ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

R. BARTŁOMIEJCZYK (Gliwice)

O pewnym wyprowadzeniu warunków istnienia ekstremów funkcji wielu zmiennych

W niniejszej notatce podane jest wyprowadzenie warunków na istnienie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych, które nie opiera się na wzorze Taylora. Wyprowadzenia tego nie znalazłem w znanej mi literaturze.

Niech

$$u = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Ponadto załóżmy, że funkcja (1) jest ciągła i ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego w tym otoczeniu.

Rozważmy dowolną prostą pęku o wierzchołku P_0:

$$x_i = x_i^0 + m_i t, \tag{2}$$

gdzie $m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeśli ograniczymy obszar określoności funkcji (1) do prostej pęku (2), to funkcję tę możemy napisać w postaci

$$v(t) = f(x_1^0 + m_1 t, \ldots, x_n^0 + m_n t). \tag{3}$$

Funkcja $v(t)$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu $t = 0$.

Obliczmy pierwszą i drugą pochodną funkcji (3) w punkcie $(x_1^0 + m_1 t, \ldots, x_n^0 + m_n t)$:

$$v'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} m_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} m_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} m_n, \tag{4}$$

$$v''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} m_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} m_1 m_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} m_1 m_n + \tag{5}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} m_n m_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} m_n m_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} m_n^2.$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji (3) dla $t = 0$ jest $v'(0) = 0$. Stąd wobec równości (4) otrzymujemy

$$\frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1} m_1 + \ldots + \frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_n} m_n = 0. \tag{6}$$

Jeżeli $v'(0) = 0$, to do istnienia ekstremum funkcji (3) dla $t = 0$ wystarcza, żeby $v''(0) \neq 0$.

Wprowadźmy oznaczenia $\frac{\partial^2 f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}$ dla $i, j = 1, \ldots, n$, wówczas równość (5) przyjmuje postać

$$v''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} m_i m_j, \tag{7}$$

zwaną formą kwadratową zmiennych $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

TWIERDZENIE 1. *Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji* (1) *w punkcie* P_0 *jest układ równości*

$$\frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_n} = 0. \tag{8}$$

Dowód. Dla istnienia ekstremum funkcji (1) w punkcie P_0 potrzeba, aby funkcja (3) dla dowolnych $m_1, m_2, \ldots, m_n$ spełniała warunek konieczny istnienia ekstremum dla $t = 0$. Zatem równość (6) musi zachodzić dla dowolnych $m_1, \ldots, m_n$, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy zachodzą równości (8). Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Punkt, dla którego spełnione są warunki (8) nazywamy *punktem stacjonarnym* funkcji (1).

TWIERDZENIE 2. *Jeśli* P_0 *jest punktem stacjonarnym funkcji* (1) *i forma kwadratowa* (7) *jest określona, to funkcja* (1) *w punkcie* P_0 *osiąga ekstremum, przy czym, jeśli forma kwadratowa jest określona dodatnio, to istnieje minimum, a gdy jest określona ujemnie, to istnieje maksimum.*

Jeśli natomiast forma kwadratowa (7) *jest nieokreślona, to w punkcie* P_0 *ekstremum nie istnieje.*

Pierwszą część twierdzenia udowodnimy w przypadku, gdy funkcja (1) w punkcie P_0 osiąga minimum. Dowód w przypadku, gdy funkcja (1) w punkcie P_0 osiąga maksimum jest analogiczny.

LEMAT. *Jeżeli funkcja* $x = \varphi(t)$ *klasy* C^2 *w przedziale* $\langle -\alpha, \alpha \rangle$, $(\alpha > 0)$ *spełnia warunki*

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) > 0, \quad \varphi(\alpha) < \varphi(0),$$

to istnieje punkt $0 < \xi < \alpha$ *taki, że* $\varphi''(\xi) = 0$.

Dowód lematu. Ponieważ $\varphi''(0) > 0$, więc $\varphi''(t) > 0$ w pewnym otoczeniu punktu $t = 0$. Oznacza to, że w pewnym otoczeniu punktu $t = 0$ funkcja $\varphi'(t)$ jest rosnąca. Istnieje zatem punkt $t_1 > 0$ taki, że $\varphi'(t_1) > 0$.

Gdyby $\varphi'(t) \geqslant 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant \alpha$, to $\varphi(0) \leqslant \varphi(\alpha)$, co jest sprzeczne z założeniem. Istnieje więc punkt $t_2 > 0$ taki, że $\varphi'(t_2) < 0$. Z ciągłości funkcji $\varphi'(t)$ wynika istnienie takiego punktu t_0, że $t_1 < t_0 < t_2$ i $\varphi'(t_0) = 0$.

Funkcja $\varphi'(t)$ w przedziale $\langle 0, t_0\rangle$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, istnieje więc punkt ξ taki, że $\varphi''(\xi) = 0$.

Dowód twierdzenia 2. Zamiast dowodu twierdzenia $Z \to T$, udowodnimy twierdzenie równoważne $Z \cdot T' \to Z'$.

Załóżmy że funkcja (1) w punkcie P_0 nie posiada mimimum, a forma kwadratowa (7) jest określona dodatnio. Zatem w dowolnym otoczeniu punktu P_0 istnieją punkty, w których wartość funkcji (1) jest mniejsza od $f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Istnieje więc ciąg punktów $\{Q_k(y_1^k, \ldots, y_n^k)\}$ dla $k = 1, 2, \ldots$ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = P_0 \quad \text{i} \quad f(y_1^k, \ldots, y_n^k) < f(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Ponadto ciąg $\{Q_k\}$ można dobrać tak, aby ciąg wektorów $\dfrac{\overrightarrow{P_0Q_k}}{|\overrightarrow{P_0Q_k}|}$ był zbieżny[1]. Granice ciągu tych wektorów oznaczamy przez $\bar{u}(m_1^0, \ldots, m_n^0)$. Punkt Q_k leży na prostej pęku (2) o równaniach

$$x_i = x_i^0 + m_i^k t, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{dla} \quad t = t_k, \tag{9}$$

gdzie $(m_1^k, \ldots, m_n^k)$ są współrzędnymi wektora $\dfrac{\overrightarrow{P_0Q_k}}{|\overrightarrow{P_0Q_k}|}$. Oczywiście, że $\lim\limits_{k\to\infty} m_i^k = m_i^0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Funkcja (3) dla $m_i = m_i^k$, $i = 1, \ldots, n$, spełnia założenia lematu. Istotnie, $v'(0) = 0$ na podstawie (6), $v''(0) > 0$ na podstawie założenia o dodatniości formy kwadratowej (7), wreszcie

$$v(t_k) = f(y_1^k, \ldots, y_n^k) < f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = v(0).$$

A więc istnieje punkt ξ_k taki, że $0 < \xi_k < t_k$ i $v''(\xi_k) = 0$. Dla $t = \xi_k$ na prostej (9) istnieje punkt $P_k(x_1^k, \ldots, x_n^k)$. Ponieważ $|\overrightarrow{P_0P_k}| < |\overrightarrow{P_0Q_k}|$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$. Wstawiając do wzoru (5) $t = \xi_k$ otrzymujemy

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1^k, \ldots, x_n^k)}{\partial x_i \partial x_k} m_i^k m_j^k = 0.$$

---

[1]) Ponieważ z ciągu nieskończonego i ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

W granicy, gdy $k \to \infty$, otrzymujemy

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i \partial x_j} m_i^0 m_j^0 = 0,$$

gdzie $(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2 + \ldots + (m_n^0)^2 = 1$. Ostatnia równość oznacza, że forma kwadratowa (7) nie jest określona dodatnio, zatem pierwsza część tezy została udowodniona.

Przeprowadzimy teraz dowód drugiej części tezy. Załóżmy, że dla układu $(m_1', \ldots, m_n')$ forma kwadratowa (7) jest dodatnia, a dla $(m_1'', \ldots, m_n'')$ jest ujemna. Oznacza to, że funkcja (1) przybiera na prostej

$$x_i = x_i^0 + \frac{m_i' t}{\sqrt{m_1'^2 + \ldots + m_n'^2}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wartość lokalnie najmniejszą w punkcie P_0, a na prostej

$$x_i = x_i^0 + \frac{m_i'' t}{\sqrt{m_1''^2 + \ldots + m_n''^2}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wartość największą w punkcie P_0. Oczywiście oznacza to, że funkcja (1) w punkcie P_0 nie posiada ekstremum.