ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JAN ROBOT (Poznań)

O przestrzeniach B^M

(Odczyt wygłoszony 1. 4. 1966 na posiedzeniu PTM w Poznaniu)

Przede wszystkim pragnąłbym podziękować Zarządowi Oddziału Poznańskiego PTM za zaszczytne zaproszenie. Muszę szczerze przyznać, że byłem w poważnym kłopocie przy wyborze materiału. Teoria przestrzeni B^M jest dziś tak rozbudowana, a z drugiej strony mój własny wkład jest tak skromny, że żenuję się przemawiać przed tak dostojnym audytorium. Niewątpliwe dziś ogromne znaczenie praktyczne przestrzeni B^M powoduje, że coraz więcej matematyków się nimi interesuje. Rzekłbym nawet, że temat staje się modny i wszyscy się na niego rzucili.

Celem mojego dzisiejszego odczytu jest pokazanie, jak teoria przestrzeni B^M może uzyskać solidne podstawy aksjomatyczne, które pozwalają na matematycznie ścisłe dowody twierdzeń o niewątpliwym znaczeniu praktycznym. Z potrzeby takiej teorii matematycy zdawali sobie sprawę od dawna, jednakże dopiero ukazanie się dzieła Bourbakiego stworzyło trwałą podstawę pod rozwój tej teorii dzięki dostatecznie rozbudowanemu aparatowi pojęciowemu.

Zanim omówimy formalne podstawy teorii, podamy kilka uwag wstępnych. Z grubsza mówiąc można powiedzieć, że elementami przestrzeni B^M są błędy w publikacjach matematyków. Zagadnienie to nabiera ogromnej wagi wobec lawinowo rosnącej ilości fałszywych twierdzeń, lematów, dowodów, fałszywych cytatów, a nawet fałszywych autorów. Wiele osób próbowało opracować rozmaite środki zaradcze, żaden jednak nie zdał egzaminu. Wymienię tu np. próby prześwietlania prac za pomocą promieni Roentgena, jak również proponowane przez Stefana Abta stosowanie metod statystycznej kontroli jakości, polegające na tym, żeby mając serię np. 100 prac, na podstawie badania wyrywkowego kilku prac przyjmować do druku bądź odrzucać całą serię. Natomiast profesor Alexiewicz twierdzi, że wielokrotnie krytykowana klasyczna metoda wysyłania prac do recenzentów daje jednak najlepsze wyniki.

Prof. Steinhaus w znanej pracy „Czem jest, a czem nie jest matematyka" cytuje pogląd, że połowa publikowanych prac matematycznych zawiera jakieś błędy. Optymiści z drugiej strony wysuwają postać Landaua,

który w całym swoim życiu nie opublikował fałszywego twierdzenia ani dowodu. Niektórzy myśliciele są zdania, że należy wprowadzić w życie matematyczny kodeks karny przewidujący rozmaite kary więzienia w zależności od rozmiaru opublikowanego błędu i jego ewentualnych konsekwencji. Prace nad opublikowaniem tego kodeksu są zaawansowane, ostateczne jednak wprowadzenie kodeksu w życie zostało powstrzymane z obawy, że nie będzie miał kto uczyć studentów. Być może właściwsza byłaby kara okresowego zakazu publikacji.

W odczycie dzisiejszym nie będę jednak mówił o metodach zapobiegania popełnianiu błędów w pracach matematycznych. Cel odczytu jest znacznie skromniejszy: chodzi o zbudowanie pewnego modelu aksjomatycznego, który pozwoliłby na systematyczne badanie rozmaitych typów błędów. Istnieje dziś obszerna literatura dotycząca błędów. Z braku czasu nie mogę wyliczyć nawet najważniejszych pojęć tej teorii, zatrzymam się jednak na jednym przykładzie, który będzie potrzebny przy definicji przestrzeni B^M. Określamy mianowicie ciąg przestrzeni B_n przez indukcję w sposób następujący:

Do przestrzeni B_1 należą prace, w których znajdujemy fałszywe twierdzenia. Jeżeli przestrzeń B_n jest już zdefiniowana, to do przestrzeni B_{n+1} zaliczymy te wszystkie prace, w których w dowodach korzystano z wyników prac należących do przestrzeni B_n. Łatwo widać, że począwszy od B_3 przestrzenie te tworzą ciąg zstępujący.

Jak wiadomo, prace można *składać*. Wynikiem złożenia pracy P z pracą Q jest praca powstała przez dołączenie początku pracy Q do końca pracy P i odpowiednie przeniesienie bibliografii na koniec. Wynik złożenia zawiera błędy wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z prac zawiera błędy. Jednością przy tym działaniu jest praca pusta, która oczywiście nie zawiera żadnego błędu. W ten sposób zbiór prac staje się kategorią.

Wprowadza się też pojęcie pracy dualnej. Pracą *dualną* do pracy P nazywamy pracę P^* zdefiniowaną w sposób następujący: założenia pracy P są tezami pracy P^*, tezy pracy P są założeniami pracy P^*, a dowody pracy P^* otrzymuje się z dowodów pracy P przez czytanie ich od końca do początku.

Dalszym niezbędnym pojęciem jest pojęcie przestrzeni M. Dany jest niepusty zbiór M, którego elementy zwane są *matematykami*. Może być to zbiór nieskończony; jednakże, aby nie komplikować rozważań, założymy, że jest to zbiór skończony. Następnie dana jest niepusta rodzina R niepustych podzbiorów zbioru M. Mówimy, że dwaj matematycy m i m' *napisali wspólną pracę*, jeżeli istnieje zbiór rodziny R zawierający m i m'.

Rozważać będziemy abstrakcyjny graf, którego wierzchołkami są matematycy ze zbioru M, a dwa wierzchołki m i m' połączone są kreską, jeżeli matematycy m i m' napisali wspólną pracę. Przez *łańcuch* matema-

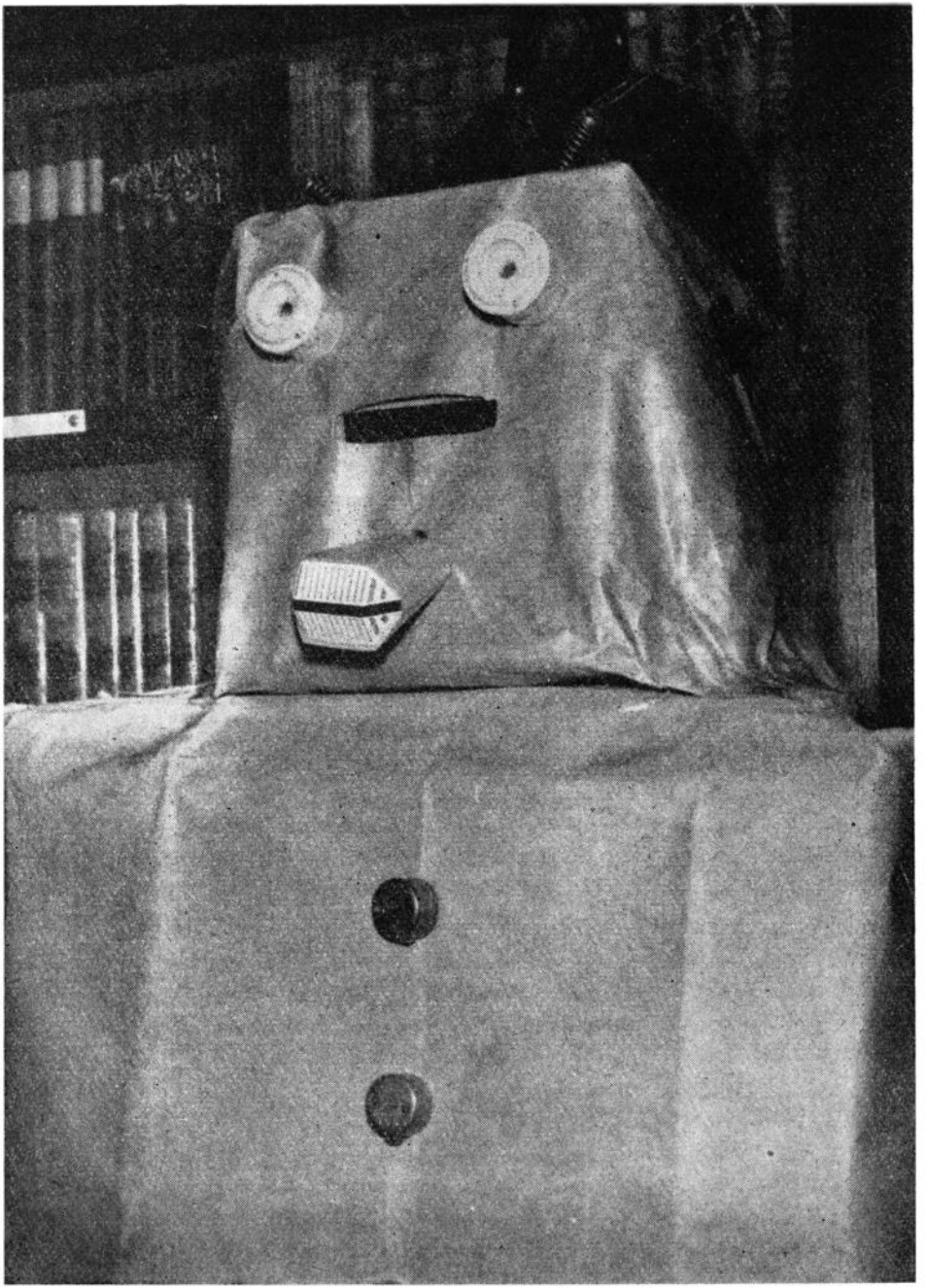
tyków rozumiemy skończony ciąg $m_0, m_1, \ldots, m_n$ matematyków taki, że matematyk m_i napisał wspólną pracę z matematykiem m_{i+1} $(i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$. *Odległością* między matematykami m i m' nazywamy najmniejszą liczbę całkowitą n taką, że istnieje łańcuch składający się z $n+1$ matematyków łączący m z m'. Jeżeli taki łańcuch nie istnieje, to odległość m od m' definiujemy jako N, gdzie N jest liczbą wszystkich matematyków zbioru M. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że każdy matematyk zbioru M napisał choć jedną pracę.

Łatwo widzieć, że zbiór M z tak określoną odległością jest przestrzenią metryczną, ośrodkową i zupełną (tzw. „espace polonais" w terminologii Bourbakiego). Na przykład jeżeli M oznacza zbiór faktycznie istniejących matematyków, to odległość Stasia od Knapowskiego wynosi 1, od Turána 2, od Erdösa 3; odległość Radeckiego od von Neumanna wynosi 7. Nie wiadomo natomiast, jaka jest odległość Heleny Zidenberg od Kriszny Waradaradżana.

Matematyk nazywa się *słabo quasi-izolowany*, gdy nie da się go połączyć łańcuchem z żadnym innym matematykiem. Łatwo podać przykłady elementów słabo quasi-izolowanych w zbiorze rzeczywiście istniejących matematyków (np. Euklides).

Zbiór M rozpada się na rozłączne klasy, jeżeli dwóch matematyków zaliczymy do jednej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy dają się połączyć łańcuchem. Klasy te nazywamy *słabymi quasi-składowymi*. Jednoelementowe słabe quasi-składowe, to po prostu matematycy słabo quasi-izolowani. Można z łatwością podać przykłady słabych quasi-składowych składających się z dwóch, trzech elementów, itd. Nie rozwiązany jest natomiast problem, jaka jest najmniejsza liczba całkowita, zwana *liczbą krytyczną pierwszego rodzaju*, dla której nie istnieje składowa m-elementowa. Wiadomo jedynie, że jeżeli założymy hipotezę Schinzla, że istnieje postęp arytmetyczny złożony z liczb całkowitych, z których żadna nie jest naturalnym pseudodzielnikiem sum sześcianów jedenastu kolejnych występujących wyrazów postępu, to liczba krytyczna pierwszego rodzaju jest mniejsza niż 9^{15} razy logarytm iterowany z siedemnastego wyrazu ciągu kanonicznego Winogradowa. Nie rozwiązany jest również problem Pełczyńskiego, zwany problemem dużych składowych: czy w zbiorze rzeczywiście istniejących matematyków istnieje tylko jedna słaba quasi-składowa mająca więcej niż sto elementów, czy też jest ich więcej.

Warto tu jeszcze wspomnieć o pojęciu gwiaździstości matematyka; *gwiaździstością matematyka* m nazywamy ilość matematyków odległych o 1 od m, tzn. ilość matematyków, z którymi m napisał wspólną pracę. Np. gwiaździstością Orlicza jest liczba 7, gwiaździstością Ciesielskiego jest 4. (W tym momencie zadano pytanie z sali: A ile wynosi gwiaździstość Musielaka? Prelegent odpowiedział: Chwileczkę, muszę się zastanowić. Gwiaździstość Musielaka wynosi 6.)



Jan Robot po odczycie

Przystąpmy teraz do definicji przestrzeni B^M. *Elementami przestrzeni* B^M są wszystkie morfizmy z M do sumy mnogościowej uprzednio zdefiniowanych zbiorów $B_1, B_2, B_3, \ldots$ Na elementach przestrzeni B^M określamy działania liniowe w zwykły sposób. Topologia w przestrzeni B^M jest najsłabszą topologią, przy której wszystkie twierdzenia są prawdziwe. (Pytanie z sali: Czy jest ona lokalnie wypukła? Odpowiedź: Tak, można udowodnić, że jest ona lokalnie wypukła.)

Jednym z podstawowych wyników teorii jest tzw. „Der erste analytische Fehlersatz". Oznaczmy przez $\pi(n)$ stosunek liczby prac z błędami do liczby n wszystkich prac opublikowanych. Chodzi o znalezienie wzoru asymptotycznego na $\pi(n)$ przy n dążącym do nieskończoności. Oznaczmy przez I_k dowolny ideał maksymalny w najmniejszym nieprzywiedlnym pierścieniu wielomianów, dla którego przestrzenie $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ są niezmiennicze. Niech $f(z)$ oznacza funkcję meromorficzną rozwijalną na uogólniony szereg Dirichleta względem ideałów $I_1, I_2, \ldots$ Niech $s = \sigma + it$ oznacza pierwsze nietrywialne zero tej funkcji. Wówczas $\pi(n)$ jest asymptotycznie równe n dzielone przez $\sigma \log n$. W szczególnym przypadku, gdy każdy matematyk jest słabo quasi-izolowany, $f(z)$ jest funkcją dzeta Riemanna i wówczas formuła asymptotyczna $\pi(n)$ równe $2n$ dzielone przez logarytm n jest równoważna hipotezie Riemanna.

Na tym chciałbym zakończyć mój referat i podziękować za wysłuchanie.

Od Redakcji: Ze względu na znaczną ilość błędów w pracach matematycznych projektowana jest akcja wymiany dowodów. Wszystkie dowody istniejących twierdzeń będą zgłaszane w poszczególnych Oddziałach PTM i wymieniane na nowe. Obecne dowody twierdzeń utracą ważność w dniu 1. 4. 1970.