ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1967)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ZOFIA KRYGOWSKA (Kraków)

Problemy nauczania matematyki na Kongresie Matematyków w sierpniu 1966 w Moskwie

1. W czasie Kongresu Matematyków, który odbył się w sierpniu 1966 roku w Moskwie, trzy rodzaje posiedzeń poświęcono zagadnieniom nauczania matematyki. Jedne z nich odbywały się w ramach Sekcji 15 Kongresu, zajmującej się zagadnieniami pedagogicznymi i historycznymi, drugie organizowała Międzynarodowa Komisja Nauczania Matematyki (ICMI), trzecie wreszcie Sekcja Szkoły Średniej Moskiewskiego Towarzystwa Matematycznego.

Wszystkie te obrady odbywały się w gmachu Wydziału Biologicznego Uniwersytetu Łomonosowa, w ogromnych audytoriach, przy bardzo dużej frekwencji. Wielkim utrudnieniem były bariery językowe. Niektóre wystąpienia streszczano w innym języku, na ogół jednak było z tym wiele trudności.

Sekcja 15 Kongresu odbyła sześć posiedzeń, którym przewodniczyli kolejno profesorowie Akizuki (Japonia), Matthews (Wielka Brytania), Krygowska (Polska), Varga (Węgry), Christiansen (Dania) i Görke (NRD).

2. W ramach Sekcji wygłoszono tylko jeden referat półgodzinny opracowany na zlecenie organizatorów Kongresu. Był to referat G. Papy'ego profesora Uniwersytetu w Brukseli i kierownika ośrodka badań dydaktycznych w zakresie matematyki w Brukseli, znanego już ze swego rewolucyjnego, eksperymentalnego programu matematyki dla szkoły średniej oraz z tłumaczonych na wiele języków bardzo oryginalnych i nowoczesnych podręczników. W swym referacie G. Papy podkreślił następujące momenty charakterystyczne dla dzisiejszego etapu modernizacji nauczania matematyki:

1° W ogólnym przekonaniu tych, którzy zajmują się reformą matematyki szkolnej, matematyką użyteczną jest obecnie tylko matematyka współczesna.

2° Ideą kierującą nauczaniem matematyki współczesnej jest proces matematyzacji różnych sytuacji.

3° Programy dla drugiego cyklu nauczania (to jest od lat 12) powinny

obejmować następujące tematy: zbiory, relacje, grafy, grupy, przestrzenie wektorowe (w tym przestrzenie wektorowe z euklidesowym iloczynem skalarnym), początki analizy matematycznej oraz rachunku różniczkowego i całkowego.

Punktem centralnym, najbardziej istotnym, jest nauka o przestrzeni wektorowej. Ujawnienie bowiem struktury przestrzeni wektorowej w różnych dziedzinach matematyki jest jedną z charakterystycznych cech współczesnej metody matematycznej. Wiadomo np., że studium trudnych problemów topologii opiera się na strukturze pierścienia-modułu, co jest uogólnieniem pojęcia przestrzeni wektorowej. G. Papy stwierdził, że nie można dziś „uczciwie" rozwijać analizy matematycznej bez używania w sposób zasadniczy tego pojęcia.

Wprowadzenie pojęcia przestrzeni wektorowej do nauczania szkolnego decyduje o całej organizacji materiału nauczania. W referacie przedstawiono jako przykład takiej koncepcji eksperyment programowy i metodyczny prowadzony od 1961 roku w wielu szkołach belgijskich. Referent omówił dokładnie dwa cykle tego nauczania: klasy szóstą, piątą i czwartą (od 12 do 14 lat) i klasę trzecią i drugą (od 15 do 17 lat). W pierwszym cyklu uczniowie poznają bardzo dokładnie elementy nauki o zbiorach i relacjach, następnie przechodzą aksjomatyczny kurs geometrii, w toku którego konstruuje się równocześnie ciało liczb rzeczywistych i przestrzeń wektorową płaszczyzny. Na początku klasy trzeciej następuje zasadniczy zwrot. Pokazuje się, że te same rezultaty można osiągnąć wychodząc od aksjomatyki ciała zupełnego, archimedesowskiego i uporządkowanego oraz od aksjomatyki przestrzeni wektorowej. Od tego momentu cała matematyka elementarna rozwija się już na tej podstawie. W szczególności w klasie następnej nauka stereometrii jest traktowana jako studium trójwymiarowej euklidesowskiej przestrzeni wektorowej. Analizę zaś zaczyna się od topologii, do której dochodzi się przez uogólnienie poznanej poprzednio (w postaci euklidesowej przestrzeni wektorowej) przestrzeni metrycznej.

W swoim bardzo interesującym i świetnie przedstawionym referacie G. Papy podał również środki dydaktycznę realizacji tego programu, wśród których bardzo istotną rolę spełniają odpowiednio dobrane środki graficzne (pomysłowe kolorowe grafy i schematy, symbolika również niejednokrotnie „kolorowa").

Referat jego spotkał się z bardzo dużym zainteresowaniem.

3. Oprócz tego wykładu w ramach Sekcji 15 Kongresu wygłoszono wiele piętnastominutowych komunikatów. Można by je sklasyfikować w następujące grupy: 1° zagadnienia metodyki i programów matematyki w szkołach wyższych oraz ich realizacji, 2° zagadnienia reformy nauczania matematyki w szkołach średnich i podstawowych, 3° problemy pracy pozalekcyjnej uczniów matematyki, 4° inne różne tematy.

W grupie pierwszej M. W. Potockij (ZSRR) zwrócił uwagę na trudności studentów w korzystaniu z lektury matematycznej i sugerował opracowywanie podręczników specjalnych uwzględniających te trudności. Okazuje się bowiem, że to, co jest logicznie doskonałe, nie zawsze jest psychologicznie jasne. Jest to paradoks, który należy brać pod uwagę przy nauczaniu. W bardzo interesującym komunikacie J. A. Szichanowicz (ZSRR) przedstawił realizowaną już na studiach lingwistycznych koncepcję studiów matematycznych studentów dyscyplin humanistycznych. Cele tych studiów określono jako: zapoznanie studentów z matematycznymi metodami, językiem matematycznym i elementami wiedzy matematycznej. Referent zanalizował dokładnie program i rozkład materiału na poszczególne lata (analiza, teoria prawdopodobieństwa, algebra abstrakcyjna). Bardzo ciekawym punktem tego komunikatu była teza, że na studiach humanistycznych elementy matematyki powinny być wprowadzane ze szczególnie staranną precyzją i poprawnością formalną, w większym nawet stopniu niż to się czyni na studiach czysto matematycznych. J. I. Goldberg i R. S. Czerkasow (ZSRR) scharakteryzowali organizację prac dyplomowych studentów instytutów pedagogicznych; prace te poświęcone są zagadnieniom dydaktyki matematyki i mają charakter zarówno teoretyczny jak eksperymentalny. Z innych komunikatów w pierwszej grupie warto zwrócić uwagę na komunikat Levi Howarda (USA), który omówił koncepcję nauczania rachunku różniczkowego i całkowego stosowaną w niektórych szkołach wyższych w USA i opartą na pojęciu „najlepszego przybliżenia wielomianami".

W grupie drugiej większość komunikatów była poświęcona zagadnieniom reformy programów matematyki w szkołach podstawowych i średnich, ale były i takie, w których referenci zajmowali się problemami metod nauczania. Do pierwszego rodzaju należały uwagi G. G. Masłowej, K. I. Neszkowa i A. D. Semuszina o nowych programach opracowanych i szeroko eksperymentowanych w ZSRR przez Akademię Nauk Pedagogicznych, A. A. Zykowa o eksperymentach prowadzonych w Nowosybirsku; w pierwszym roku nauki dzieci operują już liczbami całkowitymi, nie tylko naturalnymi, rozwiązują równania i nierówności, w drugiej klasie występują już elementy algebry oraz układ współrzędnych, elementy teorii zbiorów i elementy geometrii. W programie pierwszych ośmiu klas przewiduje się poza (zrewidowanym zresztą) materiałem tradycyjnym elementy rachunku prawdopodobieństwa i elementy rachunku różniczkowego i całkowego. Doświadczenia prowadzone w Nowosybirsku dowodzą, że dzieci pierwszych klas szkoły podstawowej uczone nowocześnie mogą posuwać się naprzód w nauce matematyki o wiele szybciej niż w tradycyjnej szkole. Wczesne wprowadzenie języka mnogościowego i znakowania literowego bardzo ułatwia nauczanie właśnie małych dzieci. Te wnioski są potwierdzane innymi także doświad-

czeniami prowadzonymi w ZSRR, np. w Moskwie pod opieką A. I. Markuszewicza.

O pracach i eksperymentach programowych w USA mówili P. J Hilton i R. T. Hood, o koncepcjach reformy w Wielkiej Brytanii R. C. Lyness i G. Matthews (niestety w tych konferencjach nie mogłam uczestniczyć). Bardzo interesujący komunikat przedstawili S. I. Szwarcburd i W. G. Aszkinuze (ZSRR) na temat radzieckich szkół średnich przygotowujących programistów. Komunikat był dlatego bardzo instruktywny, że referenci położyli szczególny nacisk na pedagogiczną koncepcję nauczania matematyki w tych szkołach. Podkreślono, że głównym celem nie jest wykształcenie mechanicznej sprawności, ale rozwój myślenia matematycznego ze specjalnym kierunkiem, określonym w komunikacie jako z jednej strony funkcjonalno-algorytmiczne, z drugiej zaś „ε-myślenie". Rezultatem takiego kształcenia jest to, że bardzo duża grupa absolwentów (większość) wybiera w dalszym ciągu z pełnym sukcesem drogę naukową. Inne komunikaty w tej grupie dotyczyły raczej spraw mniej ogólnych.

W dziedzinie metod nauczania szeroko swoje koncepcje ilustrowali przykładami (nawet filmem) E. Biggs i C. T. Daltry z Wielkiej Brytanii, z charakterystycznym dla pedagogicznych ideałów brytyjskich podkreślaniem swobodnej aktywności matematycznej ucznia, opartej na rozwiązywaniu różnych problemów, często natury konkretnej, na stopniowym generalizowaniu obserwacji i doświadczeń, co prowadzi ostatecznie do systematycznego, aksjomatycznego myślenia matematycznego.

A. A. Stoliar (ZSRR) rozwinął szczegółowo koncepcję wprowadzenia do nauczania szkolnego elementów logiki matematycznej, podkreślając również możliwość uwzględnienia metody aksjomatycznej w wyższych klasach szkoły ogólnokształcącej.

W grupie trzeciej znalazły się komunikaty na temat doświadczeń z olimpiadami (M. R. Hayman, Wielka Brytania oraz I. M. Jagłom i W. G. Bołtianskij, ZSRR), z innymi formami pracy pozaszkolnej z matematyki prowadzonej z uczniami od 12 do 15 lat (R. Tiberiu, Rumunia) ze studiami zaocznymi dla młodzieży szkolnej (E. G. Glagolewa i I. M. Gelfand, ZSRR).

Zagadnienie „naukowości" metodyki nauczania matematyki poruszył w swym wystąpieniu G. S. Arzumanian (ZSRR). Krytykując tradycyjną metodykę jako nieobiektywną, nie ugruntowaną naukowo, referent przedstawił własną koncepcję opartą na analizie intelektualnych operacji myślowych i na badaniu ich programowanej optymalizacji.

I. K. Andronow scharakteryzował trzy etapy rozwoju nauczania matematyki w XIX i XX wieku w skali międzynarodowej.

W posiedzeniach Sekcji prócz metodyków brali także udział twórczy wybitni matematycy współcześni. Stale w nich uczestniczył profesor

Markuszewicz, od czasu do czasu profesor Kołmogorow, interweniując w sposób niezwykle interesujący w dyskusji, widzieliśmy tam profesora Jagłoma, pojawiał się od czasu do czasu profesor Freudenthal z Utrechtu i inni.

Prace Sekcji, jakkolwiek interesujące, pozostawiły jednak jakieś odczucie braku syntezy. Przede wszystkim brakowało tu głębszego rozważenia zagadnienia metody badań z zakresu dydaktyki nauczania matematyki, sposobów obiektywnej weryfikacji rezultatów eksperymentów programowych itp. Problemy te bardzo trudne, ale wymagające aktualnie wszechstronnego opracowania i wyłonienia choćby tymczasowych hipotetycznych, roboczych koncepcji, nie były zupełnie poruszane.

4. W związku z Kongresem odbyły się dwa kilkugodzinne posiedzenia zorganizowane przez Międzynarodową Komisję Nauczania Matematyki, której przewodniczącym w ubiegłej kadencji był profesor A. Lichnerowicz (Francja). Zgodnie z planem pracy Komisji w okresie od ostatniego kongresu matematycznego w Sztokholmie jej narodowe podkomisje miały opracować trzy tematy: 1. Rozwój aktywności matematycznej uczniów, rola problemów w tym rozwoju, 2. Metoda aksjomatyczna w nauczaniu matematyki i 3. Nauczanie matematyki dla fizyków. Jako referentów wyznaczono Z. Krygowską, H. G. Steinera (NRF) i J. Pisota (Francja). Na podstawie nadesłanych przez podkomisje narodowe materiałów referenci przedstawili syntetyczne sprawozdania. Referaty te zostały w całości wydrukowane w Enseignement Mathématique.

W referacie na temat rozwoju aktywności matematycznej uczniów oraz roli problemów w tym rozwoju, Z. Krygowska scharakteryzowała bardzo różne niejednokrotnie koncepcje „aktywności matematycznej" i „matematyki własnej" ucznia oraz przedstawiła czynniki sprzyjające i niesprzyjające rozwojowi tej aktywności. Analiza raportów podkomisji narodowych ujawniła kilka pilnych problemów, oczekujących w związku z rewolucyjną modernizacją nauczania matematyki na możliwie wszechstronne rozwiązanie. Wśród nich na pierwsze miejsce wysuwa się konieczność opracowania nowej problematyki zadaniowej dla uczniów, dostosowanej do nowych treści nauczania. Brak takich zadań powoduje bowiem, że nowoczesne podręczniki matematyki dla szkół średnich ograniczają się do zadań, które są — według wyrażenia G. Polyi — tylko ćwiczeniem w prawidłowym używaniu terminologii, a nie prawdziwymi problemami matematycznymi.

W interesującym referacie H. G. Steiner przedstawił przegląd różnych poglądów współczesnych na stosowanie metody aksjomatycznej w nauczaniu matematyki. Mimo dużego zróżnicowania w tych poglądach ustala się przekonanie, że wprowadzenie ucznia szkoły średniej w myślenie aksjomatyczne, a więc nie tylko aksjomatyczna konstrukcja kursu, ale

czynny udział ucznia w aksjomatyzacji, jest i potrzebne i możliwe. Referent omówił prowadzone w związku z tym eksperymenty i ich rezultaty. Wyróżnił trzy typy aksjomatyk: konkretne (np. geometrii euklidesowej), abstrakcyjne (aksjomatyki wieloznacznych struktur algebraicznych) i formalne (aksjomatyka w sensie systemu sformalizowanego). Wprowadzenie ucznia w myślenie aksjomatyczne dokonuje się w sposób najbardziej naturalny na przykładzie aksjomatyk abstrakcyjnych, wielomodelowych.

Trzeci sprawozdawca J. Pisot przedstawił zarówno dyskusję na temat nauczania matematyki dla fizyków, jak również wyłaniające się z tych dyskusji koncepcje. Problemy: czy należy konstruować specjalny kurs matematyki dla studiujących fizykę, jak skorelować kurs matematyki z kursem fizyki i kto ma wykładać matematykę dla fizyków (matematyk czy fizyk teoretyczny), stanowiły główne punkty raportu. Trudność polega na tym, że fizyk potrzebuje matematyki w szerszym zakresie niż specjalizujący się matematyk, ale za to nie musi jej tak głęboko ujmować, jak to czyni matematyk specjalista w jednej dziedzinie. Przedstawiona w wyniku analizy raportów narodowych i wielu dyskusji przeprowadzonych w toku kongresów międzynarodowych koncepcja uwzględnia, zarówno na poziomie szkoły średniej, jak i na poziomie studiów wyższych, dwa kursy matematyki dla fizyków. Pierwszy zmierzający do możliwie szybkiego przekazania im potrzebnej matematycznej wiedzy. drugi służący jej pogłębieniu. W toku pierwszych dwóch lat studiów uniwersyteckich fizyk powinien studiować matematykę razem z matematykami, rozdział następuje dopiero na dwóch wyższych latach, w których studium matematyki dla fizyków jest skoncentrowane dokoła problemów różnych przestrzeni, ważnych dla fizyka; w swym badaniu powinien on przede wszystkim zawsze „wiedzieć, w jakiej przestrzeni się w danej sytuacji znajduje".

5. Ostatnim zebraniem, na którym rozważano zagadnienia nauczania matematyki, było otwarte posiedzenie Sekcji Szkół Średnich Moskiewskiego Towarzystwa Matematycznego, w toku którego profesorowie Uniwersytetu Łomonosowa przedstawili formy współpracy tej Sekcji ze szkołą średnią. Z referatów profesorów A. N. Kołmogorowa, E. B. Dynkina i S. W. Smirnowa wyłonił się obraz rzeczywiście imponującej, bardzo różnorodnej i efektywnej działalności prowadzonej przez pracowników nauki w dziedzinie matematyki w Moskwie, w celu podniesienia ogólnego poziomu nauczania matematyki w szkole średniej oraz ułatwienia startu naukowego młodym uzdolnionym absolwentom szkoły średniej. Terenem tej pracy są szkoły specjalne organizowane i kierowane przez uniwersytet, nauczanie zaoczne (młodzież szkolna niezależnie od normalnej nauki szkolnej uczy się na kursach zaocznych prowadzonych również przez uniwersytet, oczywiście tylko zainteresowana szczególnie matematyką i kierująca się na studia, w których matematyka interweniuje).

szkoły dla młodych matematyków (dodatkowe lekcje poza normalnymi lekcjami w szkole), itp. Osobisty udział wybitnych matematyków światowej sławy w tych pracach, ich bezpośredni kontakt z młodzieżą szkolną ma wpływ nie tylko na samych uczniów, ale i na ich nauczycieli. Z drugiej strony uczestniczenie w tej działalności młodych pracowników nauki, aspirantów i stypendystów, ma także znaczenie dla powiązania tych pracowników uniwersytetu ze szkołą średnią. Zainteresowanie odczytami Kołmogorowa, Dynkina i Smirnowa było ogromne, niestety nieznajomość języka rosyjskiego (referaty były wygłaszane po rosyjsku) uniemożliwiła wielu wybitnym naukowcom z zachodu, którzy wzięli tłumnie udział w tym posiedzeniu, uświadomienie sobie wartości społecznej tej rzeczywiście imponującej działalności radzieckich matematyków.

Przed zakończeniem Kongresu odbyło się jeszcze jedno zebranie, tym razem nieoficjalne, metodyków krajów socjalistycznych z udziałem profesora Markuszewicza. Postanowiono nawiązać ściślejszą współpracę w dziedzinie badań dydaktycznych, reformy i modernizacji nauczania matematyki. Pierwszy zjazd poświęcony zorganizowaniu tej współpracy zaprojektowano na rok 1967 w Polsce. Organizację zjazdu powierzono Katedrze Metodyki Nauczania Matematyki WSP w Krakowie(1).

(1) „*Zagadnienia nauczania matematyki na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Moskwie*", tłumaczenie fragmentów artykułu opublikowanego w czasopiśmie „Matiematika w szkole", zamieściła „Matematyka", zeszyt 3 (1967), str. 106-110.

Tłumaczenie referatu Głagolewej i Gelfanda wydrukowane jest w tym zeszycie, str. 99-102.