ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1968)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzje

Stanisław Gołąb, *Rachunek tensorowy*, wydanie drugie rozszerzone, Biblioteka Matematyczna, tom 11, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966, str. 395.

Twórcą rachunku tensorowego jest włoski uczony G. Ricci-Curbastro; tej nowej zainicjowanej przez siebie gałęzi matematyki poświęcił on wiele prac specjalnych, ogłoszonych w różnych włoskich czasopismach matematycznych na przełomie XIX i XX wieku. Przez długi okres ogół matematyków nie interesował się tym rachunkiem, uważając go za rodzaj stenografii matematycznej, która nie może mieć poważniejszego znaczenia i zastosowań. Sprawdziło się jednak i w tym przypadku zdanie H. Poincarégo, iż wprowadzenie nowego symbolu jest często wielkim odkryciem matematycznym.

Decydującą rolę w historii rachunku tensorowego odegrała teoria względności Einsteina (1915) i zainicjowane przez tę teorię pojęcie przesunięcia równoległego T. Levi-Civita (1917); dzięki temu pojęciu geometria Riemanna przestała być zbiorem mniej lub więcej eleganckich wzorów, a stała się prawdziwą i zwartą teorią geometryczną. Od tego czasu rozpoczął się bujny rozwój teorii tensorów i jej zastosowań zarówno w geometrii różniczkowej, jak i w fizyce oraz w mechanice, a zwłaszcza w teorii sprężystości, której teoria tensorów zawdzięcza swą nazwę; powiązanie z teorią różniczkowych form zewnętrznych i z nowo powstałą teorią przestrzeni włóknistych pozwoliło znacznie rozszerzyć zakres badań geometrycznych i stworzyć nowe dziedziny badań. Zewnętrznym objawem zainteresowań i znaczenia teorii tensorów są liczne dzieła, które ukazały się w ostatnich czterdziestu latach w językach angielskim, francuskim, włoskim, niemieckim oraz rosyjskim, poświęcone teorii tensorów i związanych z nią teorii form zewnętrznych i teorii przestrzeni włóknistych (fibre bundles). Ważna jest okoliczność, że dzięki temu zespoleniu metod teorii tensorów, teorii form zewnętrznych oraz teorii przestrzeni włóknistych zainicjowane zostały systematyczne badania zagadnień topologicznych geometrii różniczkowej (1).

Z prawdziwą przyjemnością stwierdzić można, że w naukowej literaturze polskiej dość wcześnie zaczęły się ukazywać prace poświęcone teorii tensorów bądź jej zastosowaniom do geometrii i fizyki. Pierwszym zwiastunem polskich opracowań teorii był, fragmentaryczny zresztą, skrypt wykładów A. Hoborskiego (1935) zawierający, obok krótkiego zarysu podstaw teorii tensorów, zastosowania jej do teorii powierzchni przestrzeni euklidesowej. Forma wydania (skrypt) nie mogła oczywiście odegrać szerszej roli w zaznajomieniu polskich matematyków z tą teorią. Jako pierwszą systematyczną monografię teorii uznać należy dzieło O. Nikodyma pt. „Teoria tensorów (wraz z zastosowaniami do geometrii i fizyki matematycznej)", t. I, 1938. Było to dzieło oryginalnie ujęte i odznaczające się wielką ścisłością matematyczną,

(1) Zob. np. S. S. Chern, *Some new viewpoints in differential geometry in the large*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), str. 1-30.

przewyższającą pod tym względem różne dzieła zagraniczne. Niestety manuskrypt II tomu uległ zniszczeniu w czasie wojny, a różne okoliczności uniemożliwiły autorowi rekonstrukcję i uzupełnienie swego dzieła. Z kolei wymienić należy książkę W. Rubinowicza pt. „Wektory i tensory" (1950). Napisana przez fizyka i dla potrzeb fizyków, nie mogła ona spopularyzować znajomości teorii tensorów wśród geometrów, którym najbardziej była potrzebna.

Zadanie to spełniło dzieło S. Gołąba pt. „Rachunek tensorowy", wyd. pierwsze, 1953, które było pierwszym polskim przedstawieniem teorii tensorów zaspokajającym potrzeby zarówno geometrów, jak i fizyków lub techników. Książka ta przyczyniła się w znacznym stopniu do spopularyzowania rachunku tensorowego, oddając w ten sposób cenne usługi tym pracownikom naukowym, którym potrzebna była znajomość metod tego rachunku. Miarą wartości tej książki jest fakt, iż po 13 latach okazała się potrzeba wznowienia jej w drugim wydaniu, mimo dość specjalnego charakteru dyscypliny.

W ostatnich kilkunastu latach pojawiło się kilka dalszych opracowań teorii tensorów bądź oryginalnych polskich, bądź też tłumaczonych z obcych języków. Wymienimy je tutaj w porządku chronologicznym.

W 1958 ukazało się tłumaczone z rosyjskiego dzieło P. K. Raszewskiego „Geometria Riemanna i analiza tensorowa". Jak można się domyślać z tytułu, celem, który wytknął sobie autor, jest przedstawienie teorii przestrzeni Riemanna za pomocą pojęć i metod rachunku tensorowego. Cel ten autor osiągnął, tworząc przystępnie napisane dzieło nie tylko o właściwej teorii Riemanna, ale także o teorii opartej na formie kwadratowej, która jest nieokreślona, dając tym samym wstęp geometryczny do ogólnej teorii względności, którego brak było w literaturze polskiej. Nadmienić należy, że pierwszy rozdział tej książki, przedstawiający rachunek tensorowy w przestrzeniach afinicznych, został w języku polskim wydany oddzielnie, dając w ten sposób krótkie elementarne wprowadzenie do tego rachunku, wystarczające dla szerokiej rzeszy techników.

Drugim z kolei podręcznikiem przeznaczonym dla techników jest książka E. Karaśkiewicza pt. „Zarys teorii wektorów i tensorów" (1964). W tam samym roku pojawiło się także, tłumaczone z angielskiego, dzieło dwóch autorów J. L. Synge'a i A. Schilda, noszące tytuł „Rachunek tensorowy" i zaspokajające w zamierzeniu swym potrzeby fizyków. Wreszcie w 1966 r. ukazało się wznowione i rozszerzone wydanie książki S. Gołąba.

Wymienione wyżej dzieła różnią się znacznie metodą przedstawienia dostosowaną do rodzaju czytelników, dla których są przeznaczone. Różnią się także ścisłością w formułowaniu definicji pojęć i twierdzeń oraz w metodach dowodu. Dzieło S. Gołąba wyróżnia się spośród nich wielką ścisłością zarówno w definicjach, jak i w dowodach; jedynie w tych przypadkach, w których dowód zajmowałby zbyt wiele miejsca, czytelnik zostaje odesłany do prac specjalnych. Jako jedną z ważnych zalet należy wymienić ścisłe odróżnienie pojęcia grupy i pseudogrupy; drugie z tych pojęć zostało, jak wiadomo, po raz pierwszy sprecyzowane przez Autora (1939).

Drugie wydanie książki, w porównaniu z pierwszym, zostało powiększone o około 50 stron; znacznie rozszerzony został Rozdział VIII, traktujący o pewnych przestrzeniach specjalnych, które stały się przedmiotem badań po ukazaniu się pierwszego wydania. Przybył także Rozdział XI poświęcony pojęciom, które również dopiero po ukazaniu się pierwszego wydania nabrały szerszego znaczenia. Uległ zmianom Rozdział I, w którym gruntownie zostały przedstawione pojęcia takie, jak przestrzeń, układy współrzędnych, grupy i pseudogrupy. Nadmienić także należy, że podręcznik zawiera również pewne własne wyniki Autora oraz oryginalne, nowe ujęcia ważnych pojęć; wymienię dla przykładu bardzo umiejętne wprowadzenie tak ważnych i podstawowych pojęć, jak pochodna kowariantna i pochodna absolutna (str. 190 i 191).

Poza tym podręcznik zachował charakter pierwszego wydania. Składa się on z trzech części poświęconych kolejno algebrze tensorów (Rozdziały I-IV), ich analizie (Rozdziały V-IX) oraz zastosowaniom (Rozdziały X, XI).

Podstawowym pojęciem, na którym Autor oparł swój wykład zarówno w pierwszym, jak i w drugim wydaniu, jest pojęcie obiektu geometrycznego, którego teoria zawdzięcza mu wiele nowych i ważnych wyników. Wspomnijmy, że wspólnie z węgierskim matematykiem J. Aczélem profesor Gołąb jest autorem monografii pt. „Funktionalgleichungen der geometrischen Objekte". Te indywidualne zainteresowania i twórcza działalność Autora odzwierciedliły się w konstrukcji podręcznika, nadając mu specjalny charakter.

Pod tym względem dzieło prof. Gołąba różni się zasadniczo od współczesnych metod stosowanych w wykładzie teorii tensorów, na przykład od książek A. Lichnerowicza, w których teoria ta oparta jest na jednym terminie pierwotnym (wektorze kontrawariantnym) i na jednym nowym operatorze, iloczynie tensorowym, poza elementarnymi operatorami dodawania tensorów i mnożenia ich przez skalar. Metoda ta ma tę zaletę, że w naturalny sposób pozwala wbudować teorię form zewnętrznych w teorię tensorów i że jest zgodna z duchem nowoczesnych metod stosowanych w geometrii różniczkowej, których charakterystyczną cechą jest jej coraz silniejsza algebraizacja. Ponieważ jednak podręcznik prof. Gołąba przeznaczony jest dla szerszego kręgu czytelników, a nie tylko dla matematyków, więc jego ujęcie tematu jest, zdaje się, pod względem dydaktycznym bardziej przystępne i pożyteczne jako wstępne studium teorii tensorów, ograniczone niemal w całości do rozważań o charakterze lokalnym. Nadmienić przy tym należy, że Autor odsyła czytelnika do artykułu H. Łopuszańskiej, zawartego w pracy zbiorowej pt. „Zewnętrzne formy różniczkowe i pewne ich zastosowania" (1965). W artykule tym nowoczesna metoda konstrukcji teorii tensorów przedstawiona jest w sposób bardzo przystępny i jasny.

Nie tylko podstawowa metoda pierwszego wydania została zachowana w nowym wydaniu; także i symbolika nie uległa zmianie. Przyjęta została konsekwentnie stosowana symbolika Schoutena (Kernindexmethode), która odznacza się wielką prostotą i przejrzystością. Zarzucony jednak został niepotrzebny termin „afinor", który Schouten wprowadził w miejsce słowa tensor, a który następnie sam zarzucił. Żałować należy, że w pracach niektórych polskich geometrów w dalszym ciągu figuruje słowo afinor oraz różne dziwaczne jego pochodne.

Dzieło prof. Gołąba, bardzo bogate w treść już w pierwszym wydaniu, zostało obecnie znacznie rozszerzone (Rozdziały IV i XI). Wymienimy pokrótce najważniejsze i najciekawsze spośród tych rzeczy, których nie było w pierwszym wydaniu i których zwykle nie spotyka się w podręcznikach algorytmu tensorowego.

W Rozdziale IV znajdujemy między innymi informacje o układach aholonomicznych i o obiekcie aholonomiczności Schoutena i van Dantziga, o diadach, obiektach Piencowa, o tensorach rozdwojonych i silnych wielkościach oraz o wielopunktowych polach tensorowych. W dalszym ciągu poznajemy definicje przestrzeni Weyla, Hermite'a oraz przestrzeni prawie zespolonych. Rozdział XI zawiera określenia pochodnej Liego, rozmaitości różniczkowej oraz tensorów harmonicznych.

Wszystkie te pojęcia, jak zwykle u Autora, są określone ściśle i poprawnie; jedynym wyjątkiem jest sformułowanie twierdzenia B. Eckmanna i A. Frölichera (s. 275), znikanie bowiem tensora Nijenhuisa jest jedynie warunkiem koniecznym, ażeby przestrzeń prawie zespolona była przestrzenią zespoloną.

Stwierdzić jednak jestem zmuszony, że wymienione poprzednio rzeczy są tylko pozornym wzbogaceniem treści podręcznika, albowiem mają jedynie charakter encyklopedyczny, nie pozwalający czytelnikowi ocenić znaczenia i zastosowań zdefiniowanych pojęć. Odnosi się to np. do pojęcia tensorów harmonicznych, z którymi związane są różniczkowe formy harmoniczne, odgrywające doniosłą rolę w globalnych

badaniach rozmaitości riemannowskich (twierdzenie de Rhama). Należało tutaj zacytować artykuł A. Goetza zamieszczony w książce „Zewnętrzne formy różniczkowe i pewne ich zastosowania" lub zamieszczoną w Bibliografii książkę de Rhama i Kodairy. Brak także przykładu na zastosowanie geometryczne pochodnej Liego; prostym takim zastosowaniem są wektory Killinga, które łatwo otrzymuje się za pomocą pochodnej Liego.

Brak jest niestety ustępu o spinorach, które odgrywają tak ważną rolę we współczesnej fizyce. W Bibliografii wymienione są dwie prace E. Cartana poświęcone spinorom, w tekście książki nie znajdujemy jednak słowa spinor. W trzecim wydaniu dzieła prof. Gołąba, którego ukazania spodziewać się można za kilka lat, umieszczenie ustępu o spinorach sprawiłoby niewątpliwie większą przyjemność fizykom niż ustęp o obiekcie Piencowa, który jest wprawdzie interesującą ciekawostką, nie ma jednak większego znaczenia i zastosowań.

Na zakończenie umieszczę jeszcze kilka uwag tyczących się terminologii. Na str. 19 pisze Autor, że podstawą rozważań dzieła będą skończenie wymiarowe przestrzenie analityczne, zwane przez niektórych autorów kartezjańskimi; elementy tej przestrzeni nazywać się będzie punktami, a sam punkt będzie pojęciem pierwotnym. Zachodzi tu jakieś nieporozumienie terminologiczne. Ogólnie jest przyjęte nazywać n-wymiarową przestrzenią kartezjańską zbiór ciągów złożonych z n liczb rzeczywistych lub zespolonych (2). Punkt przestrzeni kartezjańskiej nie jest więc pojęciem pierwotnym, lecz jest zdefiniowany.

Na str. 26, odsyłacz (2), Autor mówi, iż niektórzy matematycy symbolem G_r oznaczają grupę r-częściową; termin grupa r-częściowa (domyślne: Liego) został już dawno zarzucony. Był on użyty w pracach K. Żorawskiego i w tłumaczeniach S. Dicksteina dzieł zagranicznych; obecnie, gdy topologia grup Liego została ugruntowana, mówi się jedynie o r-wymiarowej grupie Liego.

Na str. 199 i 200 to samo pojęcie zostało raz nazwane geodetyką, a drugi raz geodezyjną. Jestem zdania, że w polskiej literaturze matematycznej należałoby przyjąć tę nazwę w jej drugiej formie: geodezyjna.

Kończąc swą recenzję zaznaczam, że mimo poprzednich krytycznych uwag uważam podręcznik prof. S. Gołąba za bardzo pożyteczny, godny polecenia początkującym matematykom, fizykom i technikom jako wstępne studium teorii tensorów.

Władysław Ślebodziński

Abraham Goetz, *Geometria różniczkowa*, Biblioteka Matematyczna, tom 26, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965, str. 300.

Z przedmowy Autora: „Książka jest poświęcona lokalnej, metrycznej geometrii różniczkowej krzywych i powierzchni w przestrzeni euklidesowej w zakresie odpowiadającym z grubsza programowi wykładu geometrii różniczkowej na II roku matematyki uniwersyteckiej". Poza ten program wykracza całkowicie tylko jeden, ostatni rozdział, poświęcony teorii kongruencji prostoliniowych. Ale — oddajmy znów głos Autorowi — „teoria ta wykazuje wiele analogii z teorią powierzchni, jest równie stara i nadal rozwijana, a w polskiej literaturze matematycznej niemal całkowicie pominięta". Argumenty te brzmią przekonywająco i włączenie teorii kongruencji do podręcznika należy uznać za pożyteczne rozszerzenie jego zakresu.

---

(2) K. Borsuk, *Geometria analityczna w n wymiarach*, 1950, str. 17.