ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1967)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. AMBROSIEWICZ (Ciechanowiec)

Uwaga o nierówności Hadamarda

W niniejszej notatce podaję dowód nierówności Hadamarda. Niech będzie dana macierz symetryczna

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

w której $a_{nn} > 0$, a Δ_{n-1} jest macierzą dodatnio określonej formy kwadratowej.

Rozwijając wyznacznik $|\Delta_n|$ względem ostatniej kolumny, a otrzymane w tym rozwinięciu minory względem ostatnich wierszy, otrzymujemy

$$|\Delta_n| = a_{nn}|\Delta_{n-1}| - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}a_{in}a_{jn}, \tag{2}$$

gdzie A_{ij} jest dopełnieniem elementu a_{ij} macierzy Δ_{n-1}. Wzór (2) jest oczywiście prawdziwy dla $n \geqslant 2$.

Wyrażenie

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}a_{in}a_{jn} \tag{3}$$

jest formą kwadratową względem zmiennych $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n}$. Istotnie, na mocy założenia, Δ_{n-1} jest macierzą dodatnio określonej formy kwadratowej, na mocy twierdzenia 2 ([1], str. 368), minory główne

$$A_{11}, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

macierzy (A_{ij}) $(i, j = 1, 2, \dots, n-1)$ są dodatnie, więc z twierdzenia Sylvestera ([1], str. 349, tw. 7) natychmiast wynika, że forma kwadra-

towa (3) jest dodatnio określona, a zatem może być zerem tylko wtedy, gdy $a_{1n} = a_{2n} = \ldots = a_{n-1,n} = 0$.

Równość (2), na mocy (3), możemy zapisać

$$|\Delta_n| = a_{nn}|\Delta_{n-1}| - \varphi_1. \tag{4}$$

Do wyznacznika $|\Delta_{n-1}|$ możemy stosować to samo rozumowanie, co do wyznacznika $|\Delta_n|$, bo macierz Δ_{n-1} jest macierzą dodatnio określonej formy kwadratowej. Stąd

$$|\Delta_{n-1}| = a_{n-1,n-1}|\Delta_{n-2}| - \varphi_2. \tag{5}$$

Z (5), po uwzględnieniu (4), otrzymujemy

$$|\Delta_n| = a_{nn}a_{n-1,n-1}|\Delta_{n-2}| - a_{nn}\varphi_2 - \varphi_1.$$

Łatwo widać, że po p krokach otrzymamy

$$|\Delta_n| = a_{nn}\ldots a_{n-p+1,n-p+1}|\Delta_{n-p}| - a_{nn}\ldots a_{n-p+2,n-p+2}\varphi_p - \tag{6}$$
$$- \ldots - a_{nn}a_{n-1,n-1}\varphi_3 - a_{nn}\varphi_2 - \varphi_1.$$

Przyjmując $|\Delta_0| = 1$, $\varphi_n = 0$, otrzymujemy

$$|\Delta_n| = a_{nn}\ldots a_{11} - a_{nn}\ldots a_{33}\varphi_{n-1} - \ldots - a_{nn}\varphi_2 - \varphi_1. \tag{7}$$

Ponieważ

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1} \tag{8}$$

są formami dodatnio określonymi, to opuszczając w (7) p ostatnich wyrazów, jak to wynika z (6), dostajemy

$$|\Delta_n| \leqslant |\Delta_{n-p}|\, a_{n-p+1,n-p+1}\ldots a_{nn}, \tag{9}$$

natomiast opuszczając $n-1$ ostatnich wyrazów otrzymamy

$$|\Delta_n| \leqslant a_{nn}\ldots a_{11}.$$

Znak równości może zachodzić tylko wtedy, gdy macierz (1) jest przekątniowa. Wynika to z tego, że formy (8) przyjmują wartość równą zeru tylko wtedy, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Praca cytowana

[1] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Warszawa 1965.