ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

wmptm 1897

R. BARTŁOMIEJCZYK (Gliwice)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O pewnych własnościach liczby θ występującej w reszcie Lagrange'a wzoru Taylora

W pracy niniejszej zajmuję się związkami między własnościami liczby θ w reszcie Lagrange'a wzoru Taylora

$$(1)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+h\theta_n)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

a własnościami funkcji $f(x)$. Podaję cztery twierdzenia T1-T4. Zagadnieniami tymi zajmowano się już w literaturze (Rothe [1], Łojasiewicz i Gołąb [2]). W poprzednio opublikowanej nocie [3] udowodniłem szczególne przypadki tych twierdzeń dla $n=0$. W zbiorach zadań(1) można znaleźć szczególny przypadek następujący: Jeśli $f^{(n+2)}(x_0)$ istnieje i jest $\neq 0$, to $\theta_n \to \frac{1}{n+2}$, gdy $h \to 0$.

W dalszym ciągu zakładamy, że

$$(2)\qquad \begin{gathered} f(x)\in C^{n+3},\quad f^{(n+2)}(x)\neq 0 \quad \text{dla} \quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\\ \alpha\leqslant a\leqslant\beta,\quad \alpha\leqslant a+h\leqslant\beta. \end{gathered}$$

Z założenia tego wynika, że funkcja $f^{(n+2)}(x)$ jest w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$ stałego znaku, a więc funkcja $f^{(n+1)}(x)$ jest w tym przedziale odwracalna.

Zauważmy, że na ogół liczba θ_n we wzorze (1) nie jest jednoznacznie określona. Przy założeniu (2) ze wspomnianego istnienia funkcji odwrotnej wynika ze wzoru (1) jednoznaczna określoność liczby θ_n, a więc $\theta_n=\theta_n(a,h)$.

Funkcja $\theta_n(a,h)$ jest ciągła ze względu na obie zmienne razem w obszarze D: $\alpha\leqslant a\leqslant\beta$, $0<h\leqslant\beta-a$. Posiada tam również pochodne cząstkowe rzędu pierwszego wobec istnienia pochodnej funkcji odwrotnej do $f^{(n+1)}(x)$.

W pracy zostaną udowodnione następujące twierdzenia:

---

(1) Na przykład W. Nikliborc i H. Steinhaus, *Ćwiczenia z rachunku różnicowego*, str. 72 i 212-213 lub G. N. Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Warszawa 1963, str. 103.

T1. *Funkcja* $\theta_n(a, h)$ *ma następujące własności:*

a) $\lim\limits_{h\to 0} \theta_n(a,h) = \dfrac{1}{n+2}$,

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\partial \theta_n(a, h)}{\partial h} = \dfrac{(n+1)f^{(n+3)}(a)}{2(n+2)^2(n+3)f^{(n+2)}(a)}$,

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\partial \theta_n(a, h)}{\partial a} = 0$.

T2. *Funkcjom* $f(x)$ *i* $g(x)$ *spełniającym założenia* (2) *odpowiada ta sama funkcja* $\theta_n(a, h)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = cg(x)+W_{n+1}(x), \tag{3}$$

gdzie $c \neq 0$, *a* $W_{n+1}(x)$ *jest wielomianem stopnia* $n+1$.

T3. *Funkcja* $\theta_n(a, h)$ *jest funkcją jednej zmiennej* h *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = cx^{n+2}+W_{n+1}(x) \tag{4}$$

lub

$$f(x) = cb^x+W_{n+1}(x), \tag{5}$$

gdzie $c \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ *są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, a* $W_{n+1}(x)$ *jest wielomianem stopnia* $n+1$.

T4. *Funkcja* $\theta_n(a, h)$ *jest funkcją jednorodną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = C_1x^k \ln|x|+W_{n+1}(x) \tag{6}$$

lub

$$f(x) = C_1x^d+W_{n+1}(x), \tag{7}$$

gdzie $C_1 \neq 0$, $d \neq 0, 1, \ldots, n+1$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, *a* $W_{n+1}(x)$ *jest wielomianem stopnia* $n+1$.

Dowód twierdzenia T1. Z twierdzenia Taylora wynika, że

$$f(a+h) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(a+h\theta_{n+1})}{(n+2)!}h^{n+2}. \tag{8}$$

Odejmując stronami wzory (1) i (8) otrzymujemy

$$f^{(n+1)}(a+h\theta_n)-f^{(n+1)}(a) = \frac{f^{(n+2)}(a+h\theta_{n+1})}{n+2}h. \tag{9}$$

Z ostatniej równości, po podzieleniu przez h i przejściu do granicy przy $h \to 0$, wynika punkt a) tezy T1. Różniczkując wzór (1) ze względu na a mamy

$$f'(a+h) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}h^n + \\ + \frac{f^{(n+2)}(a+h\theta_n)h^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+h\frac{\partial\theta_n}{\partial a}\right).$$

Stąd po zastosowaniu wzoru Taylora otrzymujemy

$$f^{(n+2)}(a+h\theta_n') = f^{(n+2)}(a+h\theta_n)\left(1+h\frac{\partial\theta_n}{\partial a}\right).$$

Z ostatniej równości, po przejściu do granicy przy $h \to 0$, wnioskujemy, że $\lim_{h\to 0} h\frac{\partial\theta_n}{\partial a} = 0$. Podobnie można wykazać, że $\lim_{h\to 0} h\frac{\partial\theta_n}{\partial h} = 0$.

Po zróżniczkowaniu wzoru (9) ze względu na h mamy

$$h\frac{\partial\theta_n}{\partial h}f^{(n+2)}(a+h\theta_n) + f^{(n+2)}(a+h\theta_n)\theta_n - \frac{1}{n+2}f^{(n+2)}(a+h\theta_{n+1}) = \\ = \frac{h}{n+2}\left(\theta_{n+1}+h\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial h}\right)f^{(n+3)}(a+h\theta_{n+1}).$$

Stąd, po podzieleniu przez h i przejściu do granicy przy $h \to 0$, otrzymujemy

$$f^{n+2}(a)\lim_{h\to 0}\frac{\partial\theta_n}{\partial h} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\theta_n f^{(n+2)}(a+h\theta_n) - \frac{1}{n+2}f^{(n+2)}(a+h\theta_{n+1})\right] = \\ = \frac{f^{(n+3)}(a)}{(n+2)(n+3)}.$$

Z ostatniej równości, po zastosowaniu reguły de L'Hospitala, wynika związek

$$2f^{(n+2)}(a)\lim_{h\to 0}\frac{\partial\theta_n}{\partial h} + \frac{f^{(n+3)}(a)}{(n+2)^2} = \frac{2f^{(n+3)}(a)}{(n+2)(n+3)},$$

z którego otrzymujemy punkt b) tezy T1.

Aby wykazać punkt c) tezy T1, różniczkujemy wzór (9) ze względu na a:

$$h\frac{\partial\theta_n}{\partial a}f^{(n+2)}(a+h\theta_n) + f^{(n+2)}(a+h\theta_n) - f^{(n+2)}(a) = \\ = \frac{h}{n+2}\left(1+h\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial a}\right)f^{(n+3)}(a+h\theta_{n+1}).$$

Dzieląc ostatni wzór przez h i przechodząc do granicy przy $h \to 0$ mamy

$$f^{(n+2)}(a)\lim_{h\to 0}\frac{\partial \theta_n}{\partial a} + \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n+2)}(a+h\theta_n)-f^{(n+2)}(a)}{h} = \frac{f^{(n+3)}(a)}{n+2}.$$

Stąd po zastosowaniu punktu a) wynika punkt c) tezy. Przyjmując

$$\theta_n(a, 0) = \frac{1}{n+2}, \qquad \frac{\partial \theta_n(a, 0)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_n(a, 0)}{\partial h} = \frac{(n+1)f^{(n+3)}(a)}{2(n+2)^2(n+3)f^{(n+2)}(a)}$$

określamy funkcję $\theta_n(a, h)$ i jej pierwsze pochodne cząstkowe dla $h = 0$.

Tak uzupełniona funkcja $\theta_n(a, h)$ jest ciągła ze względu na h i ma ciągłe pochodne cząstkowe dla $h = 0$.

Dowód twierdzenia T2. Wstawiając do wzoru (1) $f(x) = c\,g(x) + W_{n+1}(x)$, otrzymujemy

$$c\,g(a+h)+W_{n+1}(a+h) =$$

$$= c\left[g(a)+\frac{g'(a)}{1!}h + \ldots + \frac{g^{(n+1)}(a+h\theta_n)}{(n+1)!}h^{n+1}\right] +$$

$$+ W_{n+1}(a)+W'_{n+1}(a)\frac{h}{1!} + \ldots + W^{(n)}_{n+1}(a)\frac{h^n}{n!} + W^{(n+1)}_{n+1}(a+h\theta_n)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ponieważ $W^{(n+1)}_{n+1}(a) = \text{const}$, więc

$$W_{n+1}(a+h) = W_{n+1}(a)+W'_{n+1}(a)\frac{h}{1!} + \ldots + W^{(n+1)}_{n+1}(a+h\theta_n)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Stąd wynika, że

$$g(a+h) = g(a)+\frac{g'(a)}{1!}h + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(a+h\theta_n)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

A więc, jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ spełniają związek (3), to odpowiadająca im funkcja $\theta_n(a, h)$ jest ta sama. Odwrotnie, jeśli funkcjom $f(x)$ i $g(x)$ odpowiada ta sama funkcja $\theta_n(a, h)$, to na podstawie T1, b), mamy

$$\frac{(n+1)f^{(n+3)}(a)}{2(n+2)^2(n+3)f^{(n+2)}(a)} = \frac{(n+1)g^{(n+3)}(a)}{2(n+2)^2(n+3)g^{(n+2)}(a)}.$$

A więc

$$f^{(n+3)}(a)\,g^{(n+2)}(a) - g^{(n+3)}(a)\,f^{(n+2)}(a) = 0.$$

Stąd po podzieleniu przez $[g^{(n+2)}(a)]^2$ otrzymujemy

$$\frac{f^{(n+3)}(a)\,g^{(n+2)}(a) - g^{(n+3)}(a)\,f^{(n+2)}(a)}{[g^{(n+2)}(a)]^2} = \left[\frac{f^{(n+2)}(a)}{g^{(n+2)}(a)}\right]' = 0,$$

a więc

$$f^{(n+2)}(a) = c\, g^{(n+2)}(a).$$

Ostatnia równość jest równoważna wzorowi (3).

Dowód twierdzenia T3. Warunkiem koniecznym na to, by $\theta_n(a, h)$ była funkcją jednej zmiennej h jest, by

$$\frac{\partial \theta_n(a, 0)}{\partial h} = \text{const} = k'.$$

Stąd i z T1, b), wynika, że

$$\frac{(n+1)f^{(n+3)}(a)}{2(n+2)^2(n+3)f^{(n+2)}(a)} = \frac{n+1}{2(n+2)^2(n+3)}\, k.$$

A więc funkcja $f(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$f^{(n+3)}(x) - kf^{(n+2)}(x) = 0. \tag{10}$$

Rozwiązania równania (10) dane są wzorem (4), jeśli $k = 0$, a wzorem (5), jeśli $k \neq 0$. Z prostych obliczeń wynika, że dla funkcji określonej wzorem (4)

$$\theta_n = \frac{1}{n+2}$$

Wstawiając $f(x) = cb^x + W_{n+1}(x)$ do wzoru (1) i upraszczając otrzymujemy

$$b^h = 1 + \frac{\ln b}{1!}h + \ldots + \frac{\ln^n b}{n!}h^n + \frac{b^{h\theta_n}(\ln b)^{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Stąd wynika, że $\theta_n(a, h)$ dla funkcji danej wzorem (5) jest funkcją jednej zmiennej h. Funkcja $\theta_n(a, h)$ jest więc tylko wtedy funkcją jednej zmiennej h, jeśli $f(x)$ jest postaci (4) lub (5).

Wniosek. *Jedynymi funkcjami, dla których* $\theta_n(a, h) = \text{const}$, *są wielomiany stopnia* $n+2$.

Dowód twierdzenia T4 opiera się na następującym lemacie:

Lemat 1. *Jeżeli* $\theta_n(a, h)$ *jest funkcją jednorodną, to może być co najwyżej funkcją jednorodną stopnia* 0.

Dowód. Funkcja $\theta_n(a, h)$ jest ciągła i ma ciągłe pochodne rzędu pierwszego w obszarze D. Jeżeli $\theta_n(a, h)$ jest funkcją jednorodną stopnia k, to w obszarze D zachodzi wzór Eulera

$$h\frac{\partial \theta_n(a, h)}{\partial h} + a\frac{\partial \theta_n(a, h)}{\partial a} = k\,\theta_n(a, h).$$

Przechodząc w tej równości do granicy przy $h \to 0$ i stosując T1 otrzymujemy $\frac{1}{2}k = 0$. Stąd wynika prawdziwość lematu.

Dowód twierdzenia T4. Z lematu 1 wynika, że jeśli $\theta_n(a, h)$ jest funkcją jednorodną, to może co najwyżej zachodzić wzór

$$\theta_n(ta, th) = \theta_n(a, h). \tag{11}$$

Różniczkując wzór (11) względem h otrzymujemy

$$t\frac{\partial \theta_n(ta, th)}{\partial h} = \frac{\partial \theta_n(a, h)}{\partial h}. \tag{12}$$

Stąd po przejściu do granicy przy $h \to 0$ i zastosowaniu T1, b), wynika równość

$$\frac{f^{(n+3)}(ta)}{f^{(n+2)}(ta)} = t^{-1}\frac{f^{(n+3)}(a)}{f^{(n+2)}(a)}.$$

Ostatnia równość oznacza, że funkcja jednej zmiennej $\frac{f^{(n+3)}(x)}{f^{(n+2)}(x)}$ jest funkcją jednorodną stopnia -1, a więc jest postaci $\frac{c}{x}$. Jeśli więc $\theta_n(a, h)$ jest funkcją jednorodną, to funkcja $f(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{f^{(n+3)}(x)}{f^{(n+2)}(x)} = \frac{c}{x}.$$

Całkując to równanie stronami otrzymujemy

$$f^{(n+2)}(x) = A x^c, \tag{13}$$

gdzie A jest dowolną liczbą różną od zera.

Rozwiązaniami równania (13) są funkcje postaci (6), jeżeli $c = k-n-2$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, i funkcje postaci (7), jeżeli $c \neq -1, -2, \ldots, -n-2$. Funkcja $\theta_n(a, h)$ może więc być funkcją jednorodną tylko w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcją postaci (6) lub (7).

Sprawdzimy teraz czy $\theta_n(a, h)$ dla funkcji danych wzorami (6) i (7) jest istotnie funkcją jednorodną. Z T2 wynika, że sprawdzenie to wystarczy przeprowadzić dla funkcji

$$f(x) = x^k \ln|x| \quad \text{i} \quad f(x) = x^d,$$

gdzie $d \neq 0, 1, \ldots, n+1$; $k = 0, 1, \ldots, n+1$.

Łatwo można wyprowadzić następujący wzór na i-tą pochodną funkcji $y = x^k \ln|x|$:

$$(x^k \ln|x|)^{(i)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \ln|x| + A_i x^{k-i} & \text{dla} \quad i \leqslant k, \\ A_i x^{k-i} & \text{dla} \quad i > k, \end{cases}$$

gdzie

$$A_1 = 1,$$

$$A_i = \begin{cases} (k-i+1)A_{i-1} + \dfrac{k!}{(k-i+1)!} & \text{dla} \quad i = 2,\ldots,k, \\ (-1)^{i-k-1}k!(i-k-1)! & \text{dla} \quad i = k+1,\ldots \end{cases}$$

Wstawiając do wzoru (1)

$$f(x) = x^k \ln|x| \quad \text{dla} \quad k \leqslant n$$

otrzymujemy

$$(a+h)^k \ln|a+h| =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i}h^i \ln a + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i!} a^{k-i}h^i = + \frac{A_{n+1}}{(n+1)!}(a+h\theta_n)^{k-n-1}h^{n+1}.$$

Stąd po przekształceniu mamy

$$(14) \quad (a+h)^k \ln\left|\frac{a+h}{a}\right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i!} a^{k-i}h^i + \frac{A_{n+1}}{(n+1)!}(a+h\theta_n)^{k-n-1}h^{n+1}.$$

Po podstawieniu do wzoru (1) $f(x) = x^{n+1}\ln|x|$ otrzymujemy

$$(a+h)^{n+1}\ln|a+h| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i}h^i \ln a + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i}{i!} a^{n+1-i}h^i + h^{n+1}\ln|a+\theta_n h|.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$(15) \quad (a+h)^{n+1}\ln\left|\frac{a+h}{a}\right| = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i}{i!} a^{n+1-i}h^i + h^{n+1}\ln\left|\frac{a+h\theta_n}{a}\right|.$$

Wstawiając do wzoru (1) $f(x) = x^d$ otrzymujemy

$$(16) \quad (a+h)^d = a^d + \binom{d}{1} a^{d-1}h + \binom{d}{2} a^{d-2}h^2 + \ldots + \binom{d}{n+1}(a+h\theta_n)^{d-n-1}h^{n+1}.$$

Następnie do wzoru (16) podstawiamy za a i h odpowiednio ta i th. Ponieważ lewa strona i każdy wyraz prawej strony wzoru (16) są funkcjami jednorodnymi tego samego stopnia, więc po podzieleniu przez t^d zmienna t pozostanie tylko w funkcji θ_n. A więc obliczając θ_n ze wzoru (16) przed

podstawieniem i po podstawieniu za a i h odpowiednio ta i th, otrzymujemy ten sam wynik. Stąd wnioskujemy, że $\theta_n(a, h) = \theta_n(ta, th)$.

Podobnie postępujemy w przypadku wzorów (14) i (15).

Zatem dla funkcji (6) i (7) $\theta_n(a, h)$ jest istotnie funkcją jednorodną.

Prace cytowane

[1] R. Rothe, *Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung*, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), str. 309.

[2] S. Gołąb et S. Łojasiewicz, *Un théorème sur la valeur moyenne θ dans la formule des accroissements finis*, Ann. Polon Math. 3 (1956), str. 118-125.

[3] R. Bartłomiejczyk, *O pewnych własnościach liczby θ występującej w twierdzeniu o przyrostach skończonych*, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, seria. Mat.-Fiz., 6 (1965).