ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

wmptm 1897

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O liczbach $[1, 2, \ldots, n]$

Przez $[a, b, \ldots, k]$ oznaczamy, jak wiadomo, najmniejszą wspólną wielokrotność liczb całkowitych $a, b, \ldots, k$. Celem niniejszego artykułu jest dowód następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE. *W ciągu nieskończonym* $[1, 2, \ldots, n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *istnieją dowolnie długie ciągi równych kolejnych wyrazów.*

LEMAT. *Dla naturalnych* n *nierówność* $[1, 2, \ldots, n] < [1, 2, \ldots, n, n+1]$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $n+1$ *jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.*

Dowód lematu. Przypuśćmy, że $n+1$ nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym. Ponieważ $n+1 > 1$, więc $n+1$ ma wówczas co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze: p i $q > p$. Niech p^α będzie najwyższą potęgą liczby pierwszej p, dzielącą $n+1$. Będzie więc $n+1 = p^\alpha t$, gdzie, wobec $q \mid n+1$ oraz $(p^\alpha, q) = 1$, jest $q \mid t$, zatem $t > 1$ i $p^\alpha < n+1$, jak również $t < n+1$. Zatem $p^\alpha \leqslant n$ i $t \leqslant n$, i przeto $p^\alpha \mid [1, 2, \ldots, n]$ oraz $t \mid [1, 2, \ldots, n]$, skąd, wobec $(p^\alpha, t) = 1$, $n+1 = p^\alpha t \mid [1, 2, \ldots, n]$, zatem $[1, 2, \ldots, n] = [1, 2, \ldots, n+1]$. Warunek lematu jest więc konieczny.

Przypuśćmy teraz, że warunek lematu jest spełniony, a więc że $n+1 = p^\alpha$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a α — liczbą naturalną. Żadna z liczb naturalnych $\leqslant n$, jako mniejsza od p^α nie jest więc podzielna przez p^α, skąd wynika, że $n+1 = p^\alpha \nmid [1, 2, \ldots, n]$, zatem $[1, 2, \ldots, n] < [1, 2, \ldots, n+1]$. Warunek lematu jest więc dostateczny. Lemat został więc udowodniony.

Dowód twierdzenia (według A. Schinzla). Wobec lematu, aby dowieść naszego twierdzenia, wystarczy dowieść, że istnieją dowolnie długie ciągi kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.

Niech p_i oznacza i-tą z kolei liczbę pierwszą i niech m będzie dowolną daną liczbą naturalną. W myśl tzw. twierdzenia chińskiego o resztach, istnieje liczba naturalna $n > p_m$, taka iż

$$n \equiv p_j - j \pmod{p_j^2} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Wykażemy, że żadna z liczb $n+1, n+2, \ldots, n+m$ nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym. Przypuśćmy dla dowodu, że przy

pewnym j z ciągu $1, 2, \ldots, m$, mamy $n+j = p^\alpha$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a α — liczbą naturalną. Wobec (1) mamy $n+j = p_j+kp_j^2$, gdzie wobec $n+j > n > p_m \geqslant p_j$, k jest liczbą naturalną. Byłoby więc $p^\alpha = p_j+kp_j^2$, zatem $p_j \mid p^\alpha$, skąd $p = p_j$ i przeto $p_j^\alpha = p_j+kp_j^2$, co wobec $k \geqslant 1$ jest niemożliwe. Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

Jak łatwo sprawdzić, najmniejszą liczbą naturalną n, dla której $[1, 2, \ldots, n] = [1, 2, \ldots, n+9]$ jest $n = 139$. Co do liczb $[1, 2, \ldots, n]$, to nasuwają się tu następujące pytania.

Czy wśród liczb $a_n = [1, 2, \ldots, n]+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych i czy wśród tych liczb istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych? Na żadne z tych pytań nie potrafię dać odpowiedzi, chociaż wiemy, że co najmniej na jedno z tych pytań odpowiedź musi być twierdząca.

Najmniejszą liczbą naturalną n, dla której liczba a_n jest liczbą złożoną, jest $n = 8$. Mamy bowiem $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$, $a_5 = a_6 = 61$, $a_7 = 421$ (co jest liczbą pierwszą), a $a_8 = 841 = 29^2$. Liczby $a_9 = a_{10} = 2521$ są pierwsze, a liczby $a_{11} = a_{12} = 27721 = 19 \cdot 1459$ są złożone.

Analogiczne pytanie, na które też nie potrafię dać odpowiedzi, można postawić w stosunku do liczb $b_n = [1, 2, \ldots, n]-1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Mamy tu $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 5$, $b_4 = 11$, $b_5 = b_6 = 59$, $b_7 = 419$, $b_8 = 839$, $b_9 = b_{10} = 2519 = 11 \cdot 229$. Najmniejszą liczbą złożoną b_n jest więc $b_9 = b_{10}$.