W następnym rozdziale jest twierdzenie Wilsona oraz tak zwane małe twierdzenie Fermata.

Z kolei omawiane są własności liczb pierwszych postaci $4k+1$, następnie twierdzenie Eulera, że dla każdej liczby całkowej a pierwszej względem liczby naturalnej m zachodzi kongruencja

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

W rozdziale 32 wyprowadza się twierdzenie Lagrange'a o pierwiastkach kongruencji $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, gdzie $f(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

Rozdział 33 informuje o resztach i nieresztach kwadratowych.

Ostatni rozdział książki poświęcony jest zagadnieniu rozkładu liczb naturalnych na sumę czterech kwadratów; jest tu również wzmianka o twierdzeniu Waringa udowodnionym przez D. Hilberta, które elementarnie udowodnił J. W. Linnik.

Cel jaki postawił sobie autor pisząc tę książkę został w pełni osiągnięty. Jest to książka pisana w sposób niezwykle jasny a zarazem zwięzły. Może ona być czytana przez bardzo szerokie grono czytelników. Nawet bardziej zaawansowani uczniowie szkół średnich mogą studiować wiele rozdziałów tej książki. Każdy matematyk czytając ją znajdzie z pewnością wiele nowych dla siebie informacji z zakresu tej podstawowej dyscypliny matematycznej, jaką jest teoria liczb.

Włodzimierz Staś

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Andrzej Lelek, *Zbiory*, Biblioteczka Matematyczna tom 26, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1966, str. 259.

Prawie każda książka matematyczna zawiera przykłady. Można jednak powiedzieć, że istnieją trzy kategorie przykładów. Po pierwsze, przykłady — wnioski z definicji i twierdzeń. Po drugie, przykłady — konstrukcje obiektów użytecznych przy dalszym rozwijaniu teorii. Po trzecie, przykłady patologiczne demonstrujące zjawiska dziwne i pozornie sprzeczne z intuicją.

Każda książka popularna z matematyki powinna zawierać dużo przykładów. Zwykle jednak osiąga się właściwe wyważenie części merytorycznej z materiałem ilustrującym poprzez mnożenie przykładów należących do pierwszej kategorii. Jest to najłatwiejsze wyjście dla autora, ale nie najkorzystniejsze dla czytelnika.

Książka A. Lelka, pod nieco mylącym tytułem *Zbiory*, stanowi prawdziwy wyjątek w tej dziedzinie. Właściwie należałoby dodać podtytuł *Przykłady, konstrukcje, twierdzenia*. Przykłady bowiem zajmują znaczną część objętości tej znakomitej książeczki i to zwłaszcza przykłady dwu pozostałych kategorii, a więc najlepszego gatunku. Jak pisze autor w przedmowie: „Niniejsza publikacja była właśnie pomyślana jako książka raczej o przykładach zbiorów, niż o ich teorii. Przykłady te są oczywiście konkretnym ujęciem pewnych idei i same prowadzą do uogólnień, ale główny nacisk został położony w tekście na opis konstrukcji różnych zbiorów, podczas gdy partie bardziej abstrakcyjne, twierdzenia i dowody, zostały w większości ledwie naszkicowane lub pominięte". Odnosi się nawet wrażenie, że autor celowo dobierał definicje i twierdzenia tak, by móc opisywać co ciekawsze konstrukcje. Sam tytuł *Zbiory* niezbyt dokładnie oddaje treść książki, która jest w większej części poświęcona topologii. Wydaje się, że chodzi tu raczej o *Zbiory i przestrzenie*.

Piętnaście rozdziałów książki można pogrupować w trzy logiczne części. Część pierwsza, składająca się z czterech rozdziałów, zawiera elementy teorii mnogości, a mianowicie algebrę zbiorów, teorię mocy i teorię zbiorów uporządkowanych. Poza

klasycznym materiałem podstawowym dla dalszej lektury autor zmieścił tu także interesujące wzmianki o aksjomatycznych podstawach teorii mnogości, z ostatnimi wynikami dotyczącymi hipotezy continuum włącznie.

Część druga, zawierająca rozdziały od piątego do dziesiątego, jest poświęcona topologii przestrzeni metrycznych. Wprowadzone są tu podstawowe pojęcia, jak otwartość i domkniętość zbioru, funkcja ciągła i homeomorfizm, a następnie badane kolejno: przestrzenie zwarte, spójne, zupełne, continua, continua lokalnie spójne, krzywe, krzywe lokalnie spójne i dendryty. Przy każdej klasie przestrzeni, poza definicją i najważniejszymi twierdzeniami, znajduje się bogaty materiał przykładowy, włączając wyspecjalizowane niekiedy przykłady patologiczne. I tak podane są konstrukcje zbioru Cantora i przestrzeni pochodnych, zbioru dwuspójnego Knastera-Kuratowskiego, continuum nierozkładalnego Brouwera, pseudo-łuku Knastera, dywanu Sierpińskiego, krzywej Peany, wspólnego brzegu trzech obszarów płaskich, dziedzicznego przekroju Whyburna, dendrytu uniwersalnego i sfery rogatej.

Część trzecia, składająca się z ostatnich pięciu rozdziałów, zawiera elementy topologii kombinatorycznej poprzedzone niezbędnymi wiadomościami z teorii zbiorów wypukłych (przy rozpatrywaniu których znalazło się jeszcze miejsce na twierdzenie Helly'ego) i sympleksów. Wprowadzone jest tu pojęcie retrakcji i przeprowadzony dowód twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Równolegle prowadzi się rozważania dotyczące teorii wymiaru z podstawowym twierdzeniem o wymiarze przestrzeni euklidesowych włącznie. Następnie definiuje się pojęcia kompleksu i wielościanu oraz wprowadza elementy teorii homologii. Wreszcie, autor przechodzi do teorii rozmaitości ze szczególnym uwzględnieniem powierzchni, na marginesie której omawia zagadnienia triangulowalności, czterech barw i problemy zanurzalności.

Pożyteczną nowość w literaturze popularno-matematycznej stanowi systematyczne podawanie po każdym rozdziale krótkiej noty zawierającej komentarze rzeczowe i historyczne oraz dosyć wyczerpującą bibliografię. Wreszcie, aby nie naruszać zamkniętego charakteru książki, zawiera ona słownik (a właściwie zbiór definicji) wszystkich używanych pojęć, które nie zostały wyjaśnione w tekście, a wykraczają poza szkolny program matematyki.

Zbiory są dostępne dla bardzo szerokiego kręgu czytelników, poczynając od uczniów starszych klas licealnych i ich nauczycieli, poprzez studentów wydziałów matematycznych, na pracownikach naukowych kończąc. Co więcej, każda z tych grup może odnieść z jej lektury znaczny pożytek. Uczniowie i nauczyciele — przy wprowadzaniu w życie nowego programu oraz w pracy kół naukowych, studenci — jako książkę uzupełniającą przy kursie teorii mnogości i topologii, asystenci — przy przygotowywaniu ćwiczeń z tego przedmiotu; pewne fragmenty nadają się również do wykorzystania w pracy proseminariów i studenckich kół naukowych. Wreszcie matematyk nie topolog przeczyta ją z zainteresowaniem jako fascynującą literaturę poszerzającą horyzonty i wzbogacającą wyobraźnię.

Książka jest napisana bardzo jasnym i precyzyjnym językiem. Rzeczy udowodnione są wyraźnie oddzielone od tych, które można udowodnić, a te znów od tych, które czytelnik może spróbować udowodnić. Pomysłowo i starannie zaplanowane rysunki istotnie ułatwiają czytanie tekstu.

Na marginesie doskonałej książki A. Lelka nasuwa się kilka uwag ogólniejszej natury. Wiemy, że książka popularno-naukowa powinna być i popularna i naukowa, a więc i autor powinien być zarówno dobrym popularyzatorem jak i naukowcem. Wydawane w tej samej serii książki niejednokrotnie wykazywały złudność iluzji, że drugi czynnik tej kompozycji jest mniej ważny niż pierwszy. Ale dopiero książka Lelka daje odpowiedź na pytanie dlaczego tak się dzieje. Tylko matematyk z prawdziwego zdarzenia widzi subtelną różnicę między formalizacją a precyzją i w tej szczelinie

przeprowadza skomplikowane rozumowania. Krok w jedną stronę grozi napisaniem książki sformalizowanej, a więc nie popularnej, w drugą stronę — książki nieprecyzyjnej, a więc nie naukowej. Dokładna lektura *Zbiorów* pokazuje, w jak wąskim marginesie musiał się niekiedy poruszać autor i jak po mistrzowsku z tego wybrnął. Książka ta jest przekonującym dowodem, że precyzja to coś istotnie słabszego niż formalizacja, i że w wytworzonym przedziale można zmieścić doskonałe książki i to „z przykładami".

Czy ten dowód wystarczy dla wyjaśnienia sytuacji w naszej rodzimej literaturze popularno-matematycznej? Zagadnienie to należy już do zakresu polityki wydawniczej. Tu warto tylko dodać, że *Zbiory* Lelka wyraźnie nie pasują do „Biblioteczki Matematycznej" właśnie ze względu na swój poziom przewyższający znacznie przeciętny dla serii; poziom nie w sensie treści, ale jej przedstawienia. Wybór wydawcy i serii jest dowodem pewnej odwagi autora, który ryzykuje, że książka może nie dotrzeć do wszystkich czytelników, którzy mogliby z niej skorzystać. Dlatego sygnalizujemy: w żółto-szarych okładkach „Biblioteczki Matematycznej" ukazała się naprawdę wartościowa książka.

Karol Sieklucki

Stefan Zubrzycki, *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Biblioteka Matematyczna tom 27, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966, str. 326.

Książka jest podręcznikiem rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej przeznaczonym głównie dla studentów matematyki. We wstępie Autor pisze o jej koncepcji w sposób następujący: „Celem niniejszej książki jest przedstawienie obecnego stanu rzeczy w zakresie rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Chodzi w niej przede wszystkim o wprowadzenie czytelnika do teorii". Najogólniej rzecz biorąc, tak postawione zadanie Autor spełnił; jedyne poważne zastrzeżenia można by mieć co do tego, czy użyte tu słowo „obecny" odpowiada treści książki (w odniesieniu do rachunku prawdopodobieństwa): z ośmiu rozdziałów książki siedem pierwszych poświęconych jest wprawdzie rachunkowi prawdopodobieństwa, prawie wszystkie przedstawione tam wyniki zostały uzyskane jednakże przed II wojną światową. I tak w rozdziałach I, II i III autor omawia podstawowe konstrukcje dotyczące miarowo ujętych podstaw teorii prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwa warunkowego i niezależności stochastycznej. W rozdziale IV dyskutowane są klasyczne twierdzenia graniczne, w rozdziale V zmienne losowe i wartości oczekiwane, w rozdziale VI prawa wielkich liczb, a w rozdziale VII centralne twierdzenie graniczne.

Trudno mieć zastrzeżenia co do wyboru materiału; obejmuje on wszystko to, co powinien wiedzieć o rachunku prawdopodobieństwa absolwent matematyki nie mający zamiaru specjalizować się w tej dziedzinie. Nazwanie jednak tego „obecnym stanem rzeczy" wydaje się pewną przesadą. Obecny stan rzeczy w rachunku prawdopodobieństwa to przede wszystkim próby osłabienia założenia niezależności — a więc procesy stochastyczne i twierdzenia ergodyczne; następnie analiza „jakościowych zmiennych losowych" — a więc teoria informacji, a w „klasycznych" dziedzinach (jeżeli, dość dowolnie, określić „klasyczny" rachunek prawdopodobieństwa jako tę jego część, która zajmuje się konsekwencjami założenia niezależności) — obecny stan rzeczy to przede wszystkim teoria fluktuacji ciągów zmiennych losowych (*stopping rules* i związki z teorią decyzji), wzrost zainteresowania metodami kombinatorycznymi (związki z teorią potencjału) oraz próby nadania probabilistycznej