wmptm 1897

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1, Skrytka Pocztowa 137. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

171. Dowieść, że jeśli krzywa zamknięta klasy C_2 ma długość 2π, to jej krzywizna w pewnym punkcie jest równa co najmniej 1.

J. Dodziuk, W. Holsztyński i *K. Nowiński* (Warszawa)

172. Opisać zbiór A_2 wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych x o tej własności, że okrąg można podzielić na 2 zbiory rozłączne, z których żaden nie zawiera pary punktów takich, że kąt między odpowiadającymi im promieniami jest równy x. Jaki będzie zbiór A_n zdefiniowany analogicznie dla $n = 3, 4, \ldots$?

S. Fajtlowicz (Wrocław) i *W. Holsztyński* (Warszawa)

173. Czy każda T_1-przestrzeń X z topologią zwartą i maksymalną wśród topologii zwartych określonych w X musi być przestrzenią Hausdorffa ?

S. Fajtlowicz i *L. Pacholski* (Wrocław)

174. Dowieść, że topologia naturalna w przestrzeni liczb rzeczywistych R jest minimalna wśród topologii lokalnie zwartych, przy których R ze zwykłymi działaniami jest grupą topologiczną. Czy założenie lokalnej zwartości jest istotne ?

W. Holsztyński i *W. Wojtyński* (Warszawa)

175. Zbudować continuum zawierające dwa niepuste podzbiory otwarte, które nie dają się połączyć obrazem ciągłym pseudołuku [1].

W. Holsztyński i *A. Lelek* (Warszawa)

---

[1]) A. Lelek, *Zbiory*, Warszawa 1966.

176. Przestrzeń topologiczną X nazywamy *regularną* (lub *słabo regularną*) w punkcie $x \in X$, jeśli otoczenia domknięte punktu x (lub otoczenia punktu x, będące wnętrzami zbiorów domkniętych, odpowiednio) stanowią bazę otoczeń punktu x w przestrzeni X. Pokazać, że istnieją następujące przestrzenie:

1° przestrzeń Hausdorffa słabo regularna, w której żadne dwa punkty nie mają rozłącznych otoczeń domkniętych,

2° przestrzeń słabo regularna, w której każde dwa punkty mają rozłączne otoczenia domknięte, ale która nie jest regularna w żadnym punkcie,

3° przestrzeń, w której każde dwa punkty mają rozłączne otoczenia domknięte, ale która nie jest słabo regularna w żadnym punkcie.

W. Holsztyński (Warszawa)

177. Obiektami ([2]) kategorii K są wszystkie zbiory, a morfizmami $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ wszelkie funkcje $\varphi : A' \to B$ przekształcające dowolne podzbiory A' zbioru A na zbiór B. Czy kategoria K jest izomorficzna z konkretną?

P. Blass, W. Holsztyński i *K. Nowiński* (Warszawa)

178. Parę uporządkowaną (V, G) złożoną ze zbioru niepustego V i rodziny G podzbiorów dwuelementowych zbioru V będziemy nazywali *grafem*. Graf (V, G) jest *spójny*, jeśli dla dowolnych dwóch różnych elementów $a, b \in V$ istnieje ciąg skończony $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b \in V$ taki, że $\{a_{i-1}, a_i\} \in G$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Graf (V, G) nazywamy *drzewem*, jeśli jest on spójny i nie zawiera ciągu nieskończonego elementów $a_i \in V$ takich, że $\{a_i, a_{i+1}\} \in G$ oraz $a_i \neq a_{i+2}$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Opiszemy teraz pewną grę dwuosobową z pełną informacją na grafie spójnym (V, G). Gracze na przemian wybierają (zupełnie dowolnie) elementy ze zbioru V, w rezultacie powstaje ciąg nieskończony

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

i przyjmujemy, że wygrywa pierwszy gracz, jeśli istnieje takie n, że $a_n = b_n$ lub w każdym ciągu $b_n = c_0, c_1, \ldots, c_k = b_{n+1}$ takim, że $\{c_{i-1}, c_i\} \in G$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, występują elementy a_n i a_{n+1}. W przeciwnym razie przyjmujemy, że wygrywa drugi gracz. Dowieść, że pierwszy gracz ma zwycięską strategię wtedy i tylko wtedy, gdy graf (V, G) jest drzewem.

W. Holsztyński (Warszawa)

([2]) А. Г. Курош, А. Х. Лившиц и Е. Г. Шульгейфер, *Основы теории категорий*, Успехи матем. наук 15 (1960), zeszyt 6, str. 3-52.

179. Parze liczb całkowitych (k, n) $(1 \leqslant k \leqslant n \geqslant 2)$ przyporządkowujemy macierz (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ w sposób następujący: jeśli $i \leqslant n$ oraz $j \leqslant n$, to

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ -2^{-1} & \text{dla } |i-j| = 1 \text{ lub } |i-j| = n-1, \\ 0 & \text{dla pozostałych przypadków,} \end{cases}$$

$$a_{n+1,i} = a_{i,n+1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = n+1, \\ -2^{-1} & \text{dla } i = k, \\ 0 & \text{dla pozostałych przypadków.} \end{cases}$$

Podać wszystkie pary (k, n), dla których wyznacznik z macierzy (a_{ij}) jest równy zeru. Dowieść, że wyznacznik z minora (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ jest zawsze różny od zera.

W. Holsztyński (Warszawa)

180. Niech Z będzie niepustym podzbiorem domkniętym kwadratu kartezjańskiego przestrzeni metrycznej X z metryką ϱ, takim że $(x, x) \notin Z$ dla $x \in X$ oraz jeśli $(x, y) \in Z$, to $(y, x) \in Z$. Dowieść, że funkcja ϱ' określona za pomocą wzoru

$$\varrho'(x, y) = \sup_{(a,b) \in Z} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(a,x)+\varrho(x,y)+\varrho(y,b)}$$

jest metryką w przestrzeni X równoważną topologicznie z wyjściową metryką ϱ, przy czym $\varrho'(a, b) = 1$ dla $(a, b) \in Z$.

W. Holsztyński (Warszawa)

181*. Niech A będzie podzbiorem ograniczonym przestrzeni metrycznej X. Czy może się zdarzyć, że [3] iloczyn

$$S_1(A) \cap S_2(A) \cap \ldots$$

zawiera więcej niż jeden punkt? Określmy zbiór $S_n^*(A)$ rekurencyjnie [4] wzorem

$$S_n^*(A) = S_{n-1}^*(A) \cap S_1\left(S_{n-1}^*(A)\right),$$

dla $n = 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że jeśli dla dowolnej pary punktów a, b przestrzeni metrycznej X istnieje punkt $s(a, b)$ należący do iloczynu

$$S_1^*(\{a, b\}) \cap S_2^*(\{a, b\}) \cap \ldots,$$

to funkcja $s: X \times X \to X$ jest ciągła.

W. Holsztyński (Warszawa)

---

[3] Zob. zadanie 127* (Wiadom. Mat. 9 (1965), str. 98).

[4] Taką właśnie konstrukcję dla przestrzeni Banacha, a nie jak w zadaniu 127*, podali Mazur i Ulam (por. przypisek do zadania 127*).

182. Istnieje zbiór A_0 zerowymiarowy domknięty na linii prostej, taki że dla każdego zbioru skończonego A na linii prostej istnieje podzbiór zbioru A_0 izometryczny ze zbiorem A. Podać przykład zbioru A_0 spełniającego warunki tego twierdzenia oraz dowieść, że twierdzenie nie daje się zaostrzyć do postaci, w której 1° A jest dowolnym podzbiorem skończonym odcinka jednostkowego i A_0 jest zbiorem zwartym zerowymiarowym, lub 2° A jest dowolnym podzbiorem zwartym zerowymiarowym odcinka jednostkowego i A_0 jest zbiorem domkniętym zerowymiarowym.

W. Holsztyński (Warszawa)

183. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 5$ istnieje na płaszczyźnie ciąg zbiorów wypukłych $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$ taki, że każdy iloczyn $A_i \cap A_{i+1} \cap A_{i+2}$ jest niepusty ($i = 1, \ldots, n$), ale iloczyn dowolnych czterech spośród zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ jest pusty.

W. Holsztyński (Warszawa)

184. Zbudować dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zbiór wypukły, domknięty i ograniczony na płaszczyźnie, który ma niepuste wnętrze, stałą szerokość i dokładnie n punktów kątowych na brzegu.

W. Holsztyński i *H. Toruńczyk* (Warszawa)

185. Zbudować zbiór wypukły, domknięty i ograniczony w przestrzeni euklidesowej, który ma niepuste wnętrze, stałą szerokość i dokładnie jeden punkt kątowy na brzegu.

W. Holsztyński (Warszawa)

186. Znana hipoteza Borsuka głosi, że zbiór o średnicy równej 1, położony w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, można podzielić na $n+1$ zbiorów o średnicy mniejszej niż 1. Dowieść, że jeśli hipoteza Borsuka jest prawdziwa, to istnieje $a_n < 1$ takie, że każdy zbiór o średnicy równej 1, położony w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, można podzielić na $n+1$ zbiorów o średnicy mniejszej niż a_n. Dowieść, że istnieje ciąg liczb λ_n spełniających nierówności $\pi/6 \leqslant \lambda_n < \pi/4$ ($n = 2, 3, \ldots$), dążących do $\pi/4$ oraz takich, że każdy domknięty zbiór wypukły, którego podpierające w pewnym punkcie tworzą kąty ostre mniejsze niż λ_n, spełnia hipotezę Borsuka.

W. Holsztyński (Warszawa)

187. *Gwiazdą* $(n+1)$-kątną nazywamy $n+1$ półprostych wychodzących z jednego punktu (*środka* gwiazdy), które dzielą płaszczyznę na $n+1$ równych części. Pokazać, że jeżeli umieścimy środek gwiazdy $(n+1)$-kątnej w środku ciężkości n-boku foremnego, to nie istnieje takie

położenie ramion gwiazdy, aby dzieliły one n-bok foremny na $n+1$ części o równych polach.

K. Wojciechowski (Wrocław)

188*. Niech X oznacza przestrzeń uzyskaną przez usunięcie krzywej $\{(\sin t, \cos t, 1/t)\colon 0 < t < \infty\}$ z przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej. Udowodnić, że grupa fundamentalna przestrzeni X jest cykliczna nieskończona, ale każde odwzorowanie nakrywające przestrzeń X jest homeomorfizmem.

Jan Mycielski (Wrocław)

189. Niech F będzie zbiorem funkcji rzeczywistych $f\colon I^2 \to R$ określonych w kwadracie I^2 i mających postać

$$f(x, y) = g(w(x, y))$$

dla $(x, y) \in I^2$, gdzie g jest funkcją ciągłą i w jest wielomianem. Dowieść, że zbiór F jest brzegowy w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych $f\colon I^2 \to R$.

Jan Mycielski (Wrocław)

190*. Niech $x_1, \ldots, x_n$ $(1 < n < 2^m - 1)$ będą dowolnymi niezerowymi elementami ciała [5] Galois $\mathrm{GF}(2^m)$ oraz niech

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^i \in \mathrm{GF}(2^m)$$

dla $i = 1, 3$. Czy jeśli $S_3 = S_1^3$, to $S_1 = 0$?

Z. Szwaja (Poznań)

---

[5] W. W. Peterson, *Error-correcting codes*, New York 1961. Zagadnienie wystąpiło przy studium układu dekodującego w kodach korekcyjnych. Zbiory elementów $\mathrm{GF}(2^m)$ można określić w oparciu o znajomość wielomianów pierwotnych nad $\mathrm{GF}(2)$. Wielomiany te znajduje się z tabel Marsha, które podane są w książce Petersona.