ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1967)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ZOFIA KRYGOWSKA (Kraków)

Rozumowanie empiryczne, intuicyjne i formalne w nauczaniu matematyki

(Fragment przygotowanego do druku pierwszego cyklu wykładów z metodyki nauczania matematyki poświęconego zagadnieniom ogólnej metodyki matematyki)

1. Intuicja matematyczna a problemy nauczania

1.1. W rozważaniach na temat nauczania matematyki mówi się niejednokrotnie o „intuicji", o „ujęciu intuicyjnym" w przeciwstawieniu do „ujęcia formalnego". Te terminy pojawiają się również w dyskusjach związanych z twórczością matematyczną. W innym wreszcie znaczeniu mówi się o „intuicjonizmie" i „formalizmie" w metodologii matematyki.

W toku międzynarodowego kolokwium, odbytego w roku 1955 w Paryżu na temat „Rozumowanie w matematyce i w naukach eksperymentalnych", J. Porte oświadczył: „Jeżeli chodzi o pojęcie intuicji, nie mogę zrozumieć, o co chodzi — jest jakaś intuicja w sensie psychologii, w sensie używanym w pedagogice, pozostawmy ją w spokoju, jest intuicja w sensie oczywistości, to jest czymś istniejącym tylko ze względu na tego, kto myśli, np. dla mnie intuicyjną teorią zbiorów jest teoria Cantora, która ma wszystkie zalety, z wyjątkiem tego, że prowadzi do sprzeczności — jeżeli się pójdzie dalej, cytuje się często przypadek ciągu liczb całkowitych: po każdej liczbie całkowitej mogę napisać jeszcze jedną; wydaje mi się to zupełną iluzją, jak umrę nie będę mógł nic napisać. Według mojego zdania, byłoby lepiej wyeliminować zupełnie słowo „intuicja" i wszystkie ciemne pojęcia, które się z tym wiążą" ([15], str. 95).

J. Porte przesuwa — z pewnym nieco pogardliwym akcentem — zagadnienie intuicji matematycznej do pedagogiki i psychologii. Dziedziny te oczywiście interesują dydaktyka, więc nie może on wyeliminować ze swoich rozważań tych „ciemnych pojęć", od których się odcina formalista w matematyce. Nie może on ich wyeliminować także z innych przyczyn, dlatego, że istnienie elementów intuicyjnych w rozumowaniu matematycznym jest potwierdzone przez najwybitniejszych matematyków, ilekroć tylko zechcą oni — zbyt rzadko niestety — wypowiadać się na temat własnej twórczości. Zarówno w toku wspomnianego kolokwium jak

i podczas kongresu odbytego w roku 1938 w Zurychu wielu matematyków i logików wskazywało na intuicyjno-formalny charakter myślenia matematyka. J. Jörgensen mówił np. „Często przeciwstawia się myśl psychologiczną myśli logicznej, być może jest to czasem słuszne. Ale na pewno nie jest słuszne zupełnie izolować od siebie różne dziedziny nauki"... „Można myśleć obrazami — i to jest punkt widzenia psychologa, można myśleć symbolami — i to jest punkt widzenia logika"... „Obraz w istocie rzeczy prowadzi do większej liczby związków, jest bardziej zaangażowany w rzeczywistości i myśl, która się nim posługuje, jest głębsza" ([16], str. 181-183).

Podczas tego samego kongresu H. Lebesgue stwierdził, że nawet odkrycie paradoksów, podważających podstawy matematyki „naiwnej" z punktu widzenia formalizmu, nie zdołało zachwiać zaufania matematyków do ich naturalnego „intuicyjnego" rozumowania. „Jest faktem" — mówił Lebesgue — „że w matematyce są rzeczy, których nie można wyrazić w języku z góry ustalonym. A fakty trzeba uznawać" ([16], str. 179).

H. Poincaré porównywał matematyka bez intuicji do pisarza, który zna doskonale gramatykę, ale nie ma idei. Podobnie jak J. Hadamard, wiązał on „intuicyjne rozumowanie" z pracą podświadomości ([18]). Hadamard wyróżnia nawet typ intuitywny matematyka od typu analitycznego w zależności od tego, w jakiej mierze podświadomość interweniuje w jego myśleniu ([10]). Pracą podświadomości wyjaśniają ci wybitni matematycy nagłe „olśnienia", niespodziewane, wydawałoby się nieumotywowane, rozwiązania trudnych problemów, znane im z własnych doświadczeń.

B. L. van der Waerden konfrontuje „pomysł" i „rozumowanie" ([22], str. 155), przypisując też właściwą rolę podświadomości. Równocześnie jednak wszyscy ci matematycy bardzo mocno podkreślają rolę świadomego, analitycznego rozumowania, które pomysł poprzedza, stwarzając warunki do jego pojawienia się, oraz które po nim następuje, jako jego kontrola i „wypełnianie luk" z uwzględnieniem kryteriów formalnych.

Dydaktyk, który chce wziąć pod uwagę w swych badaniach teoretycznych i w praktyce szkolnej te fakty niewątpliwe, ale trudne do opisania i analizowania oraz przez samych uczonych interpretowane bardzo subiektywnie, staje przed bardzo trudnym zadaniem. Jak słusznie stwierdza J. S. Bruner „pytania dotyczące myślenia intuicyjnego zdają się skupiać dokoła dwóch wielkich zagadnień, czym jest myślenie intuicyjne i co na nie oddziaływa" ([5], str. 60). Niestety, niewiele o tych problemach wiemy. Niemniej nie możemy ich pominąć w naszych rozważaniach. Będziemy więc starać się wydobyć przede wszystkim na jaw te elementy myślenia intuicyjnego w matematyce, na które możemy wpływać w procesie nauczania. Nie mamy żadnych obiektywnych danych na temat

„podświadomości", nie możemy się opierać w nauczaniu matematyki na oczekiwaniu na wątpliwe „olśnienia" naszych uczniów twórczą ideą. Szukać musimy bardziej skonkretyzowanej charakterystyki tak zwanej intuicji matematycznej, charakterystyki przydatnej w kierowaniu uczeniem się matematyki u normalnego, przeciętnego ucznia. Oczywiście, skupiając naszą uwagę na tych bardziej uchwytnych i nadających się do bliższego zdefiniowania elementach intuicji matematycznej, zdajemy sobie sprawę z ogromnego uproszczenia i może nawet sprymityzowania zagadnienia. Jeżeli jednak chcemy nieco rozjaśnić te „ciemne pojęcia", o których mówił J. Porte, musimy się w pierwszej fazie naszych poszukiwań na te uproszczenia zgodzić.

Podobnie, choć może prościej, przedstawia się sprawa tak zwanego rozumowania formalnego w matematyce. Być może nie jest trudno określić, co to jest formalizacja matematycznego rozumowania, choć — jak wiadomo — i z tym jest trochę kłopotu. W rzeczywistości jednak, praktycznie, rozumowanie badacza-matematyka nie jest nigdy w zupełności sformalizowane, a mimo to uznajemy je za formalne. Wyjaśnienie związanych z tymi zagadnieniami pojęć, jakieś choćby tymczasowe, umowne nadanie sensu pewnym terminom, których używa się w dyskusji dydaktycznej w sposób zupełnie dowolny, wydaje się konieczne. Sądzę przy tym, że obydwa zagadnienia „intuicji" i „rozumowania formalnego" należy rozpatrywać łącznie. Są to bowiem jakby dwie strony tego samego procesu. W każdym formalizmie pozostaje jakieś residuum intuicyjne (choćby w regułach posługiwania się symbolami), w każdym rozumowaniu intuicyjnym w matematyce interweniuje poznana uprzednio wiedza matematyczna, która ma charakter formalny. Każde z tych zagadnień można jaśniej przedstawić, gdy się je konfrontuje z drugim.

1.2. Termin „intuicja" pochodzi od łacińskiego czasownika „intueri", co znaczy „oglądać", „wglądać". L. Brunschwieg pisze: „Intuicja w pierwotnym znaczeniu jest ujęciem pewnego przedmiotu wzrokiem. Poznanie matematyczne będzie więc intuicyjne, jeżeli będzie odnosić się do pojęć, którym towarzyszą obrazy. Zatem geometria taka, jaką stworzyli Grecy, jest nauką intuicyjną; matematycy, którzy używali reprezentacji geometrycznych dla rozwiązywania problemów matematyki abstrakcyjnej, począwszy od twórców geometrii analitycznej do Riemanna i Sophusa Liego, są traktowani, zgodnie ze zwykłym znaczeniem tego słowa, jako matematycy intuicyjni" ([6]). Inny typ pierwotnej intuicji, to intuicja fizyczna (kinetyczna, dynamiczna, mechaniczna) oparta na innego rodzaju obrazach, ale interweniująca w analogiczny sposób w myśleniu matematycznym. Reprezentacje mechaniczne były też źródłem wielu genialnych pomysłów matematycznych (por. [22]).

Te pierwotne intuicje przekształcają się w wyniku doświadczenia

naukowego w intuicję wyższego rzędu, którą F. Klein nazywa „intuicją wyrafinowaną", zaś G. Bouligand „intuicją przedłużoną".

G. Bouligand ilustruje takie — jeszcze bardzo proste — „przedłużenie" następującym przykładem. Całkę podwójną z funkcji dodatniej f punktu, określonej w pewnym obszarze płaskim A, można interpretować jako: 1° masę „płytki" A, jeżeli gęstość w punkcie X jest równa $f(X)$ i 2° objętość figury przestrzennej zdefiniowanej na obszarze A przez funkcję $f(X)$. Przy przejściu do całki potrójnej pierwsza interpretacja przedłuża się w sposób naturalny; całka potrójna ma sens fizyczny jako masa bryły. Druga interpretacja traci sens fizyczny. Ale — jak pisze Bouligand — „byłoby to zawodem dla myśli nie móc odnaleźć w związku z całką potrójną obu obrazów, które nasuwała nam całka podwójna. Gest unifikacji wydaje się nam konieczny choćby za cenę wielkiego wysiłku, tj. skonstruowania — już bez oparcia w konkrecie — przestrzeni czterowymiarowej. To jest właśnie to, co się proponuje nazywać intuicją przedłużoną" ([2]). Chodzi tu o to, że w badaniu przestrzeni czterowymiarowej doświadczenie myślowe i obrazy pochodzące z opracowanej poprzednio teorii przestrzeni trójwymiarowej mogą sugerować hipotezy i problemy, mogą odegrać rolę idei wiodących w rozumowaniu, umożliwiają specyficzne bezpośrednie „widzenie" innego już rodzaju. O takiej „przedłużonej" intuicji myślał zapewne P. S. Aleksandrow, pisząc o pracach uczonych polskich i rosyjskich w dziedzinie teorii mnogości i topologii:„... w tych pracach spotyka się coś wspólnego: odwagę, z jaką badacze zajęli się zupełnie nowymi obiektami geometrii i analizy oraz siłę, z jaką pokazali na tych obiektach możliwości naszej intuicji matematycznej. Zarówno w pracach Janiszewskiego jak i Łuzina zobaczyliśmy coś całkiem nowego: zobaczyliśmy, jakimi mogą być twory geometryczne, niepodobne zupełnie do znanych nam z klasycznych działów geometrii, jednakże zupełnie dostępne naszej wyobraźni geometrycznej. Z drugiej strony zobaczyliśmy strukturę geometryczną najogólniejszych funkcji mierzalnych — funkcji tak ogólnych, że nie dają się przedstawić w zwykły w matematyce sposób — za pomocą wzorców, a przy tym okazują się podobnymi — w prostym i ścisłym sensie — do funkcji ciągłych...". „W pracach tych teoria mnogości wniosła ze sobą do matematyki nie abstrakcję i schematyzm, ale bezpośrednie »widzenie« nadzwyczaj ogólnych i istotnie ważnych konstrukcji matematycznych. W ten sposób okazało się, że granice tego, co w matematyce uważa się za poglądowe, mogą być przesunięte bardzo daleko" ([1]).

Dla problemów nauczania matematyki ważna jest ta właśnie strona wzajemnych związków między formalizmem i intuicją. Intuicja pierwotna nadaje sens formalizmowi, formalizm „przedłuża" intuicję, czyni ją bardziej „wyrafinowaną", wzbogaca ją, rozszerza, umożliwia bezpośredni wgląd w to, co mogłoby wydawać się pustą abstrakcją; nowa intuicja

wypełnia treścią wyższy stopień formalnych konstrukcji i ten sam proces powtarza się na wyższym poziomie. W tym rozumieniu myślenie intuicyjne w stosunku do myślenia formalnego miałoby charakter bardziej konkretny, bo byłoby bardziej nasycone obrazami.

Przykłady podane przez Bouliganda i Aleksandrowa opierają się na reprezentacjach przestrzennych i kinetyczno-mechanicznych. Inny typ intuicji matematycznej związany jest z rekurencją i strukturą arytmetyczną zbioru liczb naturalnych. Ten rodzaj rozumowania intuicyjnego był i jest tematem zainteresowań psychologów i filozofów. Nie stronili od tych zagadnień i wybitni matematycy, jak np. Poincaré, który intuicji rekurencji poświęcił wiele uwagi w swych publikacjach metodologicznych. Poincaré upatrywał w intuicji rekurencji jakąś pierwotną, podstawową intuicję matematyczną. Nie mogąc dokładniej w ramach ograniczonego wykładu przedstawić dyskusji toczącej się na ten temat, chcę tylko podkreślić ważne dla dydaktyki rezultaty badań psychologicznych, z których wynika, że nie istnieje jakaś „pierwotna intuicja rekurencji", ale zdolność do rozumowania rekurencyjnego rozwija się równolegle z rozwojem pojęcia liczby w myśli dziecka i przyswajaniem sobie przez nie całej struktury arytmetyki ([9]). Tym niemniej już uczeń szkoły podstawowej potrafi jednym „chwytem myśli" ująć ogólne twierdzenie o liczbach, wyrażając zwrotem „i tak dalej" intuicyjne uzasadnienie oparte na rekurencji.

W myśleniu intuicyjnym dostrzegamy dziś jeszcze inne elementy. Mówi się, np. o „intuicji algebraicznej", wyrażającej się w szczególnej łatwości dostrzegania znanych struktur algebraicznych w nowych niejednokrotnie bardzo skomplikowanych sytuacjach matematycznych oraz zupełnie nieraz zmieniającej spojrzenie matematyka na dawne, klasyczne teorie.

Poruszając to zagadnienie, chcę zwrócić uwagę na sprawę ogólniejszą. Można by sądzić, że formalny i bardzo abstrakcyjny styl matematyki współczesnej nie sprzyja rozwijaniu intuicji oraz utrudnia posługiwanie się przy jej studiowaniu prostymi elementarnymi intuicjami. Jednakże tak nie jest, przynajmniej w zakresie podstawowych struktur algebraicznych i topologicznych interweniujących w prawie wszystkich dziedzinach matematyki i jej zastosowań. Pod formalizmem języka, którym posługuje się matematyk, można doszukać się różnych źródeł abstrakcji, naturalnych i nieobcych naiwnej myśli. Wielość i rozmaitość modeli ogólnych struktur sprawia, że te bardzo abstrakcyjne pojęcia są szczególnie intensywnie nasycone różnorodnymi intuicjami. Znaczenie tego właśnie faktu dla nauki tak wyjaśnia N. Bourbaki: „Każda struktura przynosi z sobą własny język, nasycony szczególnymi rezonansami intuicyjnymi, pochodzącymi z teorii, z których ją wyabstrahowała analiza aksjomatyczna. Dla badacza, odkrywającego tę strukturę nagle w zjawiskach które studiuje, jest to jakby modulacja zwracająca od razu intuicyjny prąd jego

myśli w kierunku niespodziewanym i oświetlająca nowym blaskiem matematyczny krajobraz, w którym się on porusza" ([3]). Nie można oczywiście przenosić doświadczeń i możliwości nauki na teren nauczania bez uwzględnienia ogromnego dystansu dzielącego prymitywną działalność ucznia od twórczej działalności matematyka. Niemniej już dziś na podstawie pierwszych doświadczeń w zakresie modernizacji nauczania matematyki szkolnej dostrzegamy szczególny rodzaj intuicji rozwijanych u uczniów przez nowe treści matematyczne: elementy teorii zbiorów, algebry i topologii, mimo ich pozornie bardzo formalnej i symbolicznej oprawy.

Radziecki dydaktyk matematyki W. D. Gonczarow sprowadza wprost myślenie intuicyjne do myślenia o danej abstrakcyjnej sytuacji za pośrednictwem jakiegoś jej modelu. „Niespodziewane, jak się czasem mówi, intuicyjne, nagłe rozwiązanie można wyjaśnić (być może nieświadomym) posługiwaniem się modelami" ([8], str. 54). Wybór odpowiedniego modelu niejednokrotnie rozstrzyga o sukcesie. Model może też posłużyć do sprecyzowania i wyrażenia twórczego pomysłu, co ilustruje w sposób niezwykle interesujący w cytowanym poprzednio artykule B. L. van der Waerden. Wydaje się, że każdy matematyk porusza się myślą w specyficznie dla siebie dogodnym świecie modeli i że pod tym względem zróżnicowanie wśród matematyków jest znaczne.

Abstrakcyjny schemat zachowuje tylko część stosunków występujących w jego pierwotnych modelach. Ale w myśli tego, kto się tym schematem posługuje, zostaje pamięć tych modeli, zostają obrazy niektórych stosunków. Te obrazy towarzyszą rozumowaniu, mogą nasuwać nowe twórcze idee przez właściwe analogie. W tym sensie interpretujemy jeden z aspektów „intuicji" jako „pamięć" własnych doświadczeń zdobytych na niższym poziomie schematyzacji, która zostaje uruchomiona na wyższym już poziomie abstrakcji, służąc myśleniu jako system orientacyjnych znaków, pomagających przy wyborze drogi w trudnym terenie, wyborze, którego dokonujemy z mniejszym lub większym zaufaniem do „rzetelności" tych znaków, z mniejszą lub większą „oczywistością". Jeżeli ta pamięć jest skoncentrowana na tych własnościach modelu, które zostały zachowane w schemacie, jej rola jest bardzo twórcza. Czasem jednak natrętny obraz modelu sugeruje jego własności szczególne, które nie powinny być zachowane w schemacie; mówimy wtedy, że intuicja zawodzi, że prowadzi nas do błędnych hipotez. Na przykład błędne przekonanie wielu matematyków ubiegłych wieków, że nie można skonstruować funkcji ciągłej w przedziale i w żadnym punkcie tego przedziału nie mającej pochodnej, było refleksem intuicyjnego skojarzenia funkcji ciągłej z jej modelem geometrycznym, krzywą, której wyobrażenie oparte było na modelu konkretnym, rysunku lub ruchu. Tak zwana „paradoksalność" rozkładu kuli Banacha polega na natrętnej „pamięci" własności pola „zwykłych" figur geometrycznych, lub pola płatów w sensie analizy,

o których tu właśnie należałoby zapomnieć. Intuicja w znaczeniu „pamięci" modeli może więc odegrać rolę wiodącą lub przeciwnie hamującą, jeżeli osobie, przystępującej do badania matematycznego brak doświadczenia myślowego w pewnej dziedzinie.

Przezwyciężenie tej trudności, uznanie formalnie udowodnionych — wbrew intuicji pierwotnej — faktów, prowadzi często do intuicji nowych, „wyrafinowanych", „przedłużonych". Zapoznanie się np. z dowodem możliwości „paradoksalnego rozkładu" kuli, otwiera drogę do nieznanych poprzednio intuicji dotyczących miary. G. Cantor szukając na próżno dowodu intuicyjnego dlań twierdzenia, że kartezjańskiej przestrzeni n-wymiarowej nie można odwzorować wzajemnie jednoznacznie na kartezjańską przestrzeń jednowymiarową, odkrył ze zdumieniem, że — wbrew jego wyobrażeniom — jest to właśnie możliwe. Pisał w związku z tym do Dedekinda: „widzę to, ale nie wierzę w to"! (cytuję za [4], str. 62). Zauważmy, że dziś z takim odwzorowaniem bez szczególnego zdziwienia zapoznaje się każdy studiujący matematykę. Parafrazując wypowiedź wybitnego francuskiego matematyka współczesnego A. Lichnerowicza, można by tę sytuację wyjaśnić w sposób następujący: często różnica między „intuicyjnym" i „formalnym" uznaniem pewnego faktu wynika z różnicy między tym, z czym jesteśmy już oswojeni, a tym, co jest dla nas zupełnie nowe.

To stwierdzenie kieruje naszą uwagę na nowy aspekt „intuicji" matematycznej. Matematyk — specjalista w pewnej dziedzinie matematyki — ma tu więcej intuicji pozytywnych niż inny matematyk, równie utalentowany, który tę dziedzinę zna, ale który w niej nie pracuje. Dlaczego tak jest? Oczywiście dlatego, że pierwszy rozporządza wielu doświadczeniami, co pozwala mu na słuszne przewidywania i na przeprowadzanie skróconych, ale poprawnych rozumowań, przed ich ostatecznym sprecyzowaniem. Może się więc w tym swoim świecie poruszać myślą szybko i pewnie, tak jak alpinista porusza się szybko i pewnie w dobrze mu znanym terenie górskim, jakkolwiek nie zawsze jest w pełni świadom tego, co kieruje jego decyzjami, wyborem drogi, przewidywaniem zmiany pogody itd. Poprzednio rozważaliśmy „pamięć" o modelach, która jest źródłem pewnych intuicji w dziedzinie ich abstrakcyjnego schematu; teraz dostrzegamy inną „pamięć", „pamięć doświadczeń" już na poziomie abstrakcyjnego schematu. Na przykład czujemy „intuicyjnie", że pewna droga nie doprowadzi do celu w danej sytuacji, ponieważ mieliśmy już wiele doświadczeń negatywnych w podobnych sytuacjach. Doświadczony matematyk np. nie będzie próbował dziś szukać dowodu hipotezy Fermata takimi środkami, jakie usiłują tu stosować z uporem laicy. Matematyk po wielowiekowych doświadczeniach w tej dziedzinie intuicyjnie jest świadom, że problem nie jest natury elementarnej. Być może się myli, nie mniej taką intuicją metodologiczną się już kieruje.

Warto zwrócić uwagę na to, jak w matematyce, w jej języku i symbolice, odzwierciedla się „pamięć modeli". Wiadomo np., że terminologia geometryczna przeniknęła do prawie wszystkich działów matematyki współczesnej, bardzo dalekich od geometrii sensu stricto. Otoczenie, sąsiedztwo, brzeg, wnętrze, punkt i bardzo wiele innych terminów geometrycznych występuje dziś w różnych abstrakcyjnych i niegeometrycznych teoriach. Podobną karierę zrobiły najprostsze terminy i symbole arytmetyki. Terminy: dodawanie, mnożenie, suma, iloczyn, dzielnik, zero, jedynka itp. spotykamy w różnych działach matematyki, przy czym ich sens jest bardzo różnorodny. Pozostaje jednak jakaś reszta intuicyjna w ich interpretacji, dalekie echo, mglista pamięć pierwotnych pojęć arytmetycznych. Nazwa „macierz zerowa" nie jest obojętna dla ucznia. Stwarza analogie pozytywne (moduł dodawania, rola zera jako czynnika) i negatywne (sugestia, że iloczyn macierzy jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest zerem).

Niewątpliwie intuicja matematyczna jest zjawiskiem bardzo złożonym i omówione wyżej jej aspekty nie wyczerpują tego zjawiska. Ale — jak już podkreślałam — dydaktyka przede wszystkim interesują te fragmenty mechanizmu tego zjawiska, na które może świadomie wpływać w procesie nauczania. Otóż zarówno kształcenie „pamięci własności modeli" oraz uczenie techniki pomagania sobie różnego rodzaju modelami — konkretnymi i abstrakcyjnymi — w toku rozwiązywania zagadnień, jak i kształcenie „pamięci matematycznych doświadczeń", nie wykracza poza racjonalną, świadomą i planową działalność nauczyciela. Dlatego możemy żądać od niego rozwijania matematycznych intuicji ucznia, przy zachowaniu harmonii między intuicjami i formalnymi elementami metody matematycznej w ujęciu dostępnym uczniowi.

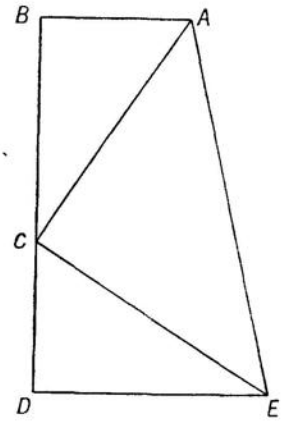
Aby jednak móc racjonalnie te zagadnienia rozważać, trzeba niektóre terminy, którymi dotąd posługiwaliśmy się w sposób dość ogólnikowy, sprecyzować tak, aby ich sens w zastosowaniu do nauczania szkolnego stał się bardziej konkretny. W szczególności trzeba sobie uświadomić, w jakim znaczeniu można mówić o rozumowaniu intuicyjnym w przeciwstawieniu do rozumowania formalnego, o strukturze i jej modelach, o metodzie aksjomatycznej itp. w skromnym zakresie naiwnej jeszcze matematyki szkolnej. Należy także zilustrować te pojęcia konkretnymi przykładami i rozważyć środki dydaktyczne sprzyjające harmonijnemu rozwojowi zarówno myślenia intuicyjnego jak i formalnego ucznia szkoły podstawowej i średniej.

2. Wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne i rozumowanie formalne w nauczaniu matematyki w szkole

2.1. Odróżnimy przede wszystkim — często identyfikowane niesłusznie — wnioskowanie empiryczne od rozumowania intuicyjnego.

Terminu wnioskowanie empiryczne będziemy używać na oznaczenie dwóch różnych sytuacji: 1° Uczeń obserwuje fizyczne stosunki przestrzenne lub ilościowe, występujące w jego naturalnym otoczeniu, w modelu, lub na rysunku i bezpośrednio je matematyzując, to jest opisując w terminach matematycznych to, co widzi lub stwierdza doświadczeniem, formułuje tezę lub hipotezę matematyczną (w pierwszym przypadku niepoprawnie, w drugim poprawnie); 2° Uczeń wykonuje ciąg prób matematycznych (np. obliczeń) i dostrzegając pewną prawidłowość w rezultatach tych prób formułuje ogólną tezę lub hipotezę matematyczną, a więc stosuje metodę indukcji w matematyce, tak jak ją stosuje przyrodnik (w pierwszym przypadku niepoprawnie, w drugim poprawnie).

Tego rodzaju wnioskowanie nie ma nic wspólnego z tym, co nazywamy intuicją matematyczną. Stosuje się je często w szkole, jako punkt wyjścia przy formułowaniu twierdzenia lub poszukiwaniu jego dowodu. Jeżeli np. uczennica rozwiązując zadanie geometryczne zilustrowane konfiguracją przedstawioną na rysunku 1 ($\sphericalangle B$ i $\sphericalangle D$ mają być proste, $AB = CD$, $BC = ED$) korzysta z przesłanki, że $\sphericalangle ACE$ jest prosty, bo to widzi na dokładnie wykonanym rysunku, to nie mamy tu do czynienia z rozumowaniem intuicyjnym, ale z niepoprawnym wnioskowaniem empirycznym pierwszego rodzaju, polegającym na przenoszeniu wizualnego spostrzeżenia pewnej własności modelu wprost do danej matematycznej sytuacji. Jest to empiryzm niepoprawny, choć z danych zadania wynika, że $\sphericalangle ACE$ jest prosty. Wnioskowanie z rysunku byłoby poprawne, gdyby uczennica sformułowała w wyniku obserwacji hipotezę matematyczną i następnie ją formalnie zweryfikowała, a więc gdyby pomyślała „być może, że ten kąt tak widocznie na rysunku prosty jest w rzeczywistości (matematycznej) istotnie prosty; trzeba sprawdzić, czy to wynika z założeń zadania".



Rys. 1

Poprawnie empirycznie rozumuje uczeń, który mając za zadanie obliczenie sumy: $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, znajduje kolejno: $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{2}{3}$, $s_3 = \frac{3}{4}$, $s_4 = \frac{4}{5}$, dostrzegając „prawidłowość" w tym ciągu oraz formułując przypuszczenie: „to będzie może wzór $s_n = \frac{n}{n+1}$." W dalszym ciągu następuje weryfikacja tego przypuszczenia oparta na twierdzeniu o indukcji zupełnej. Jest to empiryzm zupełnie innego rodzaju niż w poprzednim przykładzie, empiryzm w samej matematyce, a nie w dziedzinie jej fizycznych modeli.

2.2. W obu przypadkach — przy postępowaniu poprawnym — uczniowie stwierdzają: „być może tak jest", ale wcale nie uświadamiają sobie żadnej idei, wyjaśniającej, dlaczego „tak powinno być"; takie idee są właśnie charakterystyczne dla rozumowania intuicyjnego. Dwunastoletni uczeń nie ma przed sobą żadnego rysunku. Z wiadomości, że prostokąt o bokach długości a, b zawiera się wewnątrz prostokąta, którego boki mają długości c, d (przy czym wzajemne położenia boków jednego i drugiego prostokąta nie są ustalone, mogą być nierównoległe) wysuwa bezpośrednio wniosek, że $a \cdot b < c \cdot d$. Oczywiście, poprawny dowód tego twierdzenia na poziomie klasy szóstej nie byłby łatwy. Uczeń wypowiada swą tezę z poczuciem pełnej oczywistości, nie dlatego, że widzi, ale dlatego, że wie, przy czym wie nie tylko „jak jest", ale „dlaczego tak musi być". Stwierdza „gdy ten prostokąt zawiera się w drugim, to musi mieć pole mniejsze". Matematyk zdaje sobie sprawę z tego, że takie stwierdzenie, że coś „musi zachodzić" nie jest dowodem, i ile kłopotu sprawia poprawny dowód właśnie faktu rozważanego przez ucznia. Niemniej uczeń rozumuje i jest to specyficzne rozumowanie intuicyjne, oparte na przesłankach, co do których uczeń nie ma wątpliwości, których nie umiałby zapewne sprecyzować i w których zostały jakby skoncentrowane jego różne doświadczenia przedmatematyczne (porównywanie i mierzenie wielkości). W dalszym ciągu zobaczymy, jak ta właśnie „intuicja wielkości" będzie pewną przeszkodą w rozumieniu innych matematycznych pojęć, którą uczeń będzie musiał pokonać rozumowaniem formalnym, np. gdy zauważy, że obszar jednego z dwóch kątów odpowiednich (w układzie dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią) zawiera się w obszarze drugiego z tych kątów, jest jego właściwą częścią, a mimo to można jeden z tych kątów nałożyć na drugi przez translację i są one przystające.

Intuicyjnie, a nie empirycznie, rozumuje uczeń, który szukając wzoru na „n-ty wyraz postępu arytmetycznego", wypisuje kilka pierwszych wyrazów tego postępu: $a_2 = a+r$, $a_3 = a+r+r = a+2r$, $a_4 = a+2r+r = a+3r$, $a_5 = a+3r+r = a+4r$, i nagle stwierdza: „już wiem, to tak musi być i dalej, zawsze dodaję po jednym r, to musi być $a_{10} = a+9r$, a więc ogólnie $a_n = a+(n-1)r$". Rozumowanie ucznia nie jest formalne. Nie jest też empiryczne, co wyraźnie widzimy, porównując jego odpowiedź z odpowiedzią innego ucznia, który podobnie oblicza kilka pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego i następnie zauważa: „w drugim wyrazie występowało jedno r, w trzecim $2r$, w czwartym $3r$, to byłoby zgodne z wzorem $a_n = a_1+(n-1)r$". Uczeń rozumuje tu jak przyrodnik: doszukuje się ogólnego prawa obejmującego poszczególne znane przypadki. Stwierdza, że „tak jest", ale nie zastanawia się nad tym, „dlaczego tak być musi", co tak silnie interweniuje w myśleniu jego kolegi, który przeprowadzony następnie ścisły, bo oparty na indukcji matematycznej, dowód twierdzenia o ciągu arytmetycznym uważa za niepotrzebną for-

malność, bowiem ten dowód już niczego do jego przekonania nie dodaje i jest w istocie rzeczy tylko zalegalizowaniem jego intuicyjnego rozumowania. W drugim przypadku dowód ścisły jest dla ucznia potrzebną weryfikacją jego empirycznej, wysuniętej z obserwacji kilku szczególnych przypadków, hipotezy. Przykład ten ilustruje wyraźnie różnicę między intuicyjnym rozumowaniem i empirycznym wnioskowaniem, które przyjmuje się często za punkt wyjścia w nauczaniu matematyki. Gdy uczeń mówi: „i tak dalej", to może to powiedzenie wyrażać zarówno samą konstatację empiryczną, jak i głębokie przekonanie i jasne ujęcie „jednym chwytem myśli" całego nieskończonego ciągu operacji, oparte na świadomości rekurencji. „I tak dalej" w tym ostatnim sensie pojawia się w rozumowaniach uczniów bardzo często tam, gdzie zastosowano definicję rekurencyjną jakiegoś terminu.

Podkreślałam kilkakrotnie poczucie oczywistości towarzyszące rozumowaniu intuicyjnemu związane z tym, że uczeń wypowiadając jakąś tezę nie tylko stwierdza „tak jest", ale wyjaśnia „dlaczego tak być musi" (czasem jedno i drugie jest zresztą błędne). Inny rodzaj rozumowania intuicyjnego charakteryzuje się tym, że wypowiadane twierdzenie traktowane jest jako hipoteza, oparta na przeświadczeniu, że „tak powinno by być". Na przykład uczeń odkrywa „zasadę analogii" między pojęciami planimetrii i stereometrii w operacji „podnoszenia wymiaru o 1". Mówi „sześcian w przestrzeni — to kwadrat w płaszczyźnie, kwadrat w przestrzeni — to odcinek w płaszczyźnie, kula w przestrzeni — to koło w płaszczyźnie". I sugeruje, że — wobec tej odpowiedniości — wzory na pole sfery i objętość kuli „powinny by powstawać odpowiednio z wzorów na długość okręgu i pole koła przez podniesienie wymiaru". Zatem z wzoru $o = 2r\pi$ powinien wynikać wzór na pole sfery $s = (2r)^2\pi$, z wzoru $k = r^2\pi$ wzór $v = r^3\pi$. Pierwszy z tych hipotetycznych wzorów jest prawdziwy, drugi fałszywy. Niemniej uczeń nie zaproponował ich w wyniku bezmyślnego zgadywania, ale przeprowadził logiczne rozumowanie *sui generis* oparte na dostrzeżonej analogii w strukturze.

Myśl, że ze względu na analogię w strukturze „tak powinno by być", może być i jest rzeczywiście źródłem wielu matematycznych idei i pomysłów. W tej formie intuicji jest chyba jakiś bardzo istotny element matematycznego rozumowania, podobnie zresztą jak w intuicyjnym odczuciu, że ze względu na analogię w strukturze „tak nie powinno by być". Mówił o tym H. Lebesgue: „Gdy protestujemy: to rozumowanie jest na pewno fałszywe! — to być może czynimy to czasem dlatego, że dostrzegamy absolutnie uderzającą sprzeczność z tym, co dobrze znamy, ale być może i dlatego, że brak nam jest dostatecznej zgodności, dostatecznej harmonii między tym co znamy i otrzymanym rezultatem, dlatego, że nie byłoby to dostatecznie piękne, lub — rzadziej — że byłoby to zbyt piękne. Krótko mówiąc — zaufanie pojawia się, gdy rezultat zgadza się z tym,

czego oczekiwaliśmy. Byłaby to podstawa jednak bardzo niepewna dla naszego zaufania, gdybyśmy nie mieli pewnych środków kontroli" ([16], str. 119). Analogia w strukturze to dla ucznia właśnie dostępny mu rodzaj harmonii. Uczeń, który jest zdolny ją odkryć, mimo popełnianych błędów zasługuje na uwagę i szczególną opiekę. Jest on bowiem zdolny również do pewnego rodzaju odwagi matematycznej, bardzo rzadko spotykanej w szkole. Rozwijanie tego rodzaju intuicji jest zarazem rozwijaniem odwagi matematycznej uczniów, koniecznej dla zainteresowania ich matematyką i pobudzenia samodzielnego wysiłku.

2.3. Myśląc o rozumowaniu formalnym w nauczaniu szkolnym nie myślimy oczywiście o rozumowaniu sformalizowanym. Mamy natomiast na uwadze rozumowanie uważane w praktyce matematycznej za wystarczająco ścisłe. Matematyk zadowala się pewnym optimum precyzji, które nie jest równoznaczne z maximum ścisłości. To optimum jest uwarunkowane różnymi czynnikami. Zależy ono od tematu i zawiłości zagadnienia, jak również od tego, czy mieści się ono w dziedzinie już dobrze zbadanej, czy właśnie w zupełnie nowej. Jest poza tym regulowane zdrowym rozsądkiem i doświadczeniem osobistym i grupowym, a nawet pewnym obyczajem naukowym, panującym w danym etapie historycznego rozwoju matematyki. Optimum precyzji matematycznego rozumowania na poziomie szkolnym nie może być też absolutnie z góry zdefiniowane. Zależy ono oczywiście od wieku ucznia i jego zaawansowania w formalnym rozumowaniu oraz od środków logicznych, którymi już rozporządza. Zależy również od rozwoju dydaktyki, która odkrywa coraz to nowe środki wyrazu myśli matematycznej ucznia, coraz to bardziej odpowiadające zarówno jego możliwościom, jak i naukowym wymaganiom. Wprowadzany do nauczania szkolnego ostatnio na całym świecie „język mnogościowy" ułatwia naturalne i równocześnie ścisłe formułowanie rozumowań już na poziomie szkolnym. Związana z tym językiem symbolika oraz schematy Venna i grafy umożliwiają zharmonizowanie obrazowego przedstawienia matematycznej myśli z precyzją nieznaną w tradycyjnej szkole.

O tych sprawach wspomniałam już w poprzednich wykładach, powracać będziemy do nich często rozważając konkretne przykłady tematów szkolnych.

Matematyczne rozumowanie — nie sformalizowane — zawiera zawsze wiele skrótów i nie dość precyzyjnie uzasadnionych ogniw. Jednakże matematyk ma świadomość, że są to tylko skróty, które nietrudno byłoby rozwinąć, oraz wie, jak to można by było zrobić. Dopuszcza się je na zasadzie pewnej uczciwości naukowej. Mówiąc o optimum precyzji w rozumowaniach szkolnych, myślimy również o pewnej uczciwości wobec myśli matematycznej ucznia. Za naruszanie tej zasady należy uznać prześlizgiwanie się nad takimi istotnymi lukami w rozumowaniu, których uzupełnienie nie byłoby w ogóle możliwe na poziomie danej klasy, ukrywanie

tego przed uczniami i przedstawianie im pseudodowodu jako wzoru matematycznego rozumowania. W takich przypadkach uczciwość matematyczna i pedagogiczna nakazuje uświadomienie uczniom pominiętego ogniwa, poinformowanie ich o tym, że dowód został przeprowadzony i jest znany, i wyjaśnienie pominięcia tego dowodu jego trudnością, czy niemożliwością przedstawienia go w ramach szkolnego kursu. Niedopuszczalne są takie skróty, które w istocie rzeczy pokrywają błędne koło wynikające z nieokreślenia podstawy rozumowania.

Ten postulat kieruje naszą uwagę w stronę kryteriów uznawania tez matematycznych, które muszą być stopniowo przez ucznia poznawane i stopniowo coraz to precyzyjniej rozumiane i stosowane. Takim podstawowym kryterium jest kryterium wywiedlności danego twierdzenia z określonej aksjomatyki. Można by oczywiście zarzucić temu stwierdzeniu, że nie uwzględnia się w nim faktów historycznych, to jest rozwoju wielkich teorii matematycznych przed ich aksjomatyzacją oraz praktyki matematyków, prowadzących swe badania bez oglądania się w konkretnej sytuacji na aksjomatykę. Zarzut ten polegałby jednak na nieporozumieniu. Student rozwiązujący w ramach analizy klasycznej jakieś zagadnienie nie myśli i nie musi myśleć o aksjomatyce. Tym niemniej rozwiązanie przez niego podane będzie uznane za poprawne, jeżeli ostatecznie zostanie uznane za tezę teorii liczb rzeczywistych, opartej na definicji struktury ciała zupełnie uporządkowanego i ciągłego; ta struktura może być zdefiniowana bezpośrednio aksjomatycznie na gruncie teorii mnogości, lub konstruowana stopniowo od liczb kardynalnych począwszy również na gruncie teorii mnogości, niemniej dla analizy klasycznej taka podstawa istnieje i z niej są wywiedlne twierdzenia analizy. Matematyk może w swych badaniach korzystać z różnych teorii równocześnie. Wtedy podstawa jego rozumowania może być bardzo złożona, krzyżują się w niej różne podstawowe struktury, definiowalne aksjomatycznie, niemniej potrafi on tę bazę swych poszukiwań wskazać; bez tego nie można by rozstrzygnąć czy jego rozumowanie jest poprawne, czy jego tezy można uznać.

Będziemy mówić, że uczeń rozumuje formalnie, jeżeli świadomie stara się wywieść w drodze logicznych inferencji pewną tezę z określonego zespołu innych tez, które w danej sytuacji uznano już intuicyjnie lub udowodnione. Może to mieć miejsce zarówno w ramach lokalnie dedukcyjnej organizacji materiału nauczania (tylko pewne fragmenty kursu zorganizowane dedukcyjnie) w szkole podstawowej, jak i w ramach globalnie dedukcyjnej organizacji kursu matematyki, którą proponujemy dla szkoły średniej. Dotyczy to także zarówno twierdzeń teorii, jak i prostych zadań rozwiązywanych przez ucznia samodzielnie. Rozwiązując zadanie rachunkowe: „oblicz objętość stożka równobocznego wpisanego w kulę o promieniu r" uczeń powinien mieć tę samą świadomość

metodologiczną, którą ma dowodząc twierdzenia Pitagorasa: odpowiedź na postawione pytanie (w danym przypadku wzór na objętość stożka) może być uznana za poprawną, jeżeli się ją uda wywieść „rozumowaniem logicznym" z uznanych poprzednio twierdzeń i definicji w ramach arytmetyki i geometrii.

Jednym z zasadniczych warunków tej świadomości metodologicznej, której rozwinięcie jest ważnym celem nauczania matematyki, jest prawidłowe rozumienie przez ucznia roli definicji matematycznej. Poprawna dedukcja wymaga bowiem zdyscyplinowanego posługiwania się definicją. Brak tej dyscypliny formalnej w myśli ucznia przejawia się rozmaicie, między innymi także w trudnościach, z jakimi spotyka się on w dedukcyjnej geometrii. Wynikają one w dużej mierze z tego, że uczniowie w toku rozumowania nie korzystają świadomie z definicji, ale odwołują się do intuicyjnych obrazów odnośnych pojęć, przekraczając od razu tekst definiensu, gdy myślą o definiendum. Spotykamy tu paradoks dydaktyczny. Im bardzej starannie i wszechstronnie pod względem poglądowym przygotujemy definicję geometryczną, tym więcej trudności natury metodologicznej będzie miał uczeń, gdy to pojęcie stanie się przedmiotem dedukcji. Im więcej bowiem uczeń „wie" intuicyjnie o danym przedmiocie, tym trudniej mu o tej całej „wiedzy" formalnie jeszcze niezalegalizowanej zapominać, gdy ma w toku rozumowania poprawnie korzystać z definicji. Na przykład gdy rozważa w geometrii proste równoległe zdefiniowane jako proste zawarte w jednej płaszczyźnie, rozłączne lub identyczne, to nie wolno mu w toku rozumowania powoływać się na to, że są to proste w każdym punkcie „ równoodległe" dotąd, dokąd odpowiednie definicje i twierdzenia metryczne o tych odległościach nie zostaną wprowadzone i twierdzenia udowodnione. Jeżeli więc chcemy najpierw rozwinąć geometrię afiniczną, jeżeli nie wprowadziliśmy żadnych aksjomatów metrycznych geometrii, chcielibyśmy, aby uczeń o tych odległościach, intuicyjnie rozumianych, zapomniał. Nie jest to jednak łatwe, bowiem od samego początku nauczania matematyki właśnie i przede wszystkim własności metryczne równoległych szczególnie starannie przyswajano uczniowi i utwierdzano je poglądowo odpowiednimi konstrukcjami i rachunkami (w szkole podstawowej według podręcznika polskiego definiuje się dwie proste równoległe, jako dwie proste mające wspólną prostopadłą). Rozumienie równoległych w sensie afinicznym wymaga od ucznia świadomego wyeliminowania tych wszystkich przedstawień poglądowych i posługiwania się terminem „proste równoległe" tylko w sensie afinicznej definicji, wymaga więc jasnej świadomości metodologicznej, że ten sam model może być potraktowany rozmaicie z punktu widzenia różnych struktur.

Poglądowe nauczanie matematyki w szkole ułatwia więc, ale równocześnie i utrudnia wprowadzenie myśli ucznia w dziedzinę matematyki

i jej metod. Jest to zresztą specyficzna trudność nauczania matematyki, której nie znają i której nawet nie rozumieją dydaktycy innych przedmiotów. Obserwacje i systematyczne badania prowadzone w szkole ujawniają, że w rezultacie skrajnie poglądowego nauczania matematyki i przesadnej obawy przed jakąkolwiek formalizacją, rzekomo niedostępną uczniowi (eksperymentalne nauczanie w różnych krajach obala już ten pewnik), przeciętny uczeń w ogóle nie umie posługiwać się definicją matematyczną, bo najczęściej odwołuje się do bardzo silnie powiązanego z danym terminem obrazu, a nie do tekstu definicji. Gdy tego obrazu brak, staje bezradny przed najprostszym problemem, którego rozwiązanie znalazłby od razu, gdyby tylko zechciał i umiał zanalizować odpowiednią definicję.

2.4. Wszystkie te zagadnienia skupiają się dokoła podstawowego zagadnienia dydaktycznego: zachowania w nauczaniu właściwego stosunku między wnioskowaniem empirycznym, rozumowaniem intuicyjnym i rozumowaniem formalnym, oraz wyznaczenia w procesie myślenia matematycznego ucznia każdemu z tych elementów odpowiedniej funkcji.

Dla uniknięcia nieporozumień przypomnimy krótko raz jeszcze w jakim sensie tych terminów będziemy używać.

Będziemy mówić o *wnioskowaniu empirycznym* w dziedzinie matematyki na poziomie nauczania szkolnego w sytuacji, gdy uczeń formułuje hipotezę matematyczną na podstawie 1° obserwacji i doświadczenia w konkretnej fizycznej przestrzeni, które w rezultacie matematyzacji występujących tu stosunków opisuje używając terminów matematycznych, lub 2° indukcyjnych prób już w zakresie samej matematyki.

Rozumowanie ucznia potraktujemy jako *intuicyjne* w dziedzinie matematyki na poziomie szkolnym, jeżeli uczeń w toku rozwiązywania jakiegoś zagadnienia 1° posługuje się przede wszystkim wyobraźnią, tj. obrazami pojęć, które rozważa niezależnie od ich formalnej definicji i 2° przeprowadza skrótowe rozumowanie oparte na oczywistych dlań przesłankach niezależnie od ich wywiedlności w ramach danego układu, lub 3° formułuje hipotezę matematyczną opartą na dostrzeżonych analogiach, odpowiedniościach, odwzorowaniach, lub uzasadnia swe wnioski niezanalizowaną dokładniej rekurencją.

Wreszcie rozumowanie ucznia uznamy za *formalne* w dziedzinie matematyki na poziomie szkolnym, jeżeli 1° zdaje on sobie sprawę z przyjętej podstawy dedukcji i 2° świadomie w toku rozwiązywania zagadnienia stara się każdy z kolejnych wniosków możliwie precyzyjnie wywieść z uznanych już poprzednio w danym układzie twierdzeń i definicji i 3° korzysta prawidłowo z definicji, a więc używa terminu zdefiniowanego tylko w sensie nadanym mu przez tę definicję oraz rozumie, że nowy termin może wprowadzić do swych rozważań po wyjaśnieniu jego zna-

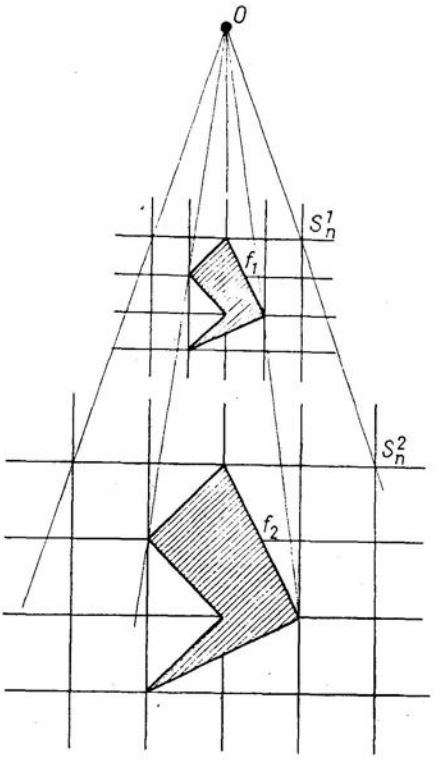
czenia tylko za pomocą terminów poprzednio już wprowadzonych i 4° korzysta prawidłowo z twierdzeń, to jest odrywa tezę dopiero po dokładnym skontrolowaniu, czy w danym przypadku są spełnione założenia.

Oczywiście, uwzględniając poziom rozwoju matematycznej myśli ucznia, zdajemy sobie sprawę z tego, że granica między rozumowaniem intuicyjnym i formalnym w konkretnej sytuacji szkolnej bardzo rzadko jest wyraźna. Najczęściej rozumowanie ucznia (zresztą i matematyka także) jest intuicyjno-formalne. Decydująca jest tu jednak świadomość metodologiczna, to jest rozumeinie, jeszcze może naiwne ale już poprawne, dedukcji.

2.5. Jednym ze środków harmonizowania tych różnych elementów myślenia matematycznego w nauczaniu matematyki jest „formalna legalizacja" intuicyjnych rozumowań uczniów. Rozumiemy przez to, że nauczyciel przyjmuje za podstawę dowodu lub rozwiązania jakiegoś problemu podany przez ucznia intuicyjny szkic, którego w tej formie nie można by uznać za rozwiązanie prawidłowe i wystarczająco ścisłe, ale który można przekształcić w rozumowanie poprawne i formalne w ramach danej konstrukcji kursu, precyzując wraz z uczniami użyte przez ich kolegę poglądowo tylko terminy, tłumacząc, rysunkiem i gestem, na język matematyki obrazowe ilustracje przedstawionego pomysłu, uzupełniając w toku krytycznej dyskusji pominięte ogniwa dedukcji itp. Postąpimy tak, gdy np. uczeń powoła się na intuicyjnie tylko uzasadniony argument, że jakaś funkcja rośnie nieograniczenie („i tak dalej" mówi uczeń, ilustrując to gestem ręki), lub gdy w nauce geometrii sugeruje, że jedną z figur można „nasunąć" na drugą, nie wskazując wektora przesunięcia i kierując się tylko wyobrażeniem tych figur itp.

Oczywiście nie każdy pomysł intuicyjny ucznia może być formalnie zalegalizowany w danym układzie materiału. Niemniej ilekroć to jest możliwe, powinno być przedmiotem wnikliwej uwagi nauczyciela i jednym ze środków stosowanej przezeń strategii dydaktycznej, mającej na celu wprowadzenie ucznia w matematyczną metodę. Postulat ten stawia nauczycielowi duże wymagania. Musi się on tak swobodnie poruszać w materiale nauczania, aby go pomysły uczniów nie zaskakiwały, aby umiał szybko ocenić ich wartość i odróżnić zgadywanie od rozumowania. Każda rozsądna propozycja ucznia powinna być dokładnie przedyskutowana. Niemożliwość „formalnej legalizacji" pomysłu ucznia może być też bardzo wnikliwie przez nauczyciela wykorzystana do wyjaśnienia uczniowi mechanizmu dedukcji. Na przykład, w kursie stereometrii uczeń proponuje wykonać konstrukcję płaszczyzny równoległej do danej płaszczyzny i przechodzącej przez dany punkt przez poprowadzenie przez ten punkt prostej prostopadłej do danej płaszczyzny i następnie przez skonstruowanie w danym punkcie płaszczyzny prostopadłej do tej prostej.

Wszystko to jest „nielegalne" w danym momencie kursu. Nie zdefiniowano prostej prostopadłej do płaszczyzny, nie wprowadzono metrycznych aksjomatów, nie można w ogóle jeszcze przy przyjętej podstawie udowodnić twierdzenia, że wszystkie proste prostopadłe do danej prostej w danym jej punkcie zawierają się w jednej płaszczyźnie, itp. Dyskusja z uczniami zmierzająca do wyjaśnienia tej sytuacji jest bardzo instruktywna z punktu widzenia konsekwentnego i stopniowego wprowadzania ich w matematyczną metodę.



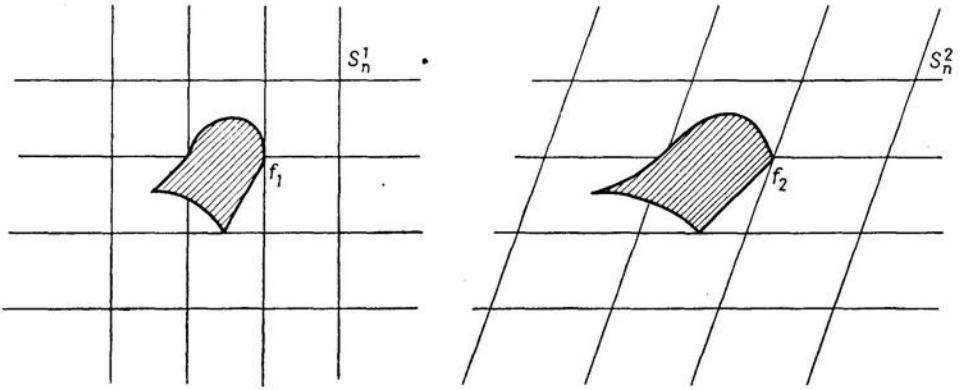
Rys. 2

„Myślenie intuicyjne" — pisze słusznie J. Bruner — „opiera się zazwyczaj na doskonałej znajomości danej wiedzy i jej struktury, co pozwala myślącemu na dokonywanie przeskoków i korzystanie ze skrótów myślowych" ([5], str. 61). Konsekwencje dydaktyczne tego oczywiście zgodnego z faktami twierdzenia są zupełnie jasne. Im lepiej uczeń opanował materiał nauczania, nie mechanicznie ale ze zrozumieniem jego wewnętrznej organizacji, tym bardziej sensowne i przydatne do „formalnej legalizacji" będą jego intuicyjne, skrótowe rozumowania, tym bardziej zharmonizowana ze strukturą przedmiotu będzie jego wyobraźnia matematyczna, tym mniej będzie konfliktów między tą wyobraźnią i rygorami dedukcji. Podkreślając wartość każdego twórczego pomysłu ucznia, niezależnie od jego przydatności, nauczyciel powinien niemniej uświadamiać mu stale, że pomysł pojawia się najczęściej nie „z natchnienia", ale na tle gruntownej analizy danej sytuacji problemowej i głębokiej, solidnej wiedzy.

Na rozwój zdolności do skrótowego, intuicyjnego, ale nadającego się do formalnej legalizacji rozumowania wpływa dobór definicji i dowodów twierdzeń. Ważne są w szczególności takie rozumowania, których plan jest bardzo prosty i które uczeń może ująć „jednym chwytem myśli". Tu właśnie dokonuje się szczególnie łatwo przejście od intuicyjnego rozumowania do precyzyjnej dedukcji.

Rozwiązujemy np. zagadnienie: figura f_1 ma pole, figura f_2 jest podobna do f_1 w skali k. Czy f_2 ma pole? Jaki jest stosunek pól tych figur?

Stwierdzamy z uczniami, że wystarczy rozważyć przypadek, gdy figury f_1 i f_2 są jednokładne. Zgodnie z definicją pola wymierzamy f_1 ciągiem sieci S^1, f_2 wymierzamy ciągiem sieci S^2, powstałym z S^1 przez tę samą jednokładność (rys. 2). Odpowiedź intuicyjna uczniów na postawione pytanie jest natychmiastowa. Legalizujemy ją następnie dokładnym rozumowaniem. W dalszym ciągu, po wprowadzeniu pojęcia przekształcenia afinicz-



Rys. 3

nego(1) jako wzajemnie jednoznacznego przekształcenia płaszczyzny, zachowującego współliniowość, formułujemy podobne pytanie. Sugerujemy postępowanie analogiczne do tego, które zastosowaliśmy poprzednio (rys. 3). Figurę f_1 wymierzamy tym razem za pomocą ciągu sieci kwadratowych, figurę f_2 za pomocą ciągu obrazów tych sieci w danym przekształceniu afinicznym, a więc za pomocą ciągu sieci równoległobocznych. Odpowiedź intuicyjna uczniów jest natychmiastowa. Stosunek pola f_2 do pola f_1 jest równy stosunkowi pola równoległobocznego „oczka" sieci drugiej do pola odpowiedniego „oczka" kwadratowego sieci pierwszej. Ten stosunek jest stałą charakterystyczną dla danego przekształcenia afinicznego. Legalizujemy tę odpowiedź prostym rozumowaniem. Stwierdzamy, że udowodnione twierdzenie obejmuje jako szczególny przypadek twierdzenie o stosunku pól figur podobnych, a więc i twierdzenie o stosunku pól figur przystających.

Dydaktyczne zagadnienia „dowodu jednym chwytem myśli" wiążą się bezpośrednio z następującym postulatem: należy dążyć do tego, aby

(1) Pojęcie przekształcenia afinicznego nie występuje w programie polskiego liceum, co wydaje mi się poważnym brakiem. Informacyjne, krótkie, zilustrowane np. symetrią skośną, omówienie tego zagadnienia byłoby bardzo wskazane. Uczniowie powinni wynieść ze szkoły to pojęcie nie tylko ze względu na jego znaczenie w matematyce, ale dlatego, że ograniczenie ich wiadomości o liniowych przekształceniach płaszczyzny do izometrii i podobieństw bardzo zawęża ich rozumienie przekształcenia w geometrii.

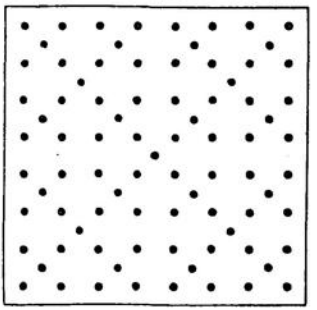
dowód czynił twierdzenie nieoczywiste oczywistym. Jest to bardzo ważne dla rozwoju intuicji ucznia. Jest to równocześnie argument przeciw tylko informacyjnemu traktowaniu matematyki szkolnej. Można by podawać uczniom twierdzenia matematyczne, jako fakty już udowodnione tak, jak to czyni geograf, przyrodnik, czy fizyk doświadczalny. Nie robimy tego z wielu powodów. Chcemy oczywiście, aby uczniowie zapoznali się aktywnie z metodą matematyczną. Chcemy również, by uczniowie dobrze rozumieli twierdzenia i na to obecnie właśnie zwracam szczególną uwagę. Dowód może bowiem odegrać ważną rolę zarówno formalną, jak i intuicyjną; może być przeprowadzony w ten sposób, że uczeń po jego zakończeniu myśli: „tak jest rzeczywiście, to zostało logicznie udowodnione", ale nadal twierdzenie pozostaje dlań nieoczywiste, choć prawdziwe w sensie formalnym. „Widzę, ale nie wierzę" Cantora — to właśnie taka sytuacja. Dowód może być również przeprowadzony tak, że uczeń po jego zakończeniu myśli: „to musi być tak, to jest oczywiste" i rozumie już twierdzenie inaczej. Twierdzenie o sumie kątów trójkąta nie jest oczywiste, staje się natomiast nie tylko formalnie prawdziwe na gruncie geometrii, ale także oczywiste w świetle klasycznego dowodu Euklidesa. Różne walory z tego punktu widzenia mają różne dowody twierdzenia Pitagorasa. Jedne (oparte np. na rozkładach) czynią je dla ucznia wizualnie oczywistym, inne (np. oparte na rachunku wektorowym) ukazują istotny sens algebraiczny tego twierdzenia, ale nie czynią go (na poziomie doświadczeń ucznia, nie matematyka) oczywistym. Wybór dowodu powinien być więc — między innymi — podyktowany świadomym zamierzeniem dydaktycznym: bądź dążeniem do podkreślenia miejsca danego twierdzenia w formalnej strukturze, bądź do ukazania jego intuicyjnego sensu. Ideałem byłyby dowody spełniające jedno i drugie zadanie. Czasem warto podać różne dowody tego samego twierdzenia, uzupełniające się z tego punktu widzenia, np. zapoznanie ucznia z różnymi dowodami twierdzenia Pitagorasa oraz metodologiczne omówienie tych dowodów pogłębia zarówno formalne jak i intuicyjne rozumienie tego twierdzenia.

3. Intuicja przedłużona w nauczaniu matematyki. W nauczaniu szkolnym najczęściej zwraca się uwagę na intuicje pierwotne, przede wszystkim na intuicje pochodzące z doświadczeń w przestrzeni fizycznej, zarówno w dziedzinie stosunków przestrzennych jak i ilościowych, w mniejszym stopniu dostrzegając „intuicje przedłużone" przez rozumowanie, tak że w istocie rzeczy, mówiąc o „intuicji", myśli się tu najczęściej o „intuicji przestrzennej", „mechanicznej", lub o „intuicji rekurencji".

Istotnie, na elementarnym poziomie w nauczaniu geometrii i arytmetyki do tych pierwotnych intuicji najczęściej się odwołujemy. Taki sens ma np. posługiwanie się wykresami funkcji. Wykres daje uczniowi całościowe ujęcie funkcji za pomocą jej geometrycznego modelu. W nau-

czaniu elementarnej matematyki nie możemy i nie chcemy jednak pominąć pewnych zagadnień prowadzących do „intuicji formalnie przedłużonych". Przykłady takiej modyfikacji podawałam wielokrotnie (zob. np. [12]). Oto jeszcze inny.

Uczniowie drugiej klasy zreformowanego liceum mają zapoznać się z pojęciem pola figury płaskiej jako miary Jordana(2). Nakładają siatkę kwadratową na płaszczyznę rysunku, wymierzając wykreśloną figurę „od wewnątrz" i „od zewnątrz" w przybliżeniu. Notują otrzymane liczby, „zagęszczają" sieć i znajdują dalsze przybliżenia. Opisują teoretyczny schemat takiego postępowania definiując dwa ciągi i ich wspólną granicę przyjmują jako pole danej figury. Uczniowie nie mają przy tym żadnych wątpliwości, że „pomiar od zewnątrz" i „pomiar od wewnątrz" w każdym przypadku — nawet w teorii — musi doprowadzić do tej samej liczby. Nauczyciel — nie wyprowadzając ich z błędu — proponuje rozważenie następującej figury. Z kwadratu usuwamy środek; z czterech narożnych kwadratów tego kwadratu usuwamy środki; z czterech narożnych kwadratów każdego z narożnych kwadratów pierwszego kwadratu usuwamy środki itp. Wyobrażamy sobie nieskończony ciąg takich operacji (rys. 4). Rozważmy figurę utworzoną z nieusuniętych punktów, którą nazywamy „kwadratem sitem". Wymierzmy ją od wewnątrz i od zewnątrz. Okazuje się, że pierwszy pomiar daje liczbę zero, drugi liczbę dodatnią. Oto zaskoczenie i zdziwienie, ale równocześnie nowy punkt patrzenia na zbiory punktów. To, co było intuicyjnie oczywiste, okazuje się słuszne tylko dla pewnych, „zwykłych" figur. Zdobywa się nowe intuicje w świecie „niezwykłych" figur, dzięki przeprowadzonemu ścisłemu rozumowaniu z zastosowaniem definicji, którą poprzednio przyjęto jako naturalną. Konsekwencje tych naturalnych sytuacji są zaskakujące. Nie ma jednak wyboru — trzeba je uznać, są koniecznością myśli.



Rys. 4

W dalszym ciągu nawiązujemy do pojęcia brzegu figury. Uczniowie sami sformułowali w poprzedniej klasie definicję punktu brzegowego w wyniku obserwacji modelu figury, której brzeg był jedną krzywą zamkniętą. Definicja była dla nich rezultatem zupełnie naturalnej matematyzacji poglądowego rozumienia tego terminu. Pierwsza konfrontacja tej naturalnej intuicji brzegu z nową sytuacją — to zagadnienie, co jest brzegiem „koła-sita", to jest figury otrzymanej z koła przez usunięcie

(2) Podobne opracowanie zagadnienia zostało wypróbowane wielokrotnie w różnych wariantach.

z tego koła skończonej liczby punktów wewnętrznych ([13], str. 72). Brzeg tej figury, to figura będąca sumą mnogościową okręgu i zbioru „wyrzuconych" punktów. Uczniowie stwierdzają, że koło-sito nie jest ani zbiorem otwartym ani zbiorem zamkniętym punktów, należą bowiem do niego niektóre jego punkty brzegowe (punkty okręgu), ale nie wszystkie punkty brzegowe (usunięte punkty wewnętrzne koła).

Obecnie w związku z rozważanym kwadratem-sitem, figurą bardziej skomplikowaną niż koło-sito, rozważane poprzednio, postawimy ten sam problem: co jest brzegiem kwadratu-sita? Okazuje się, że brzegiem w tym przypadku jest cały kwadrat. Brzeg tej dziwnej figury ma pole dodatnie. Przechodzi się stąd do warunku mierzalności, spełnionego dla „zwykłych figur". Dowodzi się w prosty sposób, że jeżeli brzeg figury ma pole równe zeru, to nie może już nas spotkać taka niespodzianka, jak przy wymierzaniu kwadratu-sita; jeżeli brzeg figury ma pole równe zeru, to wymierzanie jej od wewnątrz i od zewnątrz prowadzi do tego samego rezultatu.

Zauważamy w tym procesie stopniowe przechodzenie od intuicji pierwotnej brzegu figury do formalnego pojęcia. Równocześnie ten krok formalny, polegający na zastosowaniu definicji — sformułowanej w sposób naturalny przez samych uczniów — do nowej nieprzewidywanej przez nich sytuacji, przekształca ich intuicję pierwotną w intuicję bardziej „wyrafinowaną" według terminologii Kleina, czy w jej „przedłużenie" według wyrażenia Bouliganda.

4. Dedukcyjny układ materiału nauczania i metoda aksjomatyczna

4.1. Zagadnienie wprowadzenia metody aksjomatycznej do nauczania szkolnego znajduje się rzeczywiście w „ogniu dyskusji", prowadzonej w skali międzynarodowej i w lokalnych ośrodkach reformy nauczania matematyki, na zjazdach i kongresach międzynarodowych poświęconych modernizacji matematyki szkolnej, w licznych już dziś publikacjach. W ramach Kongresu Matematyków zorganizowanego w Moskwie w roku 1966, problem ten był tematem posiedzenia Międzynarodowej Komisji Nauczania Matematyki (CIEM), na zlecenie której bardzo interesujący referat poświęcony sprawozdaniu z eksperymentów w tym zakresie prowadzonych na całym świecie wygłosił H. G. Steiner. W referacie stwierdzono, że zagadnienie to znajduje się obecnie w centrum uwagi dydaktyków. Dyskusję tę utrudniają jednak liczne nieporozumienia wynikające przede wszystkim 1° z niesłusznego uogólnienia negatywnych rezultatów doświadczeń w nauczaniu tradycyjnej geometrii dedukcyjnej, 2° z traktowania metody aksjomatycznej wyłącznie w jej aspektach formalnych, z pominięciem jej naturalnych prymitywnych źródeł i możliwości jej naiwnej, dostępnej uczniowi, interpretacji.

Ta możliwość wiąże się ściśle ze współczesnym pojęciem struktury

matematycznej w znaczeniu układu utworzonego ze zbiorów i określonych w tych zbiorach relacji oraz z pojęciem aksjomatyki jako schematu formalnego wspólnego dla struktur określonego rodzaju. Omawiając rolę struktur i aksjomatyki we współczesnej matematyce, matematyk radziecki A. A. Liapunow pisze: „... aksjomatyczna metoda jest podstawą szerokich zastosowań matematyki w rozmaitych dziedzinach ludzkiej działalności. Uderzająca w naszych czasach ekspansja matematycznej myśli prowadzi do nieuniknionego stosowania aksjomatycznej metody w toku rozwiązywania zadań, pojawiających się na gruncie automatyzacji, kierowania produkcją, konstruowania maszyn liczących jako dogodnych środków pracy umysłowej, w matematycznej lingwistyce, matematycznej ekonomii i matematycznej biologii." ([14], str. 114) „... jedność materialnego świata warunkuje to, że w rozmaitych sytuacjach występują związki tego samego typu między rozlicznymi stronami zjawisk. Te przejawy są źródłem fizycznych przedstawień, które z kolei stają się źródłem matematycznych teorii. Podobieństwo struktur występujących w tych teoriach jest odbiciem jedności materialnego świata w matematycznej abstrakcji" ([14], str. 115). „Szerokie wykorzystanie abstrakcyjnych koncepcji matematyki, nawyki w wypracowywaniu ścisłych pojęć, precyzyjne formułowanie zagadnień i zastosowanie aksjomatycznej metody do rozwiązywania aktualnych zadań wynikających z praktyki, oto co powinno być uznane za szczególne cechy współczesnej matematyki" ([14], str. 115).

W tym ujęciu metoda aksjomatyczna to nie tylko porządkowanie i systematyzowanie logiczne *a posteriori* teorii już rozwiniętych w ciągu wielu stuleci, co dominowało jeszcze w XIX wieku, ale metoda tworzenia nowych teorii. Zacytujemy jeszcze (za B. N. Gniedenką) zdanie A. N. Kołmogorowa: „... dziś rozwój matematyki wychodzi naprzeciw powstającym potrzebom przez świadome i planowe stwarzanie nowych systemów geometrycznych, nowych algebr z nieprzemiennymi lub nawet niełącznymi iloczynami. Na przykład problem, czy dla analizy lub syntezy tego lub innego rodzaju wyłączników nie należałoby stworzyć nowej algebry z nowymi prawami operacji, jest dziś sytuacją codziennej naukowo-technicznej praktyki, która nie wywołuje żadnego szczególnego zdziwienia" ([7], str. 46).

Dla dydaktyki tematem głębokiej refleksji jest ta właśnie koncepcja metody aksjomatycznej jako instrumentu twórczej myśli matematycznej w trzech fazach jej działalności: *aksjomatyzacji*, to jest poszukiwania jak najbardziej dogodnej definicji pewnej struktury, *dedukcji*, to jest rozwinięcia na podstawie tej definicji środkami logicznymi teorii tej struktury, oraz *interpretacji* i zastosowania tej teorii do dziedzin, w których ta struktura w szczególnym przypadku występuje. Współczesne eksperymenty dydaktyczne zmierzają między innymi do odpowiedzi na pytanie,

czy jest możliwe zapoznanie ucznia szkoły średniej, choćby w pewnym naiwnym jeszcze ujęciu, z tą metodą z uwzględnieniem wszystkich trzech jej faz. Mówiąc więc o metodzie aksjomatycznej w nauczaniu nie mamy na myśli zrzucenia z „matematycznego nieba" w rzeczywistość szkolną gotowej aksjomatyki i oparcia kursu na ścisłej dedukcji. Myślimy o trudniejszym zadaniu dydaktycznym, to jest o przyswojeniu uczniowi pewnego sposobu myślenia, przy jego w pełni aktywnym udziale w tym procesie.

4.2. Przygotowanie ucznia do tego sposobu myślenia zaczyna się bardzo wcześnie, już na poziomie tak zwanej lokalnie-dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki (termin wprowadzony przez H. Freudenthala), to jest — w Polsce — w szkole podstawowej. Kilka istotnych elementów postępowania dydaktycznego w tym okresie trzeba podkreślić jako szczególnie ważne z interesującego nas obecnie punktu widzenia.

1° Właściwie od początku nauki matematyki organizowany proces schematyzacji i matematyzacji konkretnych doświadczeń ucznia w dziedzinie stosunków przestrzennych i ilościowych, prowadzi stopniowo do uświadomienia im abstrakcyjnego charakteru matematycznych przedmiotów oraz do zrozumienia, że przedmioty te nie mogą być badane empirycznie[3]).

2° Świadomie przez nauczyciela kierowana interpretacja rozwiązywanych przez uczniów problemów i analiza dróg wiodących do tych rozwiązań prowadzi stopniowo do zrozumienia relacyjnego charakteru matematyki. Uczeń spostrzega, że rozumując dedukcyjnie rozwiązał coś więcej niż tylko to jedno konkretne zadanie, o którym myślał; w jego prostym arytmetycznym zagadnieniu mówiło się wprawdzie o zeszytach i książkach, które zakupiono w sklepie, ale rozwiązanie zachowa swe znaczenie, gdy zastąpimy zeszyty i książki innymi przedmiotami, nie zmieniając stosunków określonych warunkami zadania; co więcej możemy nawet porzucić myśl o zakupach i zinterpretować te stosunki jeszcze inaczej. W rezultacie takich ćwiczeń w myśli ucznia pojawia się ogólny schemat zadania i jego rozwiązania, schemat wieloznaczny. W celu pogłębienia i zracjonalizowania tego odczucia wieloznaczności matematycznego schematu, nauczyciel może wykorzystać różne sytuacje w nauczaniu arytmetyki i geometrii. W szkole podstawowej w Polsce przeprowadza się np. niektóre rachunki na liczbach zapisanych cyframi (przed systematycznym wprowadzeniem zapisu literowego) tak, aby taki rachunek mógł być zinterpretowany ogólniej i potraktowany jako poprawny dowód pewnego ogólnego twierdzenia. Uczeń rozumuje, na przykład opierając się na definicji iloczynu ułamków, tak:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\ \mathrm{z}\ \frac{3}{7}=\left(\frac{2}{5}:7\right)\cdot 3=\frac{2}{5\cdot 7}\cdot 3=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}.$$

(3) Zagadnienie to omówiono bardzo szczegółowo w poprzednich wykładach.

Rozpatrzenie kolejnych kroków tego rachunku i ich słowny opis, nasunie poprawne uogólnienie, jeżeli uczeń zda sobie sprawę z tego, że w istocie rzeczy, zastępując dane ułamki innymi, niczego nie zmieni w toku rozumowania. Takie *uzmiennianie stałych* w pierwszym etapie nauczania matematyki, to niezwykle instruktywny środek w kształceniu myślenia matematycznego ucznia. Uświadomienie sobie przez ucznia w tym przypadku odpowiedzi na pytanie „z czego w rozumowaniu korzystałem" i „z czego w rozumowaniu nie korzystałem", jest przekroczeniem zasadniczego progu w rozwoju jego myślenia. Podobną rolę i na tym i na wyższym poziomie spełniają zagadnienia związane z transformacjami i ich niezmiennikami. Na przykład monotoniczność funkcji liniowej rosnącej powinna być rozumiana jako zachowanie w tym odwzorowaniu struktury porządku w zbiorze liczb, twierdzenia o rzucie równoległym, czyli tzw. reguły kreślenia w rzucie równoległym, powinny być rezultatem przeprowadzonych przez uczniów badań na temat, jakie relacje geometryczne zachowują się a jakie nie zachowują się w tym odwzorowaniu, twierdzenie Talesa powinno w tym świetle ujawnić się jako sformułowanie niezmienniczej własności rzutu równoległego prostej na prostą, itp. Wszystko to zmierza do tego, aby w myśli ucznia stopniowo kształtowało się zrozumienie tego, że przedmiotem jego rozważań, w każdej sytuacji matematycznej, są układy relacji, jest pewna struktura.

3° Zasadniczy wpływ na rozwój matematycznego myślenia ucznia w etapie początkowym ma właściwie rozumiana lokalnie-dedukcyjna, organizacja materiału nauczania, oraz również właściwa dydaktyczna realizacja tej koncepcji. Przemyślane z góry następstwo sytuacji dydaktycznych powinno gwarantować stopniowo pogłębianie rozumienia dedukcji i rozszerzanie jej zasięgu; z początku tylko bezpośrednie wnioski, dalej sytuacje, gdy uczeń nie mogąc sobie zapewnić wystarczających dla rozwiązania jakiegoś konkretnego zadania informacji, musi je wysnuć z innych znanych mu sytuacji, gdy już w warunkach zadania, podobnie jak w regułach gry, ogranicza się zespół wiadomości, z których mu wolno w toku rozwiązywania problemu korzystać, sytuacje, gdy uczeń sam nakłada sobie takie warunki, gdy jest do tego zmuszony przez innych, np. gdy chce innych przekonać o poprawności podanego przez siebie rozwiązania i spotyka się z kierowaną przez nauczyciela opozycją, gdy dwóch uczniów podaje różne definicje w intencji określenia tego samego przedmiotu i nasuwa się pytanie, czy są to definicje rzeczywiście równoważne, gdy występuje potrzeba zbadania „prawdziwości" twierdzenia nieoczywistego, itp. W toku rozwiązywania tych różnych problemów szczególna rola przypada wnikliwie przez nauczyciela organizowanej dyskusji, mającej na celu konsekwentne uświadamianie uczniowi zarówno względności i subiektywności, jak i niebezpiecznej zawodności polegania na odczuciu oczywistości pewnych matematycznych faktów. Jeżeli już

nie możemy w tym etapie uniknąć wiązania dowodu matematycznego z „przekonywaniem", to musimy przynajmniej dążyć do tego, aby uczeń to „przekonywanie" rozumiał dostatecznie obiektywnie. Wykorzystuje się fikcyjną postać zawodowego oponenta podważającego intuicyjne przesłanki, z których uczeń nielegalnie w danej sytuacji korzysta. Trzeba doprowadzić do tego, aby uczeń uświadomił sobie, że przekonywanie w matematyce może mieć tylko formę inferencji: jeżeli godzisz się na to, to musisz zgodzić się i na to. Stąd konieczność ustalenia w każdym przypadku pewnego zespołu twierdzeń i definicji jako podstawy dowodu. Lokalnie-dedukcyjna organizacja materiału nauczania polega właśnie na tym, że ta podstawa nie jest raz na zawsze dla całego kursu ustalona, ale, że dedukcyjnie organizuje się tylko pewne jego fragmenty. Nauczyciel dba o to, aby on sam i uczniowie byli w roli oponentów bardzo czujni. Z czasem ten dialog zewnętrzny przekształca się i interioryzuje w dialog wewnętrzny, uczeń sam staje się swoim surowym oponentem, przekraczając tym samym trudny próg do formalnego myślenia. Ta koncepcja dydaktyczna uwzględnia niewątpliwy fakt, że *sensu dowodu matematycznego nie można uczniowi pokazać tylko na przykładach dowodów twierdzeń dlań nieoczywistych.* Przeciwnie, ten sens staje się jasny, gdy uczeń szuka dowodu twierdzenia dlań zupełnie oczywistego, gdy nie *prawdziwość twierdzenia,* rozumiana jeszcze bardzo konkretnie (prawdziwość w modelu) i subiektywnie, ale *droga logicznie obiektywna i prowadząca od tez już poprzednio uznanych w klasie do danego twierdzenia* staje się przedmiotem jego poszukiwań i rozważań. Powoli ustala się w myśli ucznia pojęcie wywiedlności jednego twierdzenia z układu innych.

Oto przykład konkretnie obserwowanej lekcji, w toku której dwunastoletni uczeń przeprowadza dowód twierdzenia, jeszcze tylko ze względu na „kogoś". Rozwiązując zadanie „narysuj romb, którego przekątne są równe 3 cm i 4 cm", kreśli odcinek równy 4 cm konstruuje w jego środku prostą doń prostopadłą, odmierza na niej po obu stronach, poczynając od środka odcinka, odcinki równe 1,5 cm i po odpowiednim połączeniu otrzymanych punktów odcinkami stwierdza, że otrzymana figura jest rombem. Jest to stwierdzenie intuicyjne, a nie empiryczne. Uczeń jest pewny, że otrzymany wielokąt jest rombem nie dlatego, że to widzi na rysunku, lub że się o tym przekonał pomiarem, ale dlatego, że własną konstrukcją zapewnił sobie jego dwie symetrie osiowe i tym samym równość boków. Byłby o tym przekonany nawet wtedy gdyby z powodu niedokładności konkretnych operacji rysunkowych nakreślona figura wizualnie nie była rombem. Nauczyciel proponuje uczniowi podanie planu konstrukcji, z którego *mógłby skorzystać każdy, kto chciałby zbudować romb mając z góry zadane dwa odcinki równe przekątnym tego rombu.* Uczeń podaje opis zgodny z wykonanym rysunkiem. Czy jesteś pewny, że twój plan jest poprawny? Analiza tego, dlaczego zbudowana zgodnie z planem

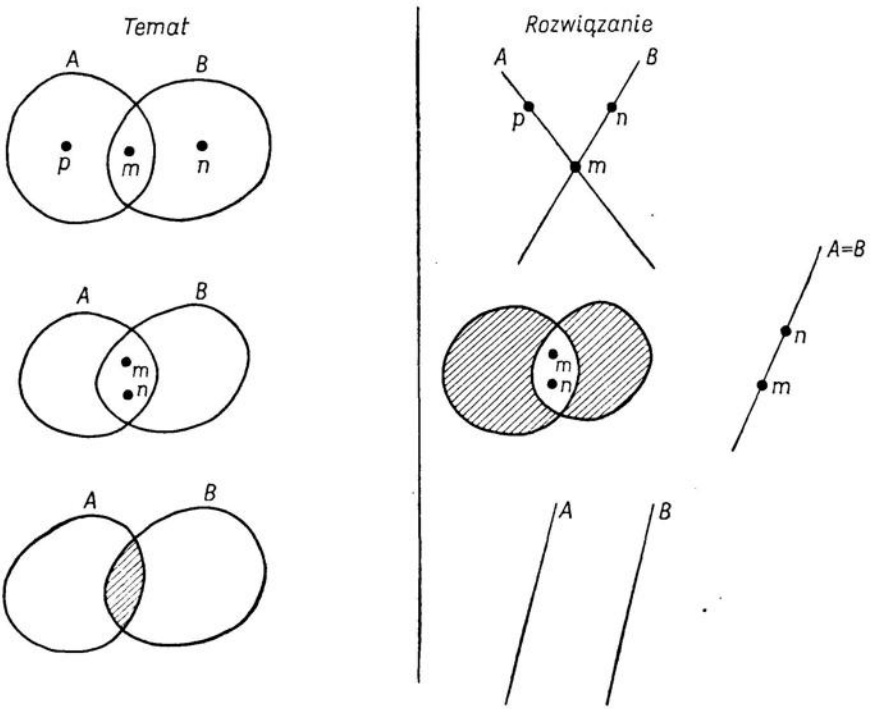
figura *zawsze* (to jest niezależnie od zadanych z góry odcinków) „musi" być rombem, prowadzi ostatecznie do dowodu twierdzenia: „czworokąt, którego przekątne się połowią i są prostopadłe, jest rombem". Nauczyciel nie poprzestaje jeszcze na tym. Z jakich wiadomości korzystaliśmy w naszym rozumowaniu? Ustala się listę najważniejszych przesłanek. Każdy, kto się na to godzi, musi uznać przedstawiony plan konstrukcji za poprawny i sformułowane twierdzenie za udowodnione. Oczywiście, nie ujawniono w ten sposób wszystkich przesłanek rozumowania, ale w miarę możliwości zorganizowano dedukcyjnie pewien fragment geometrii w sposób dostępny dla dwunastoletniego ucznia, podkreślając hipotetyczno-dedukcyjny charakter przeprowadzonego rozumowania.

4° Bardzo ważnym elementem przygotowania ucznia do myślenia aksjomatycznego jest przyswojenie mu możliwie wcześnie podstawowych pojęć algebry zbiorów i przyzwyczajenie do posługiwania się językiem tej algebry w wyrażaniu matematycznych treści. Doświadczenia prowadzone w różnych krajach uprawniają już dziś bez żadnych wątpliwości do twierdzenia, że algebra zbiorów — oczywiście w ujęciu naiwnym — oraz język mnogościowy są łatwo przyswajane przez dzieci już od pierwszej klasy szkoły podstawowej.

Postulat wprowadzenia języka mnogościowego do nauczania szkolnego już od pierwszych klas szkoły podstawowej spotyka się w Polsce jeszcze z dużymi oporami, szczególnie ze strony tych, którzy bezpośrednio nie zetknęli się z reakcjami dzieci na te zagadnienia, lub tych, którzy nie mogą się wyzwolić z tradycyjnych przesądów pedagogicznych. Natomiast ci, którzy tego typu eksperymenty podejmują, nawet ci, którzy to czynią z daleko posuniętą ostrożnością i odpowiedzialnością społeczną, jak np. profesor A. I. Markuszewicz w ZSRR (mający wątpliwości co do innych przejawów modernizacji matematyki szkolnej lansowanych na zachodzie ([19])), dostrzegają w języku mnogościowym w matematyce szkolnej doskonały instrument poprawnej matematyzacji doświadczeń i obserwacji ucznia. Występuje tu charakterystyczna i tak często stwierdzana przez nas prawidłowość. Rewizja podstaw matematyki dokonywana „na najwyższym szczeblu", w rejonach abstrakcji — wydawałoby się nie mających już żadnych związków z naiwną matematyką szkolną — ujawnia naturalne źródła tych matematycznych abstrakcji. Pojęcia rodzaju struktury, struktury, modelu, transportu struktury, izomorfizmu struktur, automorfizmu struktury, relacji niezmienniczej w ujęciu Bourbaki niewątpliwie wyjaśniające i porządkujące nasze rozumienie konstrukcji matematyki, są opisywane w języku teorii mnogości. Nietrudno zauważyć, że gdy dziecko zaczyna formułować swoje obserwacje świata rzeczywistego w języku zbiorów, to mimo ogromnego dystansu, który je dzieli od tego „najwyższego szczebla", mówi o czymś podobnym. Język zbiorów stwarza w myśli ucznia pewne określone kategorie myślowe,

pewien określony, już matematyczny, sposób ujmowania i opisywania zjawisk. Eksperymenty prowadzone przez nas w Polsce dowodzą tego niewątpliwie. Rozwija się przy użyciu tego języka zupełnie naturalna abstrakcyjność matematyki ucznia mimo nasycenia jej konkretnymi reprezentacjami, zadziwiająca i zaskakująca nieraz nauczyciela, który pojęcia teorii mnogości zna, ale się nimi nie nauczył myśleć, podczas gdy jego uczeń już nimi myśli.

Użycie schematów Venna wprowadza już pewne prymitywne elementy rozumowania formalnego na najniższym poziomie nauczania. Uczniowie otrzymują zadanie: oto dwie proste A i B (dwa zbiory punktów), co możesz o nich powiedzieć? Narysuj obok obrazy tych prostych tak, jak to robisz zwykle za pomocą linijki. Zaciemnij na schemacie obszary reprezentujące zbiory puste (rys. 5). Wiemy już, że uczniowie klasy piątej, w której zaczyna się w polskiej szkole nauka geometrii, nie mają

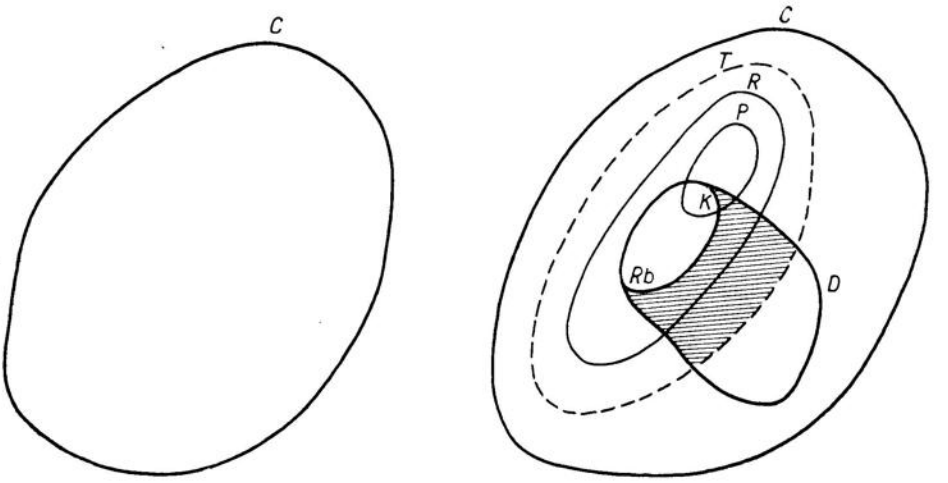


Rys. 5

trudności z tego rodzaju zadaniami i bardzo je lubią rozwiązywać. Eksperymenty w niższych klasach (schematy Venna wprowadzono w eksperymentalnych klasach pierwszych) wskazują na to, że i na niższym poziomie to nie będzie sprawiać uczniom kłopotu. Znaczenie tego może ocenić dydaktyk, który wie, jak skomplikowaną psychologicznie sprawą dla

ucznia jest rozumowanie, gdy bezpośrednio na rysunku widzi to, co ma wywnioskować. Otóż zadanie sformułowane w języku schematów Venna zmusza ucznia w sposób naturalny do myślenia, uświadomienia sobie założeń, przypomnienia twierdzeń i oderwania wniosku. Podobną rolę spełniają grafy relacji.

Wspomniałam poprzednio o zasadniczym znaczeniu, jakie ma dla zrozumienia przez ucznia metody matematycznej prawidłowa interpretacja definicji. Schematy Venna można wykorzystać przy klasyfikacji tak, że uczeń musi głęboko wniknąć w warunki definicyjne i stosunek inkluzji zakresów rozważanych pojęć. Oto przykład zadania: C jest zbiorem czworokątów. Uzupełnij schemat, przedstawiając na nim zbiory równoległoboków, rombów, prostokątów, trapezów, kwadratów, deltoidów (rys. 6). Zdajemy sobie sprawę, jak intensywnej pracy myślowej ucznia klasy VI wymaga wykonanie schematu i ile w tym jest prawdzi-



Rys. 6

wego rozumowania. Ponieważ jednak jest to połączone z rysowaniem, cała ta rzeczywiście abstrakcyjna robota staje się dla ucznia w szczególny sposób naturalna i konkretna. Uczeń rozumuje formalnie, nie gubiąc się w zawiłościach sformułowań werbalnych. Te same uwagi dotyczą symboliki. Nasze doświadczenia przekonują nas bez wątpliwości, jak bardzo pomocną w kształceniu formalnej myśli ucznia jest odpowiednio wcześnie wprowadzana i odpowiednio dobrana symbolika i o ile lżejszą staje się dla ucznia matematyka uwolniona w pewnej mierze od niedostosowanej do niej, skomplikowanej formy słownej. Do zagadnień tych wrócimy w dalszych wykładach.

Lokalnie-dedukcyjna organizacja materiału nauczania matematyki mogłaby więc na poziomie szkoły podstawowej być wykorzystana w pełni

do rozwijania wszystkich elementów myślenia matematycznego, przy pełnej harmonii rozumowania empirycznego, intuicyjnego i formalnego. Mogłaby być, ale jeszcze nie jest z wielu powodów. Modernizacja nauczania matematyki powinna ten stan rzeczy zmienić. Zależy to oczywiście od pełnego uświadomienia nauczyciela, że w naiwnej matematyce szkoły podstawowej można zarówno odzwierciedlić prawdziwe idee matematyczne jak i przekazywać uczniom tylko ich karykaturę.

4.3. Nauczanie matematyki w liceum może już być oparte o globalnie-dedukcyjną organizację materiału nauczania i program to w zupełności umożliwia, choć tego bezwzględnie nie narzuca. Globalna organizacja materiału nauczania, to bardzo jeszcze uproszczone, ale już poprawne wprowadzenie ucznia w myślenie aksjomatyczne. Jak już wspomniałam poprzednio, w tej koncepcji proces nauczania obejmuje trzy fazy: aksjomatyzację, dedukcję oraz interpretację i zastosowanie.

Z punktu widzenia zarówno matematyki, jak i przede wszystkim nauczania możemy w tej pierwszej fazie wyróżnić trzy sytuacje: aksjomatyzacja oparta na definiowaniu wspólnej struktury dostrzeżonej w wielu poprzednio poznanych modelach, aksjomatyzacja jednej tylko dziedziny, znanej i rozwiniętej poprzednio rozmaitymi środkami, wreszcie zmiana aksjomatyki dla dziedziny już uprzednio zaksjomatyzowanej. Z tymi wszystkimi postaciami aksjomatyzacji spotykamy się w eksperymentach szkolnych. Zilustrujemy je przykładami.

PRZYKŁAD I ([11]). Grupa piętnastoletnich uczniów w toku nadobowiązkowych zajęć zorganizowanych w ramach eksperymentu zapoznaje się z pewnymi pojęciami algebry. Uogólnia się pojęcie działania, wprowadza poglądowo pojęcie porządku w zbiorze. Uczniowie rozważają różne działania w różnych zbiorach uporządkowanych. Rozpatrywane przykłady zapisuje się w tabeli.

Zbiór	a poprzedza b znaczy	$a+b$ znaczy	$a \cdot b$ znaczy
liczb rzeczywistych	$a \leqslant b$	$\max(a, b)$	$\min(a, b)$
liczb naturalnych	a jest dzielnikiem b	najmniejsza wspólna wielokrotna a, b NWW(a, b)	największy wspólny dzielnik a, b NWD(a, b)
podzbiorów pewnego zbioru	$a \subset b$	$a \cup b$	$a \cap b$

Uczniowie badają własności tych działań. Stwierdzają, że niektóre z nich są podobne do własności działań arytmetycznych (przemienność), inne nieznane dotąd w ich matematyce (np, $a+a=a$, $a \cdot a = a$). Budzi to duże zainteresowanie. Po trzeciej godzinie zajęć jednak uczniowie zaczynają się nudzić i proponują zmianę tematu, „bo to ciągle jest to

samo". Prowadząca zajęcia pyta: „dlaczego uważacie, że to jest to samo, przecież mówimy o coraz to innych zbiorach, porządkach, działaniach". Zagadnienie, dlaczego „to jest ciągle to samo", pobudza znowu zainteresowanie uczniów i doprowadza do stormułowania kilku własności, których koniunkcja jest — zmodyfikowaną nieco w stosunku do przyjętej w nauce — aksjomatyczną definicją znanego rodzaju struktury (treillis, lattice), stanowiącego przedmiot rozwiniętej już dziś teorii. Uczniowie zauważają, że w każdym z rozważanych przez nich przypadków w danym zbiorze był określony porządek i dwa działania, suma i iloczyn, związane z tym porządkiem tak, że suma dwóch elementów jest ich najbliższym wspólnym następnikiem, zaś iloczyn najbliższym wspólnym poprzednikiem. Zapisują symbolicznie te własności. Proponują dopisać jeszcze inne, np. przemienność tych działań. Okazuje się, że ta własność wynika już z poprzednio sformułowanych. Skreśla się więc ją z „opisu". Co tu zostało opisane? Termin „wspólna struktura" rozważanych zbiorów z porządkami jest przyjęty przez uczniów jako naturalny wyraz tego, co znaleźli. Prowadząca zajęcia nazywa tę strukturę „kratą"(4).

W ten sposób opis mający na celu wyrażenie „tego samego" występującego w różnych sytuacjach przekształcił się w aksjomatykę.

Trzy typy ćwiczeń oswajają uczniów z jej znaczeniem i zastosowaniem.

1° Rozpoznanie zdefinowanej struktury w szczególnym modelu, a więc *zastosowanie aksjomatyki* bezpośrednio *w roli definicji*. Rozważano na przykład zbiór wielokątów wypukłych z relacją zawierania (włączono do tego zbioru zbiór pusty, jednopunktowy i odcinek), uczniowie stwierdzili, że to jest krata.

2° *Dedukcja* czyli badanie własności kraty nieujawnionych w definicji. Problem, czy własności działań arytmetycznych można przenieść na działanie w kracie. Udowodniono łączność sumy i iloczynu. Czy zachodzi prawo rozdzielności iloczynu względem sumy w kracie? Jak to zbadać? Okazało się, że można podać przykłady krat, dla których to prawo nie jest spełnione (rozważany już zbiór wielokątów wypukłych). Ten moment jest bardzo kształcący: rozdzielność iloczynu względem sumy nie może być twierdzeniem teorii krat, bo istnieje model o tego rodzaju strukturze, który nie ma tej własności. Rozróżnia się kraty rozdzielne od nierozdzielnych, prowadząca zajęcia podaje informacyjnie przykłady. Dla krat rozdzielnych dowodzi się twierdzenia: $(a+b)\cdot(a+c)+b = a+b$.

3° *Interpretacja i zastosowanie*. Uczniowie jeszcze w naiwny sposób, ale z wielkim zainteresowaniem dostrzegają ekonomizujące znaczenie me-

(4) Angielski termin „lattice" („krata") jest tradycyjnie tłumaczony na polski jako „struktura"; nie jest to oczywiście struktura w sensie używanym przez Autorkę (przyp. red.).

tody aksjomatycznej. Prowadząca zajęcia formułuje zadanie: obliczyć NWW{NWD[NWW(a, b), NWW(a, c)], b}.

Uczniowie są przerażeni. Pytanie: czy nie ma wśród was sprytnych? Jest — odzywa się jeden chłopiec i szybko rachuje, stosując otrzymany poprzednio wzór.: $(a+b)\cdot(a+c)+b = a+b$, a więc

$$\text{NWW}\{\text{NWD}[\text{NWW}(a, b), \text{NWW}(a, c)], b\} = \text{NWW}(a, b).$$

Sposób rozwiązywania zagadnień i uwagi uczniów świadczą o tym, że zrozumieli aksjomatykę jako definicję pewnej struktury oraz dedukcję jako jedynie sensowną metodę badania własności tej struktury. Jeden z uczniów pyta: czy nie można by całej matematyki tak zbudować?

Zauważmy, że cały ten proces wprowadzenia piętnastoletnich uczniów w tak abstrakcyjny sposób myślenia przebiegał zupełnie naturalnie dzięki temu, że

1° struktura, którą zdefiniowano, była dla uczniów od początku wieloznaczna. Punktem wyjścia były różne modele, aksjomatyzacja polegała na znalezieniu wspólnego dla nich schematu;

2° uczniowie rozporządzali kilku modelami dobrze im znanymi, tak, że wspólny schemat mógł być łatwo dostrzeżony, nasuwał się spontanicznie;

3° aksjomatyka była łatwa do sformułowania i bardzo prosta, tym bardziej, że uczniowie rozporządzając językiem mnogościowym, mogli krótko scharakteryzować dany rodzaj struktury;

4° dowody pierwszych twierdzeń były łatwe;

5° można było na prostym przykładzie pokazać uczniom „ekonomiczność" teorii wieloznacznego rodzaju struktury w sposób ich zaskakujący i bardzo interesujący.

Nietrudno zauważyć, że te warunki nie są spełnione, gdy chcemy z uczniami na początku nauki licealnej ustalić podstawę aksjomatyczną dla arytmetyki i elementów rachunku różniczkowego oraz dla geometrii. Sytuacja jest tu zupełnie inna, niż w opisanym wyżej przykładzie, ponieważ należałoby tu zaksjomatyzować jedną tylko dziedzinę, znaną uczniom z nauki w poprzednich klasach w dużym stopniu tylko w ujęciu intuicyjnym, mimo lokalnie-dedukcyjnej organizacji tego kursu. W takich przypadkach próbuje się wprowadzić uczniów w myślenie aksjomatyczne na innej drodze, którą można by określić, jako „stopniowe zawężanie struktury". Zacytuję w związku z tym dwa przykłady, w tym jeden ze szkoły polskiej.

Przykład II ([20], str. 79). Eksperyment ma miejsce w klasie dwunastoletnich uczniów szkoły belgijskiej. Autor artykułu pisze: „początkowo aksjomaty, które wybraliśmy, zostały wspólnie uznane. Mianowicie, w geometrii płaskiej: A_1. Płaszczyzna jest zbiorem punktów, jest to zbiór

wszystkich punktów . A_2. Prosta jest częścią właściwą płaszczyzny . A_3. Każda prosta zawiera co najmniej dwa punkty . A_4. Istnieje dokładnie jedna prosta, do której należą dwa dane różne punkty. Te własności zostały ustalone na podstawie obserwacji rysunków. Ich sens intuicyjny jest zupełnie jasny. Ażeby uświadomić uczniom logiczny sens tych zdań przeprowadzono ćwiczenia, w których proste są reprezentowane przez diagramy Venna, i w których żądano uzupełnienia tych diagramów przez wskazanie zbiorów pustych. Na przykład jeżeli A i B są prostymi i $A-B = \emptyset$, to do zbioru $A \cap B$ należeć muszą co najmniej dwa różne punkty, zatem $A = B$ i $B-A = \emptyset$. Takie ćwiczenia zmuszają do rozumowania nie opartego na rysunku. Dotąd uczniowie nie zdają sobie jeszcze sprawy z tego, że aksjomaty są czymś innym, niż wierny opis własności poglądowo stwierdzonych na płaskim rysunku. Zaproponowaliśmy im ćwiczenia w interpretowaniu aksjomatów. Najpierw interpretacja fizyczna. Czy zdania A_1, A_2, A_3, A_4 pozostaną prawdziwe, jeżeli zinterpretujemy prostą zawierającą dane dwa punkty jako kreskę wykreśloną linijką i łączącą te dwa punkty? Nie! Klasa odkryła interpretację nazwaną „kartką pocztową": kreska, łącząca dwa punkty ma być przedłużona aż do brzegów kartki. Aksjomaty są wtedy spełnione. Uczniowie wykonali analogiczne próby interpretując płaszczyznę jako sferę, oraz proste jako pewne okręgi na niej wykreślone. Interpretacja, która ich zaskakuje i bawi równocześnie, to uznanie płaszczyzny za jakikolwiek zbiór punktów a prostych za pary tych punktów. W ten sposób rozporządza się modelami skończonymi.

Uczniowie odkryli, że aksjomaty są spełnione w modelu zawierającym co najmniej trzy punkty".

Podobnie postępuje się dalej. W związku z aksjomatem o równoległych (przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej) uczniowie stwierdzili, że 1) w modelu trzech punktów proste równoległe nie istnieją, a więc, że w tym modelu ten aksjomat nie jest spełniony. 2) W modelu kartki pocztowej przez każdy punkt nie należący do danej prostej przechodzi nieskończenie wiele prostych do niej równoległych. Aksjomat o równoległych nie jest tu też spełniony. 3) Aksjomat ten jest natomiast spełniony w modelu czterech punktów, ale znowu nie jest spełniony w modelu pięciu, sześciu itd. punktów. Autor stwierdza dalej: „Na tej drodze uczniowie konstatują w sposób naiwny dwa ważne fakty, 1° system aksjomatów może dopuszczać wiele interpretacji, z których niektóre mogą się okazać nieoczekiwane nawet dla kogoś, kto te aksjomaty wypowiada, 2° ponieważ aksjomat o równoległych nie jest spełniony w modelach, w których były spełnione aksjomaty poprzednie, więc ten aksjomat wnosi coś nowego" ([20], str. 82, 83).

Wprowadzając dalsze aksjomaty geometrii interpretuje się je w podobny sposób w poznanych modelach. Na przykład aksjomaty porządku

już nie są spełnione w całości w modelu czterech punktów, w których były spełnione aksjomaty incydencji i równoległości. Z dwóch wprowadzonych aksjomatów porządku: „w każdej prostej istnieją dwa naturalne odwrotne porządki, przy czym rzut równoległy prostej na prostą przeprowadza porządek naturalny w pierwszej prostej w porządek naturalny w drugiej prostej" oraz „rzutując równolegle prostą na prostą do niej równoległą otrzymamy z danego naturalnego porządku pierwszej prostej ten sam porządek naturalny w drugiej prostej niezależnie od kierunku rzutu", pierwszy aksjomat jest spełniony w modelu czterech punktów, drugi nie jest w nim spełniony. Uczniowie stwierdzają „ten ostatni aksjomat wnosi coś nowego". Dowodzi się następnie, że wyklucza on modele skończone.

Dostrzegamy tu dydaktyczne postępowanie odwrotne do tego, które opisuje poprzedni przykład. Tam wychodząc od kilku konkretnych modeli starano się znaleźć wspólny dla nich schemat, rozszerzając jakby struktury szczególne w nich występujące. Tu na odwrót, stopniowo zacieśnia się strukturę, eliminując pewne modele przez dołączanie aksjomatów. Cały ten proces przebiega przy bardzo aktywnym udziale uczniów, przez rozwiązywanie kolejno nasuwających się prostych problemów.

Przykład III. W pierwszej klasie zreformowanego liceum zaczynamy nauczanie matematyki od uzupełnienia i uporządkowania wiadomości o liczbach rzeczywistych oraz od ustalenia podstawy dla geometrii dedukcyjnej. W istocie rzeczy ustalamy w ten sposób także bazę dla globalnej dedukcyjnej organizacji matematyki elementarnej szkoły średniej.

Zaczynamy od arytmetyki. Zależnie od sytuacji trzeba będzie mniej lub więcej uwagi poświęcić intuicyjnemu jeszcze w dużej mierze uzupełnieniu wiadomości uczniów o liczbach rzeczywistych. Ostatecznie jednak należałoby ten rozdział zamknąć ustaleniem podstawowych własności w postaci aksjomatów ciała liczb rzeczywistych. Ta praca wykonana przy aktywnym udziale uczniów powinna być tak przez nauczyciela pokierowana, aby jej rezultatem było jasne uświadomienie uczniom struktury ciała zupełnie uporządkowanego, ciągłego.

Oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych, którego własności uczniowie poznali poprzednio intuicyjnie, przez R. Proponujemy uczniom zapisanie podstawowych własności dodawania. Zespół tych własności oznaczamy symbolem D, poszczególne aksjomaty numerujemy. Kierujemy tak pracą uczniów, aby bardzo wyraźnie sprecyzować $(R, +)$ jako grupę przemienną (nazwy nie podajemy jeszcze). Uczniowie zapisują symbolicznie wewnętrzność i nieograniczoną wykonalność dodawania (D_1), istnienie modułu (D_2), istnienie liczby przeciwnej do zadanej dowolnie liczby (D_3), łączność (D_4) i przemienność (D_5). Pytanie, czy własności D charakteryzują dostatecznie zbiór liczb rzeczywistych z dodawaniem

prowadzi do skonstatowania, że R mogłoby tu oznaczać np. zbiór liczb całkowitych, lub tylko liczb parzystych, lub zbiór liczb wymiernych. Proponujemy uczniom jeszcze jedną interpretację matematyczną: zbiór „liczb zegarowych" i „dodawanie zegarowe". Jest to zbiór liczb całkowitych $0, 1, 2, \ldots, 11$. Definicje i własności działań w tym zbiorze opisujemy obrazowo za pomocą zegara, na którego tarczy zamiast napisu 12 umieszczono napis 0. Przy pomocy obrotów wskazówki zegara sugeruje się definicję dodawania liczb zegarowych (dodawanie modulo 12, $a \oplus b = a + b - \left[\frac{a+b}{12}\right]$, $a \oplus b$ poglądowo oznacza liczbę zegarową wskazaną przez wskazówkę zegara po upływie b godzin od godziny a). Uczniowie stwierdzają pod kierunkiem nauczyciela, że zbiór liczb zegarowych z dodawaniem zegarowym ma wszystkie własności D, podają przykłady par liczb zegarowych przeciwnych, ilustrują dodawanie zegarowe przykładami. Podajemy (dla dalszych celów) jeszcze jeden przykład skończonego zbioru liczb, czyniącego zadość — przy analogicznej definicji dodawania — układowi warunków D, mianowicie przykład zbioru liczb modulo 7 (chodzi o liczbę pierwszą); jest to w obrazowym przedstawieniu zbiór „liczb tygodniowych" $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, w którym określamy działanie dodawania przez definicję podobną do poprzedniej, sformułowaną już przez samych uczniów. Można tu to pojęcie uogólnić, ale nie to jest ważne w tej chwili.

Po uświadomieniu uczniom wieloznaczności układu D (nawet bez wychodzenia poza modele liczbowe) przystępujemy do przykładów ścisłej dedukcji. Uczniowie dowodzą, że z układu D wynika już istnienie jednego jedynego pierwiastka równania $a + x = b$, definiują różnicę liczb, dowodzą pewnych twierdzeń o różnicy. Nie wyczerpuje się oczywiście tematu, poprzestaje się na kilku tylko przykładach. Celem tych ćwiczeń jest uświadomienie uczniom 1° pojęcia wywiedlności jakiejś tezy z układu innych tez, 2° tego, że każde z formalnie udowodnionych w ten sposób twierdzeń jest prawdziwe w każdym z modeli, ponieważ układ D określa ich wspólną strukturę. Można tu wprowadzić termin „grupa".

Układ M (własności mnożenia) opracowują uczniowie sami przez analogię do układu D. Przy poszukiwaniu odpowiednika dla D_3 (istnienie liczby przeciwnej do danej liczby) zauważają brak pełnej analogii, formułuje się własność M_3 z odpowiednim założeniem. Należy jeszcze powiązać oba działania. Pojawia się własność rozdzielności iloczynu względem sumy, nazywana MD.

Czy własności D, M, MD przysługują wszystkim poprzednio rozważanym zbiorom liczb z odpowiednimi działaniami? Odpowiedź jest pozytywna dla zbioru liczb wymiernych, negatywna dla zbioru liczb całkowitych oraz dla zbioru liczb parzystych. Interesujące uczniów ćwiczenia wykonuje się w związku z badaniem pozostałych dwóch modeli liczbowych.

Uczniowie przekonują się, że w zbiorze liczb zegarowych równanie $2 \cdot x = 1$ nie ma rozwiązania (iloczyn liczb zegarowych definiuje się analogicznie do sumy, iloczyn modulo 12), wykonując konkretne rachunki (obliczają wszystkie możliwe iloczyny 2 przez inne liczby zegarowe). Konstatują też istnienie liczb, których iloczyn jest zerem, mimo że żadna z nich nie jest zerem ($2 \cdot 6 = 0$). Natomiast zbiór liczb tygodniowych czyni zadość wszystkim własnościom D, M, MD. Pogadanka nauczyciela informacyjnie uogólnia te spostrzeżenia uczniów, rozróżnia się liczby modulo n, gdy n jest pierwsze i gdy n jest złożone.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, przystępuje się następnie do dedukcji. Definiuje się iloraz, dowodzi kilku twierdzeń bardzo precyzyjnie, podkreślając ich wywiedlność z układu D, M, MD oraz jako konsekwencję pewność, że wszystkie te twierdzenia są prawdziwe zarówno dla zbioru liczb wymiernych z dodawaniem i mnożeniem, jak i dla zbioru liczb modulo n z dodawaniem i mnożeniem modulo n, gdy n jest liczbą pierwszą. Twierdzenia te były znane już dla liczb wymiernych (np. ważne twierdzenie o ilorazach, czyli tzw. ułamkach algebraicznych), nowe jest teraz to, że te same twierdzenia można stosować w rachunkach modulo n, gdy n jest liczbą pierwszą. Można już nazwać opisaną przez D, M, MD wspólną strukturę dla zbiorów liczb rzeczywistych, liczb wymiernych, liczb modulo n, przy n pierwszym, z odpowiednimi działaniami, strukturą ciała. Nazwa struktura w tym przypadku — jak pokazuje doświadczenie — jest naturalna dla uczniów i bardzo dobrze oddaje ich intuicyjne rozumienie tego, co jest wspólne w rozważanych modelach liczbowych.

Przechodzi się następnie do własności porządku P, to jest do znanej uczniom relacji mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych. Własności P wyrażają, że $<$ jest antysymetryczna (P_1), przechodnia (P_2) i spójna (prawo trychotomii P_3). Wiąże się mniejszość z dodawaniem (prawo monotonii dla dodawania PD) oraz mniejszość z mnożeniem (dwa prawa monotonii mnożenia PM_1 i PM_2). Podobnie jak poprzednio, pytanie, czy układ D, M, MD, P, PD, PM charakteryzuje tylko liczby rzeczywiste, sugeruje zbadanie, czy te własności przysługują niewykluczonym dotąd modelom: zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb tygodniowych z odpowiednimi działaniami. Okazuje się, że tym razem odpadnie zbiór liczb tygodniowych. Czy można w tym zbiorze określić mniejszość tak, aby były spełnione warunki P i PD i MD? Przypuśćmy, że byłoby to możliwe. Wtedy musiałoby być albo $0 < 1$, albo $1 < 0$. W pierwszym przypadku byłoby wobec prawa monotonii dodawania: $0 < 1, 1 < 2, 2 < 3, 3 < 4, 4 < 5, 5 < 6, 6 < 0$, a więc wobec przechodniości mniejszości $0 < 0$, co jest niemożliwe wobec antysymetrii. Gdyby zaś przyjąć na odwrót $1 < 0$, to byłoby podobnie $0 > 1 > 2 > 3 > 4 > 5 > 6 > 0$. Nie można uporządkować w sposób ścisły zbioru liczb tygodniowych tak, aby było spełnione

prawo monotonii dodawania. Dołączając do własności D, M, DM własności P, PD, PM wykluczyliśmy nasz model liczb tygodniowych. Z rozważanych poprzednio modeli pozostaje już tylko model liczb wymiernych i model liczb rzeczywistych. Możemy tu wprowadzić nazwę struktury ciała uporządkowanego zupełnie. Zbiór liczb tygodniowych z działaniami mnożenia i dodawania tygodniowego jest ciałem, ale nie jest ciałem uporządkowanym zupełnie, zbiór liczb wymiernych z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem uporządkowanym. Następują przykłady dedukcji, wybrane twierdzenia o nierównościach, rozwiązanie typowych nierówności liniowych.

Pozostaje jeszcze jeden krok, uzupełnienie naszego układu taką własnością liczb rzeczywistych, która wyklucza model liczb wymiernych. Uczniowie znają już przykład takiego zbioru liczb wymiernych, że ani w tym zbiorze nie ma maximum, ani w zbiorze go dopełniającym do zbioru wszystkich liczb wymiernych nie ma minimum, mianowicie zbiór $\{x: x$ jest liczbą wymierną i $x < 0$ lub $x^2 \leqslant 2\}$. Intuicyjnie już wprowadzono pojęcie liczby niewymiernej. Obecnie wyrażamy te intuicje w postaci własności C ciągłości zbioru liczb rzeczywistych: każdy ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych ma kres górny, każdy ograniczony z dołu zbiór liczb rzeczywistych ma kres dolny. Pojęcie kresu górnego (dolnego) definiuje się jako liczbę, która jest albo maximum danego zbioru (minimum danego zbioru), albo gdy takiego maximum (minimum) w danym zbiorze brak, minimum (maximum) zbioru liczb górnych (dolnych) dla danego zbioru. Własność C wyklucza model liczb wymiernych. Możemy wprowadzić termin „struktura ciała zupełnie uporządkowanego ciągłego".

Nauczyciel informuje uczniów, że lista własności została tym samym zamknięta. Myśląc w rachunkach i rozumowaniach o liczbach rzeczywistych będziemy odwoływać się tylko do układu własności D, M, MD, P, PD, PM, C, a więc będziemy korzystać ze struktury ciała zupełnie uporządkowanego ciągłego. Oczywiście nie będziemy mogli drobiazgowo wywieść z tego układu wszystkich potrzebnych nam przekształceń, które uczniowie poznali poprzednio i które powinni stosować już biegle w rachunkach. Pokazaliśmy na wybranych przykładach wywiedlność niektórych z tych „praw" z danego układu. Informujemy uczniów, że i inne są podobnie wywiedlne, nie mamy jednak czasu, aby się tym dokładnie zajmować. W przypadku błędu mamy już podstawę kontroli.

Proces dydaktyczny, który przedstawiłam, jest kierowaną przez nauczyciela aksjomatyzacją dziedziny poznanej przez uczniów poprzednio w dużej mierze intuicyjnie, aksjomatyzacją przeprowadzoną w celu uporządkowania tej dziedziny według schematu strukturalnego, przez stopniowe zacieśnianie kolejno określanych struktur oraz eliminowanie modeli nieodpowiadających intuicyjnie ujętemu pojęciu zbioru liczb

rzeczywistych z dwoma działaniami i nierównością. Nie mamy możliwości na tym poziomie wyjaśnienia uczniom, że zdefiniowaliśmy ostatecznie nie tylko jednoznaczny rodzaj struktury, ale nadto taki, w którym nie ma nietożsamościowych automorfizmów. Ale jakaś idea tej jednoznaczności już się w myśli ucznia zaczęła zarysowywać. Ważne rezultaty to: określona podstawa do rozumowań i rachunków, ujawnienie podstawowych struktur w znanej intuicyjnie dziedzinie, porządkujących ją pojęciowo, wprowadzenie uczniów w ścisłą dedukcję na prostych przykładach, pokazanie im ekonomizującej pracę myśli roli formalnej dedukcji ze względu na możliwość różnych interpretacji danego układu własności (aksjomatów), ujawnienie — w uproszczony sposób — definicyjnego charakteru aksjomatyki (opis sprawozdawczy, przekształcony ostatecznie w definicję pewnej struktury), uwypuklenie kolejno definiowanych struktur przez kontrprzykłady (eliminowanie modeli).

Nieco inaczej, choć w zasadzie kierując się podobną ideą „opisu definiującego strukturę", można przeprowadzić na wstępie nauki w liceum aksjomatyzację na wpół jeszcze intuicyjnej geometrii. Zagadnienie to omówię szczegółowo w trzecim cyklu wykładów poświęconym metodyce szczegółowej. Obecnie chcę zwrócić uwagę na następujące zasady, które proponuję stosować w toku aksjomatyzacji geometrii.

1° Uczniowie przychodzą do liceum z różnych szkół i przystępują do pracy w nowej grupie z nowym nauczycielem. Ta sytuacja może być wykorzystana jako naturalny punkt wyjścia do dyskusji z uczniami. Nauczyciel zwraca uwagę na to, że wszyscy uczniowie wynieśli z poprzedniej nauki w szkole podstawowej pewne pojęcia i wiadomości z geometrii. Wszyscy używają nazw „prosta", „punkt", „płaszczyzna", „odległość", itp. Terminy te nie oznaczają jednak konkretnych przedmiotów. Nie możemy wskazać prostej ani punktu w naszym otoczeniu. Dyskusja na ten temat powinna uświadomić uczniom, że pojęcia geometryczne powstają w naszej myśli jako schematy stosunków przestrzennych, uproszczone ich przedstawienie. Doświadczenie szkolne dowodzi, że uczniowie to rozumieją. Dla uniknięcia nieporozumień trzeba więc na wstępie geometrii ustalić, jak te schematy rozumiemy. Może każdy je rozumie inaczej? Okazuje się np., że mówiąc o prostej i punkcie wszyscy zgodnie rozumiemy prostą jako zbiór punktów. Wszyscy zgodnie rozumiemy terminy punkt i prosta tak, że do każdych dwóch różnych punktów można dobrać dokładnie jedną prostą, do której te punkty należą. Ustalimy takie proste własności, w których wyrazimy nasze wspólne rozumienie stosunków zachodzących między punktami i prostymi tak, aby w dalszym ciągu już nie było nieporozumień, jak tymi nazwami należy się posługiwać. Postaramy się, aby ten wstępny opis był możliwie zwięzły.

2° Poprzednio już uczniowie poznali elementy nauki o zbiorach, pojęcie porządku i odległości w zbiorze (w sensie ogólnym). Ustalamy

język, w jakim będziemy formułować własności podstawowe. Umawiamy się, że „opis" ma być wykonywany tylko przy użyciu tego „znanego nam wszystkim słownika". Opis ten jest więc od początku ukierunkowany. Uczniowie wyrażają tym samym strukturę płaszczyzny w określonych z góry kategoriach pojęciowych, co wyklucza niejasne zwroty w stylu „prosta ciągnie się w nieskończoność", „odcinek nie ma grubości" itp. i zmusza ich do bardzo precyzyjnych wypowiedzi.

W toku dedukcji uczniowie dowodzą twierdzeń dla nich intuicyjnych i dobrze im znanych z poprzednich lat nauki. Ma to pełny sens w przyjętym ujęciu. Kontrolujemy bowiem w ten sposób, czy nasz początkowy „opis" jest wystarczający. Zmienia się punkt widzenia. Nie pytamy, czy trójkąt równoramienny ma oś symetrii, ale czy nasz opis początkowy był na tyle dokładny, że z niego tę własność trójkąta równoramiennego, którą intuicyjnie mu przypisujemy, można wywieść. Twierdzenia, których nie znaliśmy dotąd lub które są dla nas nieoczywiste, i które są wywiedlne z naszego „opisu", ujawniają nam, że jeszcze nie wszystko wiemy o opisanej w aksjomatach strukturze. Modele — nieraz dziwaczne — dowodzą, że nasz „opis" jest jeszcze niedokładny. Aby je wyeliminować dołączamy do tego „opisu" nowe własności itp. W ten sposób proces aksjomatyzacji geometrii jest źródłem bardzo kształcących rozważań. Ostatecznie ustala się listę podstawowych własności: definicję struktury płaszczyzny, którą badamy w naszej geometrii.

Podam jeszcze dwa przykłady zapoznawania uczniów z metodą aksjomatyczną według eksperymentów prowadzonych w Belgii przez G. Papy i w NRF przez H. G. Steinera.

Przykład IV. W eksperymentalnych szkołach belgijskich, obejmujących już dziś prawie 50% szkół średnich, w których nauczanie matematyki jest oparte na bardzo mocno zmodernizowanym programie, zupełnie odmiennym od programu tradycyjnego ([17]), wprowadza się już aksjomatykę geometrii w nauczaniu uczniów dwunastoletnich. Aksjomaty ustala się na podstawie intuicyjnego opisu, przy czym są one tak wybrane, że bardzo szybko można przejść do ujawnienia struktury liniowej płaszczyzny z ustalonym w niej centrum. Definiuje się bowiem od razu translację (wektor) i wprowadza działania dodawania wektorów i mnożenia wektora przez liczbę. To wszystko jest oparte na aksjomatach ustalonych, jak zaznaczyłam, w postaci intuicyjnego opisu, sformułowanego w dziesięciu własnościach, przeznaczonych do „zatrzymania w pamięci (á retenir), ponieważ z nich można wywieść inne twierdzenia dotyczące własności płaszczyzny. Przyjmuje się następnie, że w płaszczyźnie oznaczonej przez Π ustalono jeden punkt o i od tego momentu rozważa się płaszczyznę z centrum, oznaczaną (Π, o). Definiuje się dodawanie punktów za pomocą dodawania wektorów ($a+b=c \Leftrightarrow \vec{oa}+\vec{ob}=\vec{oc}$) i mnożenie

punktu przez liczbę za pomocą mnożenia wektora przez liczbę ($aa = b \Leftrightarrow a\vec{oa} = \vec{ob}$). W ten sposób ujawnia się, że płaszczyzna z centrum ma strukturę przestrzeni liniowej (podstawowe pojęcia algebraiczne są tu bardzo wcześnie wprowadzane). Rozwija się dalej tę geometrię w ciągu dwóch lat nauczania, w dużym stopniu algebraicznie.

W klasie czternastoletnich uczniów następuje odwrócenie całej tej konstrukcji. Okazuje się, że przyjmując na odwrót jako punkt wyjścia opis płaszczyzny z centrum, z działaniem dodawania i mnożenia przez liczbę jako przestrzeni liniowej można wywieść przyjęte poprzednio aksjomaty z tego opisu. Od tego momentu począwszy cały kurs matematyki elementarnej opiera się na aksjomatyce ciała liczb rzeczywistych oraz na aksjomatyce przestrzeni liniowej, uzupełnionej następnie również aksjomatycznym wprowadzeniem iloczynu skalarnego.

Ta koncepcja jest realizowana z imponującą inwencją dydaktyczną oraz — jak stwierdzają organizatorzy eksperymentu — przyjmowana jest przez uczniów zupełnie dobrze i z wielkim zainteresowaniem.

Przykład V ([21]). Eksperyment odbywał się w najwyższej klasie szkoły średniej, uczniowie byli już wyselekcjonowani, klasa liczyła ich tylko 13.

Punktem wyjścia było rozważenie różnych przykładów „zbiorów głosujących" (Rada miejska, Bundestag, klasa szkolna, zbiór aksjonariuszy, komisja egzaminacyjna, itp). Zauważono, że za każdym razem dany był ściśle określony zbiór A osób, ułamek p/q nie mniejszy od $\frac{1}{2}$ i nie większy od 1, określający decydującą dla głosowania większość, oraz rozkład głosów, a więc funkcja s, przyporządkowująca każdej z osób liczbę naturalną (liczbę głosów, która tej osobie przysługuje). Strukturę zbioru głosujących określono więc w tym ujęciu jako układ $(A, s, p/q)$[5]. Uczniowie podali wiele przykładów i wyznaczyli w każdym z tych przypadków tzw. wszystkie możliwe wygrywające koalicje głosujących. Koalicją nazywano przy tym każdy podzbiór zbioru A; koalicja nazywa się wygrywająca, jeżeli przypadająca na nią suma głosów jest dostatecznie duża, aby wymusić decyzję. W toku tych ćwiczeń uczniowie dokonali różnych ważnych dla dalszego ciągu spostrzeżeń. Stwierdzili między innymi; że:

1° każdy nadzbiór (w A) koalicji wygrywającej jest koalicją wygrywającą; wyróżniono minimalne koalicje wygrywające;

2° jeżeli K jest koalicją wygrywającą, to $A-K$ nie jest koalicją wygrywającą; koalicję $A-K$ nazywa się koalicją przegrywającą;

3° istnieją w niektórych zbiorach głosujących koalicje, które nie są ani wygrywające, ani przegrywające; nazwano je koalicjami blokującymi.

---

[5] Wyeliminowano dla uproszczenia wstrzymujących się od głosowania, zaliczając ich do głosujących „tak".

Uczniowie stwierdzili, że wystarczy podać wygrywające koalicje minimalne, aby znać:

1° wszystkie koalicje wygrywające (nadzbiory koalicji minimalnych),

2° wszystkie koalicje przegrywające (dopełnienia koalicji wygrywających),

3° wszystkie koalicje blokujące (pozostałe koalicje).

„Uczniowie" — pisze autor — „odnoszą w tej chwili po raz pierwszy wrażenie, że rozważania te nie zależą od poprzedniego podziału głosów" ([21], str. 69).

W dalszym ciągu uczniowie sami proponowali różne definicje, np. „bezsilnego członka zbioru głosujących", „dyktatora", „członka zbioru głosujących, mającego pravo Veta", „przewodniczącego" oraz odkrywali, formulowali i uzasadniali twierdzenia dotyczące stosunków między wyróżnionymi koalicjami. Badano równoważność proponowanych definicji, itp. Uczniowie uświadamiali sobie coraz jaśniej, że wszystkie te definicje i rozumowania można sformułować posługując się tylko terminami „zbiór głosujących" i „zbiór koalicji wygrywających", nie odwołując się do — początkowo na pierwszy plan wysuwanych — pojęć „regulaminowej większości p/q" i „rozkładu głosów s". Ostatecznie sformułowano drugą definicję rodzaju struktury zbioru głosujących w sposób następujący: para (A, G) utworzona z niepustego zbioru A i niepustego zbioru G podzbiorów A jest „zbiorem głosujących", jeżeli

1° $k \in G \wedge k \subset l \subset A \Rightarrow l \in G$,

2° $k \in G \Rightarrow \bar{k} \notin G$,

Jako szczególny model takiego rodzaju struktury uczniowie badali „strukturę zbioru głosujących w Radzie Bezpieczeństwa Narodów Zjednoczonych", w której wyróżnia się 5 miejsc stałych i 6 wybieralnych(6). Minimalnymi koalicjami wygrywającymi są tu zgodnie ze statutem Rady koalicje utworzone przez wszystkich pięciu delegatów zajmujących miejsca stałe $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ i co najmniej dwóch zajmujących miejsca wybieralne $\{s_i, s_j\}$ dla $i \neq j$ oraz $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. W związku z badaniem tej struktury wykonano rachunki: obliczono ilość wszystkich możliwych koalicji (moc zbioru podzbiorów zbioru $\{f_1, f_2, \ldots, f_5, s_1, s_2, \ldots, s_6\} = 2^{11} = 2048$), wszystkich koalicji wygrywających $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{6}{6} = 2^6 - 7 = 57$), w tym minimalnych ($\binom{6}{2} = 15$), itp. Rozważano problem: czy można podać taki rozkład głosów, ażeby przy zwykłej większości ($p/q = \frac{1}{2}$) można było uzyskać w Radzie Bezpieczeństwa te same mini-

(6) Autor nie uwzględnia zmian wprowadzonych do statutu Rady Bezpieczeństwa 1. 1. 1966.

malne koalicje? Czy jest to możliwe przy innych p/q? Zatem, czy można dobrać s i p/q tak, aby dana struktura (A, G) była modelem rodzaju struktury $(A, s, p/q)$? Większość uczniów odpowiedziała poprawnie, tj. negatywnie na pierwsze pytanie. Odpowiedź na drugie pytanie znalazło trzech uczniów (na trzynastu w klasie): każdemu miejscu stałemu przyznali 5 głosów, każdemu miejscu wybieralnemu 1 głos, przy ustawowej większości $p/q = 27/31$.

Z tej dyskusji wyłonił się problem postawiony przez jednego z uczniów: czy zawsze mając strukturę zbioru głosujących zadaną przez zbiór minimalnych koalicji wygrywających można dobrać taki ułamek p/q, określający regulaminową większość i rozkład głosów s, aby móc określić przez s i p/q zadaną przez zbiór koalicji strukturę zbioru głosujących? Ten trudny problem został rozwiązany. Jeden z podanych przez uczniów przykładów posłużył jako punkt wyjścia dla dowodu, że odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna. Okazało się więc, że definicja druga obejmuje sytuacje, których nie można by ująć według definicji pierwszej.

W przedstawionym tu skrócie eksperymentu nie mogę oczywiście nawet choćby zacytować różnorodnych problemów i zadań, które uczniowie rozwiązywali samodzielnie oraz numerycznych obliczeń, które wykonywali w związku z omawianą tematyką. Artykuł [21] trzeba w całości przeczytać, aby sobie zdać sprawę z dydaktycznych wartości tych prac.

Ograniczę więc tu tylko mój komentarz do następujących uwag: Prace uczniów były bardzo umiejętnie prowadzone od schematyzacji znanych im stosunków przez ich matematyzację do sformułowania aksjomatycznej definicji pewnego rodzaju struktury. W pierwszej fazie uczniowie usiłowali znaleźć schematyczny opis różnych rzeczywistych sytuacji. Tę schematyzację ukierunkowano tak, aby opis schematu został wyrażony w terminach teorii mnogości i arytmetyki; była to poprawna matematyzacja rzeczywistych sytuacji wyjściowych. Ale na tym nie poprzestano. Okazało się, że podana charakterystyka arytmetyczna nie jest jedyna, że natomiast można tę strukturę opisać, podając wyróżniony zbiór podzbiorów danego zbioru osób głosujących. Dostrzegamy tu uogólnienie takiego samego rodzaju, jakie dokonało się w rozwoju pojęcia topologii: od przestrzeni metrycznej i otoczenia kołowego, do definicji topologii przez wyróżniony zbiór pewnych szczególnych podzbiorów przestrzeni. Uczniowie w toku tej całej pracy zdobyli niewątpliwie głębokie zrozumienie tego metodologicznego procesu w drodze naturalnej.

Podane wyżej przykłady ilustrują różne dydaktyczne próby wprowadzenia ucznia w myślenie aksjomatyczne. Jak widzimy, chodzi tu o coś zupełnie innego, niż o dogmatyczny formalizm. Celem tych wszystkich badań i eksperymentów jest umożliwienie przeniknięcia do nauczania

współczesnych idei matematycznych opartych na pojęciu struktury. Ci, którzy chcą wypracować organizację materiału nauczania matematyki sprzyjającą realizacji tego celu, sądzą, że to jest właśnie warunkiem koniecznym do sharmonizowania elementów empirycznych, intuicyjnych i formalnych w matematycznym myśleniu ucznia.

Omawiając wszystkie te zagadnienia skoncentrowałam uwagę na postępowaniu dydaktycznym sprzyjającym stopniowemu i coraz jaśniejszemu uświadamianiu sobie przez ucznia sensu matematycznej dedukcji. Jest to oczywiście tylko jedna strona problemu wprowadzenia ucznia w metodę matematyczną. Jeżeli bowiem doprowadziliśmy nawet do tej świadomości metodologicznej, to pozostanie ona tylko jałowa i mało wartościowa dla rozwoju myślenia ucznia, jeżeli nie znajdzie pełnego zastosowania w rozwiązywaniu problemów. Sprawą tą zajmiemy się w drugim cyklu wykładów, poświęconym metodom i środkom nauczania matematyki, w związku z metodą nauczania problemowego.

Prace cytowane

[1] P. S. Aleksandrow, *O pewnych przejawach współpracy polskiej i radzieckiej szkoły matematycznej w dziedzinie topologii i teorii mnogości*, Wiadom. Mat. 6 (1963), str. 175-180.

[2] G. Bouligand, *Cheminements intuitifs vers quelques organes essentiels de la mathématique*, artykuł w książce zbiorowej *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud 1948.

[3] N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, artykuł w książce zbiorowej *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud 1948.

[4] — *Elèments d'histoire des mathématiques*, Paryż 1960.

[5] J. S. Bruner, *Proces kształcenia*, Omega, Warszawa 1960.

[6] L. Brunschwieg, *Les ètapes de la philosophie mathématique*, Paryż 1947.

[7] N. N. Gniedenko, *Perspektiven der Mathematischen Ausbildung*, rozdz. w pracy zbiorowej *Probleme des Mathematikunterrichts*, Berlin 1965.

[8] В. Д. Гончаров, *Математика как учебный предмет*, Известя Академии Педагогических Наук, 92(1958).

[9] P. Greco, J. B. Grize, S. Papert et J. Piaget, *Problèmes de la construction du nombre*, Paryż 1960.

[10] J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, Omega, Warszawa 1964.

[11] M. Krasuska, *Wprowadzenie uczniów ostatniej klasy liceum w metodę aksjomatyczną* (praca magisterska nie publikowana).

[12] Z. Krygowska, *O pojęciach pierwotnych w kursie systematyczno-dedukcyjnym geometrii w szkole*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie 7 (1958).

[13] — *Podstawowe własności płaszczyzny*, Warszawa 1965.

[14] А. А. Ляпунов, *О фундаменте и стыле современной математики*, Мат. Просвещение 5 (1960).

[15] *Le raisonnement en mathématiques et en sciences experimentales*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paryż 1958.

[16] *Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des Sciences Mathématiques*, Zurich 1941.

[17] G. Papy, *Mathématique Moderne*, (podręcznik) I, II, Bruksela (1963, 1965).

[18] H. Poincaré, *Nauka i metoda*, Warszawa 1911.

[19] *Probleme des Mathematikunterrichts* (praca zbiorowa), Berlin 1965.

[20] W. Servais, *Axiomatisation et géométrie élémentaire*, Mathematica et Paedagogia 29 (1966).

[21] H. G. Steiner, *Mathematisierung und Axiomatisierung einer politischen Struktur*, Der Mathematikuniterricht 12/3, Stuttgart.

[22] B. L. van der Waerden, *Pomysł i rozumowanie w matematyce*, Wiadom. Mat. 9 (1966), str. 55-82.