ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1967)

wmptm 1897

J. MIKUSIŃSKI (Katowice)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O splocie potęg modułu

Niech

$$k^{\alpha}(x) = \frac{|x|^{\alpha-1}}{A(\alpha)} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

gdzie

$$A(\alpha) = 2\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\Gamma(\alpha)$$

(Γ oznacza funkcję gamma Eulera). Celem tej notki jest udowodnienie, że *jeżeli* $\alpha > 0, \beta > 0$ *i* $\alpha+\beta < 1$, *to* $k^{\alpha} * k^{\beta} = k^{\alpha+\beta}$, *czyli*

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^{\alpha}(x-t)\,k^{\beta}(t)\,dt = k^{\alpha+\beta}(x) \qquad \textit{dla} \qquad x \neq 0.$$

Rzeczywiście, podstawiając $t = |x|u$, otrzymujemy dla $x \neq 0$:

$$A(\alpha)A(\beta)\cdot k^{\alpha} * k^{\beta} = |x|^{\alpha+\beta}K(\alpha,\beta),$$

gdzie

$$K(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} |1-u|^{\alpha-1}|u|^{\beta-1}\,du.$$

Można napisać

$$K(\alpha,\beta) = I_{-\infty} + I_0 + I_{+\infty},$$

gdzie

$$I_{-\infty} = \int_{-\infty}^{0} (1-t)^{\alpha-1}(-t)^{\beta-1}\,dt, \qquad I_0 = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt,$$

$$I_{\infty} = \int_1^{\infty} (t-1)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt.$$

Stąd $I_0 = B(\alpha,\beta)$ (funkcja beta Eulera). Także dwie pozostałe całki można wyrazić przez funkcję beta Eulera. Podstawiając mianowicie

$t = 1-1/u$, dostajemy $I_{-\infty} = B(\beta, 1-\alpha-\beta)$. Podobnie, podstawiając $t = 1/u$, dostajemy $I_{\infty} = B(\alpha, 1-\alpha-\beta)$. Wobec tego

$$K(\alpha, \beta) = B(\beta, 1-\alpha-\beta)+B(\alpha, \beta)+B(\alpha, 1-\alpha-\beta).$$

Teraz stosujemy znany wzór $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$, a potem wzór $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin\pi\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. W ten sposób otrzymujemy:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\sin\pi(\alpha+\beta)} + 1 + \frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{2\cos(\pi\alpha/2)2\cos(\pi\beta/2)}{2\cos\left(\pi(\alpha+\beta)/2\right)} = \frac{A(\alpha)A(\beta)}{A(\alpha+\beta)}.$$

Zatem

$$A(\alpha)A(\beta)\cdot k^{\alpha} * k^{\beta} = |x|^{\alpha+\beta}\frac{A(\alpha)A(\beta)}{A(\alpha+\beta)},$$

co daje zapowiedzianą równość $k^{\alpha} * k^{\beta} = k^{\alpha+\beta}$.