ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1967)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JAN MYCIELSKI (Wrocław)

Obroty i słowa

Iloczyny postaci

$$\sigma(x, y) = \prod_{s=1}^{m} x^{k_s} y^{l_s},$$

gdzie $k_1, l_1, \ldots, k_m, l_m$ są to liczby całkowite różne od 0 z wyjątkiem co najwyżej l_m, będziemy nazywać *słowami*.

Zadanie 73, podane przez W. I. Arnolda (Wiadomości Matematyczne 7 (1964), str. 246), jest następujące: *Udowodnić, że dla każdego słowa* $\sigma(x, y)$ *istnieją macierze ortogonalne* A *i* B *takie, że*

$$\sigma(A, B) \neq \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Jest to właściwie znane twierdzenie, które w mocniejszej postaci udowodnił Hausdorff, jako lemat do swojego paradoksalnego rozkładu sfery, ulepszonego później przez Banacha i Tarskiego. Jeżeli, tak jak w zadaniu 73, nie ograniczać wymiaru macierzy A i B, to rozwiązanie jest łatwe. Istotnie, każda permutacja następującego ciągu punktów przestrzeni R^n

$$(1,0,0,\ldots,0), \quad (0,1,0,\ldots,0), \quad (0,0,1,\ldots,0), \quad \ldots, \quad (0,0,0,\ldots,1)$$

może być zrealizowana ortogonalnym przekształceniem, a nie trudno, jeśli $n \geqslant |k_1| + |l_1| + \ldots + |k_m| + |l_m|$, podać takie permutacje α i β, aby $\sigma(\alpha, \beta)$ było nieidentycznościową permutacją tych punktów.

Jednak twierdzenie Hausdorffa jest mocniejsze, bowiem wymiar wynosi w nim 3, a ponadto wynika z niego istnienie takich macierzy A i B, które są dobre dla wszystkich słów naraz. Najładniejszy znany obecnie dowód tego wyniku podał T. Dekker w pracy [2]. Jest on prostszy od dowodu Hausdorffa i w odróżnieniu od tamtego nie używa liczb przestępnych, a ponadto daje interesującą własność simpleksów umiarowych. Znane są liczne inne dowody i uogólnienia rezultatu Hausdorffa, np. w pracach [1] i [3], gdzie podana jest też literatura.

Niech O_3 oznacza grupę *obrotów* przestrzeni R^3 dookoła jednego punktu czyli grupę macierzy ortogonalnych wymiaru 3×3 o wyznaczniku dodatnim. Następujące zagadnienie, pokrewne zadaniu 73, pozostaje otwarte [4]:

Czy każde równanie postaci

$$\sigma(x, y) = A \qquad (A \in O_3)$$

jest rozwiązalne w O_3?

Podam kilka uwag o tym zagadnieniu. Można je inaczej wypowiedzieć, jako pytanie, czy wszystkie rozpatrywane tu odwzorowania $\sigma\colon (O_3)^2 \to O_3$ są odwzorowaniami „na"? Następujące przedstawienie geometryczne grupy O_3 pozwala lepiej zobaczyć jego geometryczną treść. Rozpatrzmy w przestrzeni R^3 pełną kulę K o środku o i promieniu π (stała Archimedesa). Niech każdy punkt $p \in K$ reprezentuje element grupy O_3 w ten sposób, że daje on obrót w prawo dookoła wektora op o kąt $||o-p||$. W ten sposób antypody kuli K reprezentują te same obroty. Wykażemy, że przy tej interpretacji obraz $\sigma((O_3)^2)$ jest zawsze kulą o dodatnim promieniu, współśrodkową z kulą K (a zatem powyższy problem polega na tym, czy jej promień wynosi π?).

Sprzężeniami nazywamy przekształcenia postaci $x \to axa^{-1}$. Ponieważ sprzężenia są automorfizmami grup, więc obraz $\sigma((O_3)^2)$ jest niezmienniczy względem sprzężeń. Grupa sprzężeń grupy O_3 odpowiada grupie obrotów kuli K. Ponadto $\sigma((O_3)^2)$ jest spójne i zwarte (bo takie jest O_3), a więc jest ono kulą współśrodkową z K. Z rezultatu Hausdorffa, o którym już pisałem, wynika, że jej promień jest dodatni.

Topolog mógłby zapytać, czy odwzorowania

$$\sigma\colon (O_3)^2 \to O_3$$

są istotne, tzn. niehomotopijne stałej? (Co i ja uczyniłem, [5]; np. słowa $\sigma(x, y) = x$, $\sigma(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ są istotne). Wiadomo jednak, że na ogół tak nie jest. G. J. Porter [6] udowodnił, że odwzorowanie

$$\big[[[x_1, x_2], x_3], x_4\big]\colon (O_3)^4 \to O_3 \qquad ([u, v] = uvu^{-1}v^{-1})$$

nie jest istotne, a więc i $\big[[[x, y], y], y\big]\colon (O_3)^2 \to O_3$ nie jest istotne.

Wspólnie z J. Browkinem i A. Schinzlem znalazłem prostszy przykład tego rodzaju. Aby go opisać, muszę powiedzieć kilka zdań o kwaternionach. Kwaterniony o normie 1, czyli sfera S^3, tworzą grupę względem mnożenia i jej podgrupa $\{1, -1\}$ jest normalna (a nawet centralna) oraz zachodzi izomorfizm

$$(*) \qquad S^3/\{1, -1\} \cong O_3.$$

Niech $R(x)$ oznacza część rzeczywistą kwaternionu $x \in S^3$. Mamy implikację $R(x) = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ oraz tożsamość $R(yxy^{-1}) = R(x)$. Przykład, o który chodzi, jest to odwzorowanie $[x^2, yxy^{-1}]: (O_3)^2 \to O_3$. Wobec naturalnego odwzorowania $S^3 \to O_3$, danego przez izomorfizm (*), wystarczy wykazać, że odwzorowanie $[x^2, yxy^{-1}]: (S^3)^2 \to S^3$ jest homotopijne stałej, lub, co więcej, że nie jest ono „na". Sprawdzę, że równanie

$$[x^2, yxy^{-1}] = -1$$

nie ma rozwiązań w ciele kwaternionów. Możemy je przepisać w postaci $x^2yxy^{-1}x^{-2} = -yxy^{-1}$, co daje $R(x) = 0$. Zaś przepisując je w postaci $(yxy^{-1})^{-1}x^2yxy^{-1} = -x^2$, otrzymujemy $R(x^2) = 0$ wbrew temu, że miało być $x^2 = -1$.

Prace cytowane

[1] S. Balcerzyk and Jan Mycielski, *On faithful representations of free products of groups*, Fund. Math. 50 (1961), str. 63-71.

[2] T. J. Dekker, *On reflections in Euclidean spaces generating free products*, Nieuw Arch. Wisk. 7 (1959), str. 57-60.

[3] Jan Mycielski, *Independent sets in topological algebras*, Fund. Math. 55 (1964), str. 139-147.

[4] — *Problem 292*, Coll. Math. 7 (1959), str. 110.

[5] — *Problem 293*, ibidem, str. 110-111.

[6] G. J. Porter, *Homotopical nilpotence of S^3*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), str. 681-682.