę na opanowanie przez uczniów takich pojęć, jak zbiór, relacja, funkcja. Z pojęciem zbioru spotykali się uczniowie w różnych sytuacjach. Dobrze znane im były zbiory liczbowe — zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych wraz z określonymi w tych zbiorach działaniami. Uczniowie znali różne własności działań na liczbach, wiedzieli o uporządkowaniu tych zbiorów, znali związki między porządkiem w zbiorach liczb a działaniami w tych zbiorach (np. monotoniczność dodawania). Znali też przykłady zbiorów nieliczbowych (np. prosta, płaszczyzna jako zbiory punktów), sposób określania zbioru przez podanie własności jego elementów, pojęcie zbioru pustego, podzbioru danego zbioru. Posługiwali się symbolami: relacji należenia elementu do zbioru, inkluzji, działań na zbiorach — sumy, iloczynu, różnicy. Rysowali diagramy obrazujące uporządkowanie rodziny podzbiorów danego zbioru, tworzyli zbiór par złożonych z elementów skończonego zbioru, rozpatrywali zbiór wszystkich par liczb wymiernych itp. Znali pojęcie funkcji, na przykład odległość dwóch punktów była traktowana jako funkcja określona w zbiorze par punktów płaszczyzny o wartościach liczbowych, miara kąta jako funkcja określona w zbiorze kątów o wartościach liczbowych. Przy dużym udziale uczniów została sformułowana następująca definicja odwzorowania płaszczyzny w siebie: odwzorowanie płaszczyzny w siebie jest przyporządkowaniem, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje dokładnie jeden punkt tej płaszczyzny. Zostało także określone mnożenie odwzorowań.

Mnożenie odwzorowań płaszczyzny w siebie dostarczyło przykładu operacji określonej w zbiorze wszystkich odwzorowań płaszczyzny w siebie, która wykonywana na elementach tego zbioru prowadzi znów, podobnie jak działania na liczbach, do elementów tego samego zbioru. Rozpatrywanie zbioru wszystkich odwzorowań płaszczyzny w siebie, odwzorowania identycznościowego, odwzorowań odwrotnych do odwzorowań odwracalnych stworzyło możliwość zauważenia, że istnieją nieliczbowe zbiory z operacjami o własnościach podobnych do własności działań wykonywanych na liczbach. Podsuwało myśl objęcia znanych przykładów zbiorów wraz z określonymi w nich działaniami wspólną nazwą.

2. Definicja działania wewnętrznego i grupoidu. Własności działań. Wprowadzenie pojęcia grupy.

a) Na gruncie zdobytych przez uczniów wiadomości stało się możliwe wprowadzenie pojęcia działania wewnętrznego w dowolnym zbiorze.

Doświadczenia mówiły, że suma, iloczyn, największy wspólny podzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotna dwóch liczb naturalnych jest liczbą naturalną. Analogicznie, iloczyn dwóch odwzorowań płaszczyzny w siebie jest znów odwzorowaniem płaszczyzny w siebie. W każdym z tych przypadków dany był zbiór i przyporządkowanie, które każdej parze elementów tego zbioru przyporządkowywało element tego samego zbioru. Naturalną konsekwencją tego spostrzeżenia była definicja działania wewnętrznego: działanie wewnętrzne w zbiorze M jest przyporządkowaniem, które każdej parze elementów zbioru M przyporządkowuje element zbioru M. Działanie oznaczano symbolem $\square$, a symbol $x \square y$ oznaczał element przyporządkowany parze (x, y).

Po wprowadzeniu definicji działania wewnętrznego uczniowie rozpatrywali zbiory łącznie z określonymi w nich działaniami. Naturalne i wygodne było wprowadzenie pojęcia grupoidu jako pary $(M, \square)$, złożonej ze zbioru M i działania wewnętrznego $\square$ w M.

Nowo zdefiniowane pojęcia służyły z jednej strony do opisania za pomocą nowych terminów znanych zbiorów wraz z określonymi w nich znanymi działaniami (np. $a \square_1 b = \mathrm{nwp}(a, b)$, $a \square_2 b = \mathrm{nww}(a, b)$, $a \square_3 b = a^b$), z drugiej zaś do konstruowania nowych przykładów. Oto kilka z nich:

1° Przykłady działań wewnętrznych w zbiorze liczb naturalnych:

$$a \square_4 b = a, \quad a \square_5 b = 17, \quad a \square_6 b = a^2+b^2, \quad a \square_7 b = (a+b)^2,$$

2°. Przykłady działań wewnętrznych w zbiorze wszystkich punktów płaszczyzny:

$P \square_8 Q$ = obraz punktu P poprzez symetrię o środku w Q,

$P \square_9 Q$ = środek odcinka PQ.

$P \square_{10} Q$ = czwarty punkt, który z OP i OQ, przy stałym punkcie O, tworzy równoległobok.

Na tym etapie wykonywali uczniowie wiele konkretnych zadań rachunkowych, na przykład wykazując, że $2 \square_3 3 = 8$, $3 \square_3 2 = 9$, $2 \square_6 3 = 13$, $2 \square_7 3 = 25$, $(2 \square_3 3) \square_3 2 = 64$, $2 \square_3 (3 \square_3 2) = 512$. Miały one na celu wyrobienie u uczniów umiejętności wykonywania działań, których definicja została podana oraz zauważenia przez nich pewnych własności tych działań.

b) Przygotowaniem do późniejszego poszukiwania podgrup danej grupy było wprowadzenie następującej definicji: zbiór M odwzorowań płaszczyzny w siebie jest zamknięty ze względu na mnożenie odwzorowań, jeżeli wraz z $u, v \in M$ również $u \circ v \in M$. W oparciu o tę definicję rozwiązywali uczniowie zadania typu: sprawdzić, czy następujące zbiory odwzorowań są zamknięte ze względu na mnożenie odwzorowań:

1. $\{I, v\}$ (I — odwzorowanie identycznościowe, $v = (D, 180°)$ — obrót o 180°),
2. $\{I, g\}$ (g — dowolna symetria osiowa),
3. $\{g, h\}$, dla $g \perp h$,
4. $\{I, g, h\}$, dla $g \perp h$, $g \cap h = \{D\}$,
5. $\{I, v_1, v_2\}$, dla $v_1 = (D, 120°)$, $v_2 = (D, 240°)$.

Do zadań tych uczniowie sporządzali tabelki, z których natychmiast było widać, czy zbiór jest zamknięty, czy nie. Kształt takich tabelek obrazują dwie niżej podane tabelki sporządzone do zadania 4.

u	v	$u \circ v$
I	I	I
g	g	I
h	h	I
I	g	g
g	I	g
I	h	h
h	I	h
g	h	$(D, 180°)$
h	g	$(D, 180°)$

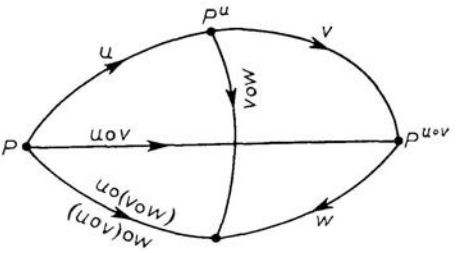
$\circ$	I	g	h
I	I	g	h
g	g	I	$(D, 180°)$
h	h	$(D, 180°)$	I

Równolegle do tych rozważań, na lekcjach algebry rozwiązywali uczniowie zadanie znalezienia podzbiorów zbioru liczb naturalnych zamkniętych ze względu na dodawanie. Okazało się, że podzbiory takie istnieją. Są to zbiory liczb parzystych, podzielnych przez 3, podzielnych przez 4 itd. Znaleziono także podzbiory zbioru liczb naturalnych zamknięte ze względu na inne działania; na przykład okazało się, że zbiór wszystkich dzielników dowolnej liczby naturalnej jest zamknięty ze względu na działania $\square_1$ i $\square_2$, a każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na działanie $\square_4$.

Uczniowie poznali także dodawanie modulo dowolna liczba naturalna n. Przy wprowadzeniu tego działania odwołał się Steiner do dobrze znanego uczniom obliczania dni tygodnia (przez branie reszty z dzielenia przez 7) oraz godzin (przez branie reszty z dzielenia przez 12 lub 24). W tej sytuacji było zupełnie zrozumiałe dla uczniów wprowadzenie działania, które parze liczb naturalnych przyporządkowuje resztę z dzielenia ich sumy przez ustaloną liczbę n. Okazało się, że jest ono również działaniem w zbiorze $A_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Jako zadania domowe sporządzali uczniowie tabelki dodawania modulo n, oznaczanego symbolem $\oplus_n$, przy różnych wartościach n. Sami odkrywali, że można analogicznie określić $\odot_n$, mnożenie modulo n, tak że $(\{0, 1, \ldots, n-1\}, \odot_n)$ jest grupoidem.

c) Różnorodność odpowiednio dobranych przykładów działań, zadania rachunkowe oraz tabelki działań w zbiorach skończonych nasunęły pierwsze wnioski dotyczące własności wprowadzonych działań. Własności takie, jak łączność, przemienność dodawania i mnożenia liczb znali uczniowie z wcześniejszej nauki. Nowość polegała na sformułowaniu ich dla dowolnego działania. Działanie wewnętrzne $\square$ określone w zbiorze M jest łączne, jeżeli dla dowolnych $a, b, c \in M$: $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$. Działanie wewnętrzne $\square$ określone w zbiorze M jest przemienne, jeżeli dla dowolnych $a, b \in M$ zachodzi: $a \square b = b \square a$. Następnie uczniowie odkryli działania nieprzemienne (np. mnożenie odwzorowań) i niełączne (np. $\square_3$). W opinii Steinera dopiero naoczne pokazanie uczniom istnienia działań nie spełniających wyżej podanych własności przyczyniło się do ich głębszego zrozumienia.

W oparciu o rysunek 1 została udowodniona łączność mnożenia odwzorowań.



Rys. 1

d) W każdym ze zbiorów: liczb całkowitych z dodawaniem, liczb naturalnych z mnożeniem, odwzorowań płaszczyzny w siebie z mnożeniem, znany był uczniom element wyróżniający się „neutralnym" zachowaniem. Działanie wykonywane na nim i na dowolnym elemencie a dawało w wyniku element a. Próba opisania tej własności dla dowolnego grupoidu $(M, \square)$ prowadziła do definicji elementu neutralnego: element $e \in M$ jest elementem *neutralnym* dla działania $\square$, jeżeli dla każdego $a \in M$ zachodzi $a \square e = e \square a = a$.

Jak po każdej nowej definicji, i tu znane grupoidy zostały rozpatrzone pod kątem istnienia w nich elementu neutralnego. Doświadczenia zdobyte podczas tych badań nasunęły przypuszczenie, potwierdzone następnie prostym dowodem, że w grupoidzie może istnieć co najwyżej jeden element neutralny.

e) Liczba ujemna $-n$ (dla n ze zbioru liczb naturalnych) została wprowadzona, we wcześniejszym nauczaniu, jako liczba, która dodana do n daje w wyniku 0. W podobny sposób zostało określone odwzorowanie odwrotne do odwzorowania odwracalnego. Znajomość liczby ujemnej

i odwzorowania odwrotnego dała podstawę do wprowadzenia definicji elementu odwrotnego do danego elementu. Wystarczyło, podobnie jak w definicji elementu neutralnego, opisać własność, jaką mają te elementy: $a^* \in M$ jest elementem odwrotnym do $a \in M$, jeżeli $a \square a^* = a^* \square a = e$.

Oczywiście istnienie elementów odwrotnych można badać tylko w grupoidach, w których istnieją elementy neutralne, i tylko takie rozpatrywali uczniowie poszukując elementów odwrotnych. W szczególności zbiory odwzorowań były badane pod kątem zawierania elementów odwrotnych do każdego odwzorowania z tego zbioru.

Dla wygody i przejrzystości otrzymywanych wyników uczniowie sporządzali tabelki elementów odwrotnych, np. dla zbioru $\{I, v_1, v_2\}$

u	u^*
I	I
v_1	v_2
v_2	v_1

Oprócz przyswajania sobie w ten sposób definicji elementu odwrotnego było to równocześnie ważnym ćwiczeniem przygotowawczym do późniejszego poszukiwania podgrup.

Poszukując elementów odwrotnych odkryli uczniowie metodę rozpoznawania na podstawie tabelki, czy wszystkie elementy mają elementy odwrotne. Było tak, gdy w każdym wierszu i w każdej kolumnie tabelki występował element neutralny.

f) Wprowadzenie pojęcia elementu neutralnego dokonało podziału znanych uczniom grupoidów na zawierające taki element i nie zawierające. Badanie istnienia elementu odwrotnego do każdego elementu grupoidu prowadziło do dalszej klasyfikacji grupoidów zawierających element neutralny. Wyniki były różne: w zbiorze liczb naturalnych z działaniem $\square_2$ tylko 1 ma element odwrotny, w zbiorze wszystkich punktów płaszczyzny z działaniem $\square_{10}$ każdy element ma element odwrotny. Uczniowie odkryli też, że w zbiorze A_n do każdego elementu a istnieje dokładnie jeden element odwrotny a^*, a mianowicie taki, że $a + a^* = n$. Natomiast w grupoidzie $(A_n, \odot_n)$ czekała ich niespodzianka. Ponieważ 0 nie ma elementu odwrotnego — fakt dobrze znany uczniom — usunięto je z tego zbioru. Okazało się jednak, że zabieg ten nie zawsze jest skuteczny. Jeżeli n nie jest liczbą pierwszą, to zbiór $M_{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ z działaniem $\odot_n$ nie jest grupoidem. Fakt ten, według Steinera, można pozostawić do odkrycia uczniom. Rozważanie zbioru M_{n-1} z działaniem $\odot_n$, przy n będącym liczbą pierwszą, doprowadziło natomiast do wniosku, że dla każdego elementu istnieje w tym zbiorze element odwrotny.

Tym sposobem spośród wszystkich znanych grupoidów została wydzielona klasa grupoidów mających trzy rozważane własności. Stąd już tylko krok do definicji grupy: grupoid $(M, \square)$ jest *grupą*, jeżeli:

(G1) $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$, dla dowolnych $a, b, c \in M$,

(G2) istnieje w M element e, taki że $a \square e = e \square a = a$, dla każdego $a \in M$,

(G3) dla każdego $a \in M$ istnieje w M element a^* taki, że $a \square a^* = a^* \square a = e$.

Jeżeli dodatkowo działanie $\square$ jest przemienne, to grupę $(M, \square)$ nazywamy *przemienną* lub *abelową*.

3. Zastosowania wprowadzonego pojęcia grupy. Pierwsze próby rozwijania ogólnej teorii grup.

a) Indukcyjne wprowadzenie pojęcia grupy, rozbicie go na stopniowo pokonywane etapy, różnorodność przykładów i ćwiczeń na każdym etapie umożliwiły dobre opanowanie tego pojęcia przez uczniów. Przyszedł moment, gdy można było wykorzystać to pojęcie do formułowania w prosty i precyzyjny sposób znanych i nowo poznawanych twierdzeń geometrycznych i algebraicznych.

Możliwości te dobrze ilustrują niżej podane twierdzenia wypowiedziane językiem teorii grup, a dotyczące izometrii. Izometrię zdefiniowano jako odwzorowanie płaszczyzny w siebie, które daje się przedstawić w postaci iloczynu symetrii osiowych.

TWIERDZENIE 1. *Obroty są parzystymi izometriami. Zbiór wszystkich obrotów* $\left(D, \frac{k \cdot 360^\circ}{n}\right)$, *dla* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, *jest dla każdej liczby naturalnej n podgrupą pełnej grupy obrotów. Podgrupa ta składa się z parzystych izometrii, które przeprowadzają prawidłowy n-kąt z punktem środkowym D w siebie.*

TWIERDZENIE 2. *Przesunięcia są parzystymi izometriami. Zbiór przesunięć jest grupą abelową.*

TWIERDZENIE 3. *Zbiór wszystkich obrotów (wokół dowolnych punktów) nie jest grupą, a razem ze wszystkimi przesunięciami tworzy grupę nieabelową. Jest to grupa wszystkich parzystych izometrii.*

TWIERDZENIE 4. *Zbiór wszystkich symetrii punktowych i przesunięć jest grupą nieabelową.*

TWIERDZENIE 5. *Zbiór wszystkich izometrii jest grupą.*

b) Po okresie odkrywania struktury grupy w znanych zbiorach, konstruowania przykładów grup i opisywania znanych faktów nowymi terminami przystąpił Steiner do rozwijania ogólnej teorii grup. Na początku wyprowadził wraz z uczniami następujące proste prawa:

Jeżeli $(M, \square)$ jest grupą, to dla dowolnych elementów zbioru M

$a \square b = a \square c \Rightarrow b = c$ (prawo lewostronnego skracania),

$b \square a = c \square a \Rightarrow b = c$ (prawo prawostronnego skracania),

$(a \square b)^* = b^* \square a^*$, oraz $(a^*)^* = a$.

Przy wyprowadzaniu tych związków każdy uczeń mógł sobie wyobrażać, że przeprowadza rozumowanie w konkretnej grupie. Po dokładnym zbadaniu przeprowadzonych dowodów zauważyli uczniowie, że korzysta się w nim tylko z aksjomatów (G1), (G2), (G3), a więc otrzymane wnioski obowiązują w dowolnej grupie.

Dla uczniów odkrycie to ma w sobie, jak stwierdza Steiner, coś fascynującego. Umożliwia zrozumienie, że pojęcie grupy to nie tylko nadanie wielu przedmiotom o wspólnych własnościach jednej nazwy. Wyczuwają oni, że ma ono znaczenie niezależnie od interpretacji, samo teraz stanowiąc przedmiot badań. Można mówić o własnościach grup, które, udowodnione w oparciu o aksjomaty definiujące grupę, mają moc obowiązującą dla wszystkich grup. Dokonała się zmiana jakościowa charakterystyczna dla nowoczesnej matematyki. Rozważania osiągnęły wyższy stopień abstrakcji. Wielkie osiągnięcie Steinera polegało na zetknięciu uczniów z nowoczesną teorią matematyczną i umożliwieniu odczucia smaku abstrakcyjnych rozważań matematycznych.

4. Grupy dwu- i trzyelementowe. Grupa symetrii kwadratu i jej podgrupy. Twierdzenie Lagrange'a.

a) Udowodnione prawa skracania pozwoliły odkryć ważną własność tabelek działań w grupach skończonych: każdy element w każdym wierszu i w każdej kolumnie tabelki występuje dokładnie raz. Wnioskiem z tego spostrzeżenia było stwierdzenie, że tabelka działania w grupie dwuelementowej może tylko tak wyglądać:

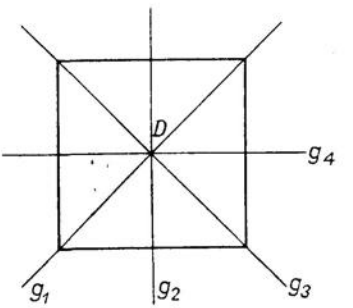
$\square$	e	a
e	e	a
a	a	e

Odwrotnie, jeżeli a jest elementem inwolucyjnym w grupie $(M, \square)$ (tj. $a \neq e$ i $a \square a = e$), to $(\{e, a\}, \square)$ jest grupą.

Również tabelka działania w grupie trzyelementowej jest wyznaczona jednoznacznie. Przy odpowiedniej kolejności elementów otrzymuje się drugi i trzeci wiersz tabelki przez cykliczną zmianę pierwszego.

$\square$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

b) Na przykładzie poszukiwania grupy symetrii kwadratu oraz jej podgrup, opisanym szczegółowo przez Steinera, można zaobserwować metody, jakimi posługiwał się autor, duży udział i żywe zainteresowanie uczniów oraz imponujące rezultaty, jakie wraz z uczniami osiągnął. W oparciu o definicję kwadratu udowodniono, że jedynymi symetriami (izometriami) kwadratu są odwzorowania: $v_0 = I = (D, 0°)$, $v_1 = (D, 90°)$, $v_2 = (D, 180°)$, $v_3 = (D, 270°)$, g_1, g_2, g_3, g_4 (rys. 2).



Rys. 2

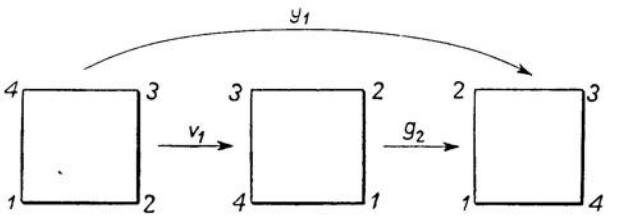
Następnie uczniowie sporządzali tabelkę mnożenia odwzorowań w tym, oznaczonym przez G_8, zbiorze symetrii.

$\circ$	v_0	v_1	v_2	v_3	g_1	g_2	g_3	g_4
v_0	v_0	v_1	v_2	v_3	g_1	g_2	g_3	g_4
v_1	v_1	v_2	v_3	v_0	g_4	g_1	g_2	g_3
v_2	v_2	v_3	v_0	v_1	g_3	g_4	g_1	g_2
v_3	v_3	v_0	v_1	v_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	v_0	v_1	v_2	v_3
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	v_3	v_0	v_1	v_2
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	v_2	v_3	v_0	v_1
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	v_1	v_2	v_3	v_0

Obliczanie wyników mnożenia odwzorowań przebiegało dwoma sposobami. Początkowo uczniowie posługiwali się sposobem nazwanym przez Steinera rachunkowo-kombinatorycznym. Obliczając np. $v_1 \circ g_2$ postępowali tak: kwadrat o wierzchołkach oznaczonych kolejnymi cyframi przekształcali najpierw przez obrót v_1, rysując otrzymany w wyniku tej operacji kwadrat. Następnie kwadrat ten przekształcali przez symetrię osiową g_2 i szukali symetrii, która początkowy kwadrat przeprowadza w kwadrat otrzymany w wyniku tych dwóch operacji (rys. 3).

Był też inny sposób. Jeszcze przed zajmowaniem się mnożeniem symetrii kwadratu uczniowie widzieli, że każdy obrót wokół punktu D o kąt α można przedstawić jako $g \circ h$, przy czym $g \cap h = \{D\}$ i $\sphericalangle(g, h) = \alpha/2$. W oparciu o ten fakt widać, że $v_1 = g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_3 = g_3 \circ g_4 = g_4 \circ g_1$. Stąd, przez odpowiedni wybór, wykazuje się natychmiast, że $v_1 \circ g_2 = g_1$, bo

$$v_1 \circ g_2 = (g_1 \circ g_2) \circ g_2 = g_1 \circ (g_2 \circ g_2) = g_1 \circ I = g_1.$$



Rys. 3

Ponieważ inwolucyjny charakter symetrii osiowej znany był uczniom od dawna, Steiner osiągnął to, że po paru wskazówkach kilku dobrych uczniów rozwinęło dalej to postępowanie. Chodziło tu o proste zastosowanie prawdziwego rachunku grupowego, który później przy składaniu obrotów (wokół różnych punktów) i kilku symetrii osiowych ma duże znaczenie. Uczniowie powolniejsi w abstrakcyjnych rozważaniach mogli pozostać przy poprzednim sposobie. Ale również i oni w krótkim czasie nauczyli się tego eleganckiego, rachunkowego sposobu.

Struktura grupy została odczytana przez uczniów z tabelki. Zbiór jest zamknięty ze względu na mnożenie odwzorowań, zawiera odwzorowanie identycznościowe. Stąd, że odwzorowanie to występuje dokładnie raz w każdym wierszu i każdej kolumnie tabelki wywnioskowali uczniowie istnienie elementu odwrotnego do każdej symetrii.

c) Następne zadanie brzmiało: znaleźć wszystkie podgrupy grupy G_8. Od razu jako podgrupa została rozpoznana grupa cykliczna $C_4 = (\{v_0, v_1, v_2, v_3\}, \circ)$, której tabelka znajduje się w lewym górnym kwadracie tabelki działania w G_8. Jako dalsze podgrupy obok G_8 i $(\{v_0\}, \circ)$ zostały podane podgrupy dwuelementowe $C_2^1 = (\{v_0, g_1\}, \circ)$, $C_2^2 = (\{v_0, g_3\}, \circ)$, $C_2^3 = (\{v_0, v_2\}, \circ)$, $C_2^4 = (\{v_0, g_2\}, \circ)$, $C_2^5 = (\{v_0, g_4\}, \circ)$.

Pełne emocji było odkrycie dwóch grup Kleina rzędu czwartego $K_4^1 = (\{v_0, g_1, g_3, v_2\}, \circ)$ i $K_4^2 = (\{v_0, g_2, g_4, v_2\}, \circ)$ oraz niepowodzenia prób znalezienia podgrup o innej ilości elementów.

Po spostrzeżeniu, że rzędy znalezionych podgrup są dzielnikami rzędu G_8 uczniowie podali myśl, że może zawsze rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy. Zachęciło to Steinera do przeprowadzenia dowodu twierdzenia Lagrange'a. Oto szkic tego dowodu.

Niech U będzie właściwą, zawierającą więcej niż jeden element podgrupą n-elementowej grupy G. U jako podgrupa grupy skończonej zawiera skończoną ilość elementów $u_1, \ldots, u_k$. Niech g_1 będzie elementem należącym do $G \setminus U$. Po utworzeniu iloczynów $g_1 \square u_1, \ldots, g_1 \square u_k$ można wykazać, że elementy $g_1 \square u_i$ są różne między sobą i nie należą do U. Otrzymuje się tym sposobem, obok $G_0 = U$, drugi podzbiór G_1 rozłączny z G_0, do którego (wobec $e \in U$) należy również g_1. Jeżeli istnieje element g_2 taki, że $g_2 \notin G_0$ i $g_2 \notin G_1$, to można utworzyć zbiór G_2 złożony z iloczynów $g_2 \square u_i$. Zbiór ten jest rozłączny ze zbiorami G_0 i G_1 oraz zawiera znów k elementów. W tym postępującym rozkładzie G dochodzi się po skończonej liczbie kroków do rozkładu G na zbiory $G_0, G_1, \ldots, G_m$, przy czym $G_i \cap G_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ i $G = G_0 \cup \ldots \cup G_m$. Ponieważ wszystkie zbiory G_i mają po k elementów, $n = (m+1)k$, czyli k jest dzielnikiem rzędu grupy.

Dowód ten został przeprowadzony przy dużym udziale uczniów i stanowił dla nich, jak pisze Steiner, mocne i trwałe przeżycie.

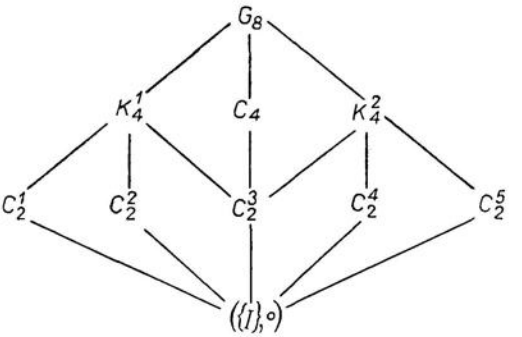


Diagram 1

d) Po znalezieniu wszystkich podgrup grupy G_8 uczniowie sporządzili diagram porządkujący je według relacji inkluzji. Kreska łącząca dwa zbiory oznaczała, że zbiór górny zawiera zbiór dolny.

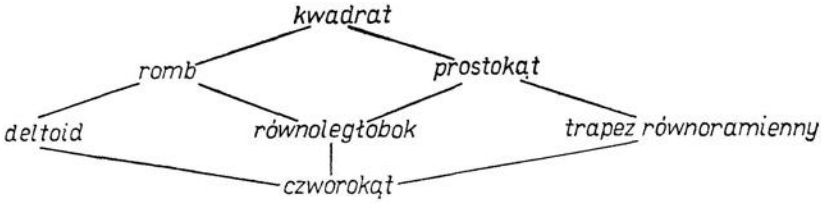
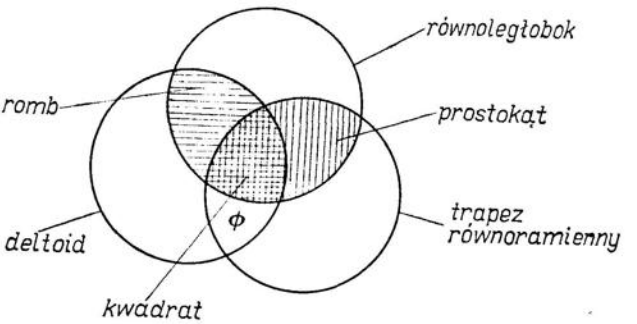


Diagram 2

Wpisując w miejsce podgrup nazwy klas czworokątów, dla których dana podgrupa jest grupą symetrii, otrzymali uczniowie z diagramu 1 diagram 2.

Jest oczywiste, że im mniejsze są wymagania dotyczące symetrii, tym więcej czworokątów należy do danej klasy. Wystarczy więc ostatni diagram odwrócić, aby otrzymać diagram porządkujący zbiory czworokątów.

Związki pomiędzy tymi zbiorami można także przedstawić w sposób zademonstrowany na rysunku 4. Sposób ten był przez uczniów wielokrotnie używany w ćwiczeniach logicznych i teoriomnogościowych.



Rys. 4

Stopień opanowania przez uczniów przerobionego materiału badał Steiner, między innymi, za pomocą zadań, które rozwiązywali uczniowie w pracy klasowej. Oto kilka z nich.

ZADANIE 1. a) Podaj izometrie, które równoboczny trójkąt przeprowadzają w siebie. b) Sporządź tabelkę i pokaż, że znaleziony zbiór odwzorowań z działaniem mnożenia jest grupą.

ZADANIE 2. Podaj wszystkie podgrupy grupy znalezionej w zadaniu 1 i narysuj diagram porządkujący.

ZADANIE 3. Jaki rozkład trójkątów odpowiada diagramowi z zadania 2. Narysuj odpowiedni diagram.

Analiza rozwiązań tych zadań wykazała, że również słabsi uczniowie opanowali materiał w sposób zadowalający.

5. Uwagi końcowe. W eksperymentalnym nauczaniu przeprowadzonym przez Hansa Steinera zakres matematyki szkolnej został rozszerzony o jedno z podstawowych pojęć współczesnej matematyki, pojęcie grupy, oraz początki teorii grup. Powodzenie tego nauczania wskazuje, że uczniowie są w stanie opanować pojęcia abstrakcyjne, zrozumieć teorię aksjomatyczną, a korzyści stąd wynikające są przekonywającym argumentem za podejmowaniem tego rodzaju prób zmniejszających dystans dzielący matematykę szkolną od matematyki współczesnej. Zademonstrowane w opisanym nauczaniu metody wskazują w jaki sposób można osiągnąć opanowanie przez uczniów tego pojęcia nie napotykając większych trudności.

Nauczanie teorii grup odbyło się w ścisłym powiązaniu z obowiązującym programem. Bazą dla rozpoczęcia nauki o grupach były wiadomości i doświadczenia z wcześniejszego nauczania, w którym położono nacisk na pojęcia szczególnie ważne z tego punktu widzenia. Opanowanie pojęcia grupy zostało celowo rozbite na etapy, z myślą o rozłożeniu trudności i stopniowym pokonywaniu ich. Każdy etap składał się z rozważenia różnorodnych przykładów, porządkowania z nowego punktu widzenia wiadomości już zdobytych, uogólnień prowadzących do nowego pojęcia, przygotowania naturalnego przejścia do następnego etapu. Duża ilość ćwiczeń, zadań rachunkowych, tabelek umożliwiła operowanie na każdym etapie nowo poznanymi pojęciami, odkrycie ich własności, zauważenie związków z innymi pojęciami. Sformułowanie definicji grupy i opanowanie tego pojęcia dało precyzyjny język i umożliwiło rozwijanie początków teorii grup, a więc zetknięcie uczniów z teorią aksjomatyczną.

Do sukcesu osiągniętego przez Steinera przyczyniła się także w znacznym stopniu duża aktywność uczniów, będąca wynikiem umiejętnie stawianych pytań, zaciekawiających i pobudzających. Niemały był w nim również udział stałej troski Steinera o rozwijanie samodzielności myślenia, spostrzegawczości, umiejętności formułowania wniosków.

Osiągnięcia Steinera polegają nie tylko na opanowaniu przez uczniów w zadowalającym stopniu przerobionego materiału, lecz także na niezatarciu siły atrakcyjnej tkwiącej w teoriach aksjomatycznych, uwypukleniu jej oraz uczynieniu z nauczania matematyki interesującej gry, dostarczającej uczniom poza zdobytymi wiadomościami wielu przeżyć i emocji.