ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE X (1967)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1, Skrytka Pocztowa 137. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

151*. Znaleźć granicę ciągu liczb

$$\prod_{k=1}^{n^2} \cos \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{n}\varphi.$$

R. Krasnodębski (Wrocław)

152. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ będzie dowolnym ciągiem zero-jedynkowym. Oznaczmy przez α-ind$X$ *α-wymiar* przestrzeni topologicznej X, który określamy (1) w następujący sposób:

1° α-ind$X = -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest puste,

2° α-ind$X \leqslant n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu przestrzeni X w przypadku $\alpha_1 = 0$ lub dla każdego podzbioru domkniętego przestrzeni X w przypadku $\alpha_1 = 1$, istnieje dowolnie małe jego otoczenie U takie, że

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots)\text{-ind}\,\mathrm{Fr}(U) \leqslant n-1.$$

Łatwo zauważyć, że $(0, 0, \ldots)$-wymiar jest identyczny z tzw. małym wymiarem indukcyjnym Mengera-Urysohna, a $(1, 1, \ldots)$-wymiar jest identyczny z tzw. dużym wymiarem indukcyjnym Čecha(2).

Wykazać, że jeśli $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ są ciągami zero-jedynkowymi takimi, że $\alpha_i \leqslant \beta_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$, to każda T_1-przestrzeń X spełnia nierówność

$$\alpha\text{-ind}\,X \leqslant \beta\text{-ind}\,X.$$

R. Duda (Wrocław)

---

(1) R. Duda, *On notions of dimension*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Math. Astr. Phys. 13 (1965), str. 777-780.

(2) J.-I. Nagata, *Modern dimension theory*, Amsterdam 1965.

153. Niech $\operatorname{ind} X$ będzie małym wymiarem indukcyjnym Mengera-Urysohna, a $\operatorname{Ind} X$ dużym wymiarem indukcyjnym Čecha przestrzeni X([3]). Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ skonstruować w zbiorze $(n+1)$-punktowym $X_n = \{p_0, \ldots, p_n\}$ topologię taką, że $\operatorname{ind}_{p_i} X_n = i$ dla $i = 0, \ldots, n$ oraz $\operatorname{Ind} X_n = 0$.

R. Duda (Wrocław)

154. Niech $\dim X$ oznacza wymiar pokryciowy przestrzeni X ([2]). Dowieść, że dla każdego podzbioru A dowolnej (niekoniecznie całkowicie regularnej) przestrzeni X istnieje podzbiór otwarty G przestrzeni X taki, że $A \subset G$ oraz $\dim A \leqslant \dim G$.

W. Holsztyński (Warszawa)

155. Załóżmy, że każdy zbiór domknięty rozcinający przestrzeń X ma składową niejednopunktową. Dowieść, że dla dowolnego odwzorowania ciągłego $f\colon X \to Y$ przestrzeni X w przestrzeń zwartą Y, która jest 1-wymiarowa w sensie pokryciowym, istnieje punkt $y \in Y$ taki, że przeciwobraz $f^{-1}(y)$ ma składową niejednopunktową.

W. Holsztyński (Warszawa)

156. Dowieść, że przestrzeń regularna, której każdy podzbiór domknięty ma przeliczalną bazę otoczeń, jest normalna.

W. Holsztyński (Warszawa)

157. W przestrzeni Hilberta dane są zbiory domknięte $A_1, \ldots, A_k$, których suma jest wypukła. Ponadto każdy zbiór A_i zawiera zbiór wypukły B_i $(i = 1, \ldots, k)$ taki, że każde $k-1$ spośród zbiorów $B_1, \ldots, B_k$ ma punkt wspólny. Dowieść, że zbiory $A_1, \ldots, A_k$ mają punkt wspólny.

W. Holsztyński (Warszawa)

158. Niech rodzina $\boldsymbol{C}$ podzbiorów zbioru X, zwanych dalej *wypukłymi*, spełnia aksjomaty:

$$1^\circ\ (\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{C}) \Rightarrow \Big(\bigcap_{P \in \boldsymbol{P}} P \in \boldsymbol{C}\Big),$$

$$2^\circ\ (A \subset X) \Rightarrow \Big\{\Big[\bigwedge_{a,b \in A} \bigvee_{U \in \boldsymbol{C}} (a, b \in U) \wedge (U \subset A)\Big] \Rightarrow (A \in \boldsymbol{C})\Big\},$$

$$3^\circ\ [(x \in X) \wedge (A \in \boldsymbol{C})] \Rightarrow [S_x(A) \in \boldsymbol{C}],$$

gdzie

$$S_x(A) = \Big\{y \in X\colon \bigwedge_{U \in \boldsymbol{C}} [(x, y \in U) \Rightarrow (A \cap U \neq \emptyset)]\Big\}$$

([3]) Zob. zadanie 152.

jest cieniem zbioru A z punktu x. Wykazać, że powyższa teoria jest elementarna, tzn. istnieje równoważna teoria, w aksjomatyce w której nie występuje pojęcie zbioru. Oczywiście przestrzeń liniowa ze zbiorami wypukłymi stanowi model tej teorii.

W. Holsztyński (Warszawa)

159. Nazwijmy *półprzestrzenią* przestrzeni $(X, \boldsymbol{C})$ ([4]) podzbiór właściwy zbioru X, wypukły (tj. należący do $\boldsymbol{C}$), którego dopełnienie jest wypukłe. Dowieść, że dowolne rozłączne niepuste podzbiory wypukłe A i B można rozdzielić półprzestrzeniami, czyli istnieją dwie półprzestrzenie rozłączne, zawierające A i B, odpowiednio.

W. Holsztyński (Warszawa)

160. Podać przykład półprzestrzeni ([5]) gęstej w przestrzeni unormowanej (niekoniecznie zupełnej), nie posługując się aksjomatem wyboru.

W. Holsztyński (Warszawa)

161. Dowieść, że w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej istnieje dokładnie $2n$ półprzestrzeni ([5]) nieizometrycznych.

W. Holsztyński (Warszawa)

162*. Element a struktury dystrybutywnej L, mającej 0 i 1, nazywamy *normalnym*, jeśli a spełnia warunek

$$\bigwedge_{x \in L} \{(a \cap x = 0) \Rightarrow \bigvee_{b,y \in L} [(a \cap b = x \cap y = 0) \wedge (b \cup y = 1)]\}.$$

Dowieść, że elementy normalne tworzą podstrukturę. Czy ta podstruktura, zawierająca 0 i 1, musi być normalna?

W. Holsztyński (Warszawa)

163. Niech L będzie strukturą dystrybutywną mającą 0 i 1, niech $x_0 \in L$ oraz niech $x_1, \ldots, x_n$ będą elementami normalnymi ([6]) struktury L takimi, że $x_0 \cap x_1 \cap \ldots \cap x_n = 0$. Dowieść, że istnieją elementy $y_0, y_1, \ldots, y_n$ struktury L spełniające warunki $x_i \cap y_i = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$ oraz $y_0 \cup y_1 \cup \ldots \cup y_n = 1$.

W. Holsztyński (Warszawa)

([4]) Zob. zadanie 158.
([5]) Zob. zadania 158 i 159.
([6]) Zob. zadanie 162.

164. W zbiorze L wszystkich takich trójek (a_1, a_2, a_3) liczb rzeczywistych, że co najwyżej jedna z liczb a_1, a_2, a_3 jest większa od najmniejszej z nich, relację $\leqslant$ określamy wzorem

$$[(a_1, a_2, a_3) \leqslant (b_1, b_2, b_3)] \Leftrightarrow \left(\bigwedge_{i=1,2,3} a_i \leqslant b_i\right).$$

Dowieść, że L jest strukturą dedekindowską, ale nie dystrybutywną.

W. Holsztyński (Warszawa)

165. Dwaj gracze wybierają kolejno po jednym, nie wybranym wcześniej, elemencie z sumy pewnej dowolnej rodziny zbiorów skończonych. Wygrywa ten, który pierwszy wyczerpie cały zbiór z danej rodziny (po skończonej liczbie ruchów).

Dowieść, że pierwszy gracz posiada zwycięską strategię lub przy dowolnym pierwszym wyborze może uzyskać remis, a więc grając poprawnie nigdy nie przegra.

W. Holsztyński (Warszawa)

166. Dany jest skończony zbiór łuków okręgu o promieniu 1, z których każde dwa mają punkt wspólny i suma żadnych dwóch nie zawiera łuku domkniętego o długości $\frac{1}{3}4\pi$. Dowieść, że wszystkie te łuki mają punkt wspólny(7).

W. Holsztyński (Warszawa)

167. Scharakteryzować wszystkie krzywe, wewnątrz których może obracać się n-kąt foremny(8).

W. Holsztyński i *L. Niemand* (Warszawa)

168. Dowieść, że funkcja f ciągła rzeczywista zmiennej rzeczywistej, liniowa na każdym ze skończonej liczby przedziałów, dających w sumie całą prostą, ma dokładnie jedno przedstawienie postaci

$$f(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{k} c_i|x - d_i|,$$

gdzie $c_i \neq 0$ oraz $d_i \neq d_j$ dla wszystkich $i \neq j$.

W. Holsztyński (Warszawa)

---

(7) Jest to nieco ogólniejsza wersja twierdzenia 18 z paragrafu 4 książki: M. Debrunner und H. Hadwiger, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*, Genève 1960.

(8) Krzywe takie są rozpatrywane w pracy: B. Kopociński, *O kształcie komory silników rotacyjnych*, Wiadom. Mat. 4 (1961), str. 283-288.

169. Udowodnić, że jeśli $d_1, d_2, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym liczb dodatnich, to dla każdego ciągu podwójnego liczb rzeczywistych $b(i,j)$ $(i,j = 1,2,\ldots)$, ograniczonego z góry i z dołu, istnieje ciąg nieskończony wskaźników $i_1 < i_2 < \ldots$ oraz liczba rzeczywista c taka, że

$$|b(i_m, i_{m+n}) - c| < d_m$$

dla $m, n = 1, 2, \ldots$

W. Holsztyński i *A. Lelek* (Warszawa)

170. Zbudować przestrzeń Hausdorffa zwartą, spełniającą I aksjomat przeliczalności oraz zawierającą zarówno podzbiór przeliczalny gęsty, jak podzbiór nieprzeliczalny dyskretny.

A. Lelek (Warszawa)

Rozwiązania zadań

61. *Funkcje ciągłe rzeczywiste zmiennej rzeczywistej, kawałkami liniowe, tworzą przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że ta przestrzeń jest nieprzeliczalnie wymiarowa, tj. każdy jej podzbiór przeliczalny zawiera się w pewnej właściwej podprzestrzeni liniowej.*

Ju. M. Smirnow (Moskwa)

Niech funkcje $f_1, f_2, \ldots$ będą kawałkami liniowe. Zbiór G_i punktów x takich, że funkcja f_i jest liniowa w pewnym otoczeniu punktu x, jest otwarty i gęsty. Zatem istnieje punkt $x_0 \in G_1 \cap G_2 \cap \ldots$ Każda kombinacja liniowa skończonego układu funkcji f_i jest funkcją liniową w jakimś otoczeniu punktu x_0. Stąd wynika, że np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant x_0, \\ x - x_0 & \text{dla} \quad x \geqslant x_0, \end{cases}$$

nie należy do podprzestrzeni generowanej przez $\{f_1, f_2, \ldots\}$.

A. Prószyński (Puck)

66. *Dowieść, że jeśli wszystkie 2^n wierzchołków kostki n-wymiarowej zostaną pomalowane dwoma kolorami: 2^{n-1} na czerwono i 2^{n-1} na niebiesko, to liczba krawędzi czerwono-niebieskich będzie co najmniej 2^{n-1}.*

A. N. Kołmogorow (Moskwa)

Przez indukcję względem wymiaru n udowodnimy twierdzenie ogólniejsze, a mianowicie że jeśli m wierzchołków kostki I^n $(0 \leqslant m \leqslant 2^{n-1})$ pomalowano na czerwono, a pozostałe wierzchołki na niebiesko, to I^n ma co najmniej m krawędzi czerwono-niebieskich. Dla wymiaru 1 twierdzenie jest oczywiste. Przyjmijmy, że jest ono prawdziwe dla wymiaru $n-1$.

Niech J i K będą przeciwległymi ścianami $(n-1)$-wymiarowymi kostki I^n, zawierającymi dokładnie j i k wierzchołków czerwonych, odpowiednio. Mamy $j + k = m \leqslant 2^{n-1}$ i wobec symetrii możemy przyjąć dodatkowo, że $j \leqslant k$. Zatem zachodzi

$$(1)\ j \leqslant k \leqslant 2^{n-2} \quad \text{lub} \quad (2)\ j \leqslant 2^{n-2} \leqslant k.$$

W przypadku (1) z założenia indukcyjnego wynika, że kostka J ma co najmniej j, a kostka K co najmniej k krawędzi czerwono-niebieskich. Kostka I^n ma więc co najmniej $j+k = m$ krawędzi czerwono-niebieskich. W przypadku (2) kostka K zawiera $2^{n-1}-k \leqslant 2^{n-2}$ wierzchołków niebieskich. Stąd i z założenia indukcyjnego wnioskujemy, iż kostka J ma co najmniej j, a kostka K co najmniej $2^{n-1}-k$ krawędzi czerwono-niebieskich. W kostce I^n istnieje 2^{n-1} krawędzi łączących J i K. Wśród tych krawędzi jest co najwyżej j krawędzi czerwonych i co najwyżej $2^{n-1}-k$ krawędzi niebieskich. Jest więc wśród nich co najmniej

$$2^{n-1}-j-(2^{n-1}-k) = k-j$$

krawędzi czerwono-niebieskich. Kostka I^n ma zatem co najmniej

$$j+(2^{n-1}-k)+(k-j) = 2^{n-1} \geqslant m$$

krawędzi czerwono-niebieskich, co kończy dowód twierdzenia.

A. Prószyński (Puck)

82. *Niech A i B będą macierzami stopnia n i $C = AB-BA$. Wykazać, że jeśli $AC = CA$ lub $BC = CB$, to $C^n = 0$.*

E. A. Gorin (Moskwa)

Oznaczmy przez $\mathrm{Sp}\,A$ ślad (9) macierzy kwadratowej A.

LEMAT. *Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Tworzymy dwa ciągi macierzy przyjmując*

$$\begin{aligned}
&A_1 = A, && B_1 = A_1-p_1I, && \text{gdzie } p_1 = \mathrm{Sp}\,A_1,\\
&A_2 = B_1A, && B_2 = A_2-p_2I, && \text{gdzie } p_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sp}\,A_2,\\
&\dots\dots && && \\
&A_n = B_{n-1}A, && B_n = A_n-p_nI, && \text{gdzie } p_n = n^{-1}\mathrm{Sp}\,A_n.
\end{aligned}$$

Wówczas $B_n = 0$.

Dowód. Jak wiadomo, wielomian charakterystyczny macierzy A wyraża się wzorem

$$|A-\lambda I| = (-1)^n[\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}-\ldots+(-1)^nc_n],$$

gdzie c_k oznacza sumę minorów głównych stopnia k macierzy A. Wykażemy najpierw przez indukcję, że zachodzi wzór

$$p_k = (-1)^{k+1}c_k \tag{3}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Dla $k = 1$ wzór (3) jest prawdziwy, bo $p_1 = \mathrm{Sp}\,A = c_1$. Załóżmy, że (3) zachodzi dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$ $(m \leqslant n)$. Wtedy zgodnie z konstrukcją ciągów macierzy A_k i B_k mamy

$$\begin{aligned}
A_m &= A^m-p_1A^{m-1}-p_2A^{m-2}-\ldots-p_{m-1}A = \\
&= A^m-c_1A^{m-1}+c_2A^{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}c_{m-1}A,
\end{aligned}$$

skąd wobec liniowości funkcji Sp dostajemy

$$\mathrm{Sp}\,A_m = \mathrm{Sp}\,A^m-c_1\mathrm{Sp}\,A^{m-1}+c_2\mathrm{Sp}\,A^{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}c_{m-1}\mathrm{Sp}\,A. \tag{4}$$

---

(9) G. Birkhoff i S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, Warszawa 1963.

Niech $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = x_1^i + x_2^i + \ldots + x_n^i$ oraz niech τ_i będzie wielomianem symetrycznym podstawowym stopnia i. Oznaczając przez $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pierwiastki charakterystyczne macierzy A mamy

$$\operatorname{Sp} A^i = \sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad c_i = \tau_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

a zatem stosując do równości (4) wzór Newtona

$$\sigma_m - \tau_1\sigma_{m-1} + \tau_2\sigma_{m-2} - \ldots + (-1)^{m-1}\tau_{m-1}\sigma_1 + (-1)^m m\tau_m = 0,$$

otrzymujemy $\operatorname{Sp} A_m = -(-1)^m m c_m = (-1)^{m+1} m c_m$. Ponieważ jednak $\operatorname{Sp} A_m = m p_m$, więc wzór (3) zachodzi dla $k = m$. Na mocy (3) mamy

$$B_n = A_n - p_n I = A^n - c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} c_{n-1} A + (-1)^n c_n I$$

i z twierdzenia Cayleya-Hamiltona ([9]) wynika, że $B_n = 0$.

Wniosek. *Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n oraz $\operatorname{Sp} A^k = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, to $A^n = 0$.*

Wykażemy teraz tezę zadania. Oczywiście możemy się ograniczyć do rozpatrzenia przypadku, gdy zachodzi równość $AC = CA$. Zauważmy, że wynika z niej równość $AC^k = C^k A$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Na mocy wniosku z lematu, wystarczy dowieść, iż $\operatorname{Sp} C^k = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Otóż jest

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp} C^k &= \operatorname{Sp}[(AB - BA)C^{k-1}] = \operatorname{Sp}[(AB)C^{k-1}] - \operatorname{Sp}[(BA)C^{k-1}] = \\ &= \operatorname{Sp}[A(BC^{k-1})] - \operatorname{Sp}[B(AC^{k-1})] = \operatorname{Sp}[(BC^{k-1})A] - \operatorname{Sp}[(BC^{k-1})A] = 0.\end{aligned}$$

W. Guz (Toruń)

130. *Mamy na płaszczyźnie nieskończony, zbieżny ciąg punktów $p_1, p_2, \ldots$ oraz zbiór Z o mierze płaskiej dodatniej. Dowieść, że można zbiór Z przesunąć w położenie, w którym będzie on zawierał nieskończenie wiele spośród punktów $p_1, p_2, \ldots$*

C. Ryll-Nardzewski i *H. Steinhaus* (Wrocław)

Uogólniając zadanie, podamy dowód w przypadku k-wymiarowym. Dla zbiorów $A \subset R^k$, przez $|A|$ oznaczamy k-wymiarową miarę Lebesgue'a. Jeśli $x \in R^k$, to przez $A - x$ oznaczamy zbiór wszystkich punktów postaci $a - x$, gdzie $a \in A$.

Lemat. *Jeśli $A \subset R^k$ jest zbiorem mierzalnym, $|A| > 0$ oraz $p_1, p_2, \ldots$ jest ciągiem punktów przestrzeni R^k zbieżnym do zera, to $|A \cap (A - p_n)| > 0$ dla prawie wszystkich n.*

Dowód. Z twierdzenia Vitaliego ([10]) wynika, że istnieje kostka $K \subset R^k$ taka, że

$$2|A \cap K| > |K|. \tag{5}$$

Oznaczmy $B = A \cap K$. Gdyby teza lematu nie była prawdziwa, to mielibyśmy $|B \cap (B - p_n)| = 0$ dla nieskończenie wielu n, skąd

$$2|B| = |B \cup (B - p_n)| \leqslant |K \cup (K - p_n)|,$$

gdzie $|K \cup (K - p_n)|$ zmierza do $|K|$ przy $n \to \infty$. Jest to sprzeczne z nierównością (5) i lemat został udowodniony.

Niech teraz Z będzie podzbiorem mierzalnym przestrzeni R^k o mierze $|Z| > 0$ i niech $p_1, p_2, \ldots$ będzie ciągiem zbieżnym punktów przestrzeni R^k. Nie zmniejszając

([10]) R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, tom I, Warszawa 1958.

ogólności, możemy przyjąć, że zbiór Z jest zwarty i ciąg $p_1, p_2, \ldots$ jest zbieżny do zera. Określimy indukcyjnie ciąg zstępujący zbiorów zwartych $Z_0 \supset Z_1 \supset \ldots$ oraz ciąg rosnący wskaźników $n_1 < n_2 < \ldots$ takich, że

$$Z_i = Z_{i-1} \cap (Z_{i-1} - p_{n_i}), \qquad |Z_i| > 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots$ Niech mianowicie $Z_0 = Z$. Wskaźnik n_1 istnieje na mocy lematu; podobnie znajdujemy wskaźnik $n_i > n_{i-1}$, gdy dany jest zbiór Z_{i-1} miary dodatniej.

Ponieważ zbiory Z_i są zwarte i niepuste, przeto istnieje punkt $z \in Z_1 \cap Z_2 \cap \ldots$ oraz dostajemy

$$z \in Z_{i-1} - p_{n_i} \subset Z - p_{n_i},$$

a więc $p_{n_i} \in Z - z$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Wektor $-z$ realizuje żądane przesunięcie.

A. Birkholc (Warszawa)