ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

wmptm 1897

R. SIKORSKI (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Jak wykładałem rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych

W roku akademickim 1963/64 prowadziłem na Uniwersytecie Warszawskim kursowy wykład rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych (tzw. Analiza II) dla studentów matematyki drugiego roku. Wykład ten różnił się istotnie od tradycyjnych wykładów tego przedmiotu zarówno zawartością materiału, jak i metodą ujęcia oraz oznaczeniami. Celem tego artykułu, napisanego na prośbę redakcji Wiadomości Matematycznych, jest przedstawienie podstawowych idei mego wykładu.

Wykład był prowadzony w okresie eksperymentalnego programu studium matematyki na Uniwersytecie Warszawskim, który potem z niewielkimi modyfikacjami stał się obowiązujący dla wszystkich uniwersytetów polskich. W zakresie rachunku różniczkowego i całkowego twórcy programu postulowali całkowite wyeliminowanie całki Riemanna, jako pojęcia przestarzałego. Według opinii inicjatorów zmian programowych, na pierwszym roku studiów całka oznaczona funkcji jednej zmiennej powinna być definiowana jako przyrost funkcji pierwotnej na przedziale, a na drugim roku studiów zamiast teorii całki Riemanna funkcji wielu zmiennych powinna być wykładana całka Lebesgue'a od razu w przestrzeni wielowymiarowej.

W rezultacie program wykładu analizy II, jaki otrzymałem do realizacji, obejmował mastępujące trzy dziedziny:

1) teorię różniczkowalności funkcji wielu zmiennych wraz z teorią tzw. „funkcji uwikłanych";

2) teorię całki Lebesgue'a, poprzedzoną teorią miary Lebesgue'a;

3) teorię całki powierzchniowej i krzywoliniowej.

Było jasne dla mnie, że teorię całki Lebesgue'a należy prowadzić od razu w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, a może nawet ogólniej, w przestrzeni abstrakcyjnej, względem dowolnej miary. Przy trafnie dobranych oznaczeniach wykład teorii całki w tym przypadku jest dokładnie tak samo trudny (czy łatwy), jak w przypadku jednowymiarowym.

Postanowiłem zadać sobie trud sprawdzenia, czy w równie prosty sposób można poprowadzić wykład rachunku różniczkowego od razu w prze-

strzeni euklidesowej n-wymiarowej, oczywiście po przyjęciu odpowiednich konwencji oznaczeniowych. Zdawałem sobie sprawę z tego, że trzeba będzie korzystać z zapisu wektorowego, korzystać z pojęć i metod algebry liniowej, np. z rachunku macierzowego itp. Uważałem za celowe i pożądane włączenie elementów algebry liniowej do wykładu analizy. Sądzę, że jest wskazane pokazywać studentowi wzajemne powiązania różnych działów matematyki.

Wstępny szkic wykładu przekonał mnie, że taka forma wykładu jest całkowicie możliwa do zrealizowania. Więcej, przyjęta przeze mnie metoda pozwala na wykład nie tylko przejrzysty, lecz również bardzo precyzyjny.

Pragnę zwrócić uwagę czytelnika na fakt, że „wielowymiarowość" wykładu rachunku różniczkowego i całkowego była łatwa do zrealizowania, gdyż geometria analityczna na Uniwersytecie Warszawskim jest wykładana od razu w n wymiarach ku wspólnemu zadowoleniu zarówno studentów, jak i wykładowców, a wbrew opinii pewnych kolegów z innych uniwersytetów, którzy a priori uznają tego rodzaju postępowanie za niewłaściwe (godzą się natomiast na wykładanie tego samego, lecz w nieco innym języku, pod nazwą algebry!). Studenci byli więc przyzwyczajeni do podstawowych pojęć geometrii analitycznej n-wymiarowej, jak punkt, wektor, prosta, hiperpłaszczyzna itp.

W rezultacie mój wykład rachunku różniczkowego i całki Lebesgue'a był prowadzony od początku do końca w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej. Po tak „wielowymiarowej" realizacji punktów 1) i 2) programu, również punkt 3), tzn. teoria całek powierzchniowych i krzywoliniowych, musiał być — ze względu na jednolitość i swoistą estetykę wykładu — zrealizowany „wielowymiarowo". W istocie podałem krótki zarys teorii całki na hiperpowierzchniach n-wymiarowych w przestrzeni euklidesowej m-wymiarowej E^m, $1 \leqslant n \leqslant m$. Jednym z dodatkowych powodów, które mną kierowały, była dążność do wysokiego stopnia precyzji. Powszechnie wiadomo, że tradycyjny wykład całki powierzchniowej jest pełen nieścisłości, niedomówień i opierania się na intuicji, a wykładowca często nie wierzy w to, co mówi. Przejście do wyższych wymiarów pociąga niemal automatycznie zwiększenie precyzji definicji i dowodów wobec wyeliminowania „intuicyjności" i „oczywistości". Spodziewałem się, że przy trafnym doborze pojęć, definicji, symboliki i przykładów całość pozostanie jeszcze strawna dla średnio uzdolnionego studenta.

W dążeniu do precyzji i modernizacji postanowiłem systematycznie stosować współczesne znakowanie. Na przykład systematycznie odróżniałem funkcję f od jej wartości $f(p)$ w punkcie p. Stosowałem powszechnie już przyjęte znakowanie $f\colon A \to B$ dla odwzorowań f zbioru A w zbiór B, symbol $f \circ g$ na oznaczenie superpozycji odwzorowań f i g, symbol $f|A$ dla funkcji obciętej do podzbioru A itp. Starałem się, by znakowanie zasad-

niczo zawierało tylko istotne elementy. Tak więc standardowym oznaczeniem całki funkcji f na zbiorze A był zwięzły symbol $\int_A f$. Wyeliminowałem z głównego tekstu niesprecyzowane pojęcie „zmiennych". W rezultacie musiałem porzucić tradycyjne oznaczanie pochodnych cząstkowych typu $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_{x_2}(x_1, x_2)$ itp. zastępując je innym znakowaniem, w którym nie ma już „zmiennych", a występuje tylko to, co powinno występować: znak różniczkowania i numer współrzędnej, względem której różniczkujemy. Oczywiście żargon tradycyjnego znakowania jest zbyt rozpowszechniony, bym mógł go zupełnie zignorować. Dlatego przytaczałem także znakowanie tradycyjne, traktując je jako coś w rodzaju pamiątek z historii matematyki. Tradycyjne znakowanie było również często stosowane na ćwiczeniach, by studenci nauczyli się nim biegle posługiwać.

Starałem się również dobrać znakowanie w taki sposób, by wszystkie wzory dla funkcji wielu zmiennych (np. wzór Taylora, wzór na całkowanie przez podstawienie itp.) miały dokładnie taką samą postać jak w przypadku funkcji jednej zmiennej.

Takie były podstawowe idee mego wykładu. Realizacja ich przebiegała w sposób następujący.

Z wykładu geometrii analitycznej studenci wiedzieli, że przestrzeń euklidesowa E^n jest produktem kartezjańskim n egzemplarzy zbioru E liczb rzeczywistych. Ten sposób pojmowania przestrzeni euklidesowej był przyjęty również w moim wykładzie. Ten sposób pojmowania przestrzeni euklidesowej E^n był właściwie niezbędny: aby móc mówić o pochodnych cząstkowych funkcji, trzeba przestrzeń euklidesową rozważać jako ustalony produkt $E \times E \times \ldots \times E$.

W konsekwencji wszystkie pojęcia były odnoszone do „naturalnego" układu współrzędnych przestrzeni E^n (zmianą układu współrzędnych nie zajmowałem się). Umożliwiło to pojmowanie różnych wielkości geometrycznych (np. poliwektorów) jako macierzy. Z tej przyczyny język teorii macierzy stał się wielokrotnie podstawą do formułowania definicji i twierdzeń. Niestety studenci nie znali z wykładu algebry wszystkich pojęć i faktów z teorii macierzy, które były mi potrzebne. Podawałem więc je w trakcie wykładu analizy w tych miejscach, gdzie były mi potrzebne.

Z podstawowymi pojęciami mnogościowymi nie miałem kłopotu. Wystarczała mi jedynie znajomość algebry zbiorów i pojęcia zbioru przeliczalnego, którą studenci wynieśli z wykładu wstępu do matematyki na pierwszym roku studiów. Ponadto algebra zbiorów pojawiała się w istotny sposób dopiero przy realizacji drugiego punktu programu, teorii całki, tzn. mniej więcej w styczniu, a więc po przesłuchaniu przez studentów wykładu teorii przestrzeni metrycznych, na którym mieli również możność przyswoić sobie potrzebne pojęcia mnogościowe.

Zakładałem oczywiście, że studenci znają rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej w zakresie wykładanym tradycyjnie na pierwszym roku studiów. W rzeczywistości korzystałem jedynie ze znajomości elementów teorii różniczkowania, a mianowicie umiejętności różniczkowania, twierdzenia o wartości średniej, wzoru Taylora i (w jednym tylko miejscu) z twierdzenia o pochodnej granicy ciągu funkcji.

Tradycyjny wykład rachunku różniczkowego na II roku studiów zawiera na początku sporo materiału z topologii. Ja postępowałem inaczej. Na pierwszym wykładzie wprowadziłem tylko pojęcie zbioru otwartego, i pojęcie ciągłości, które całkowicie wystarczają do rozwinięcia dużej partii teorii różniczkowania. W dalszym ciągu korzystałem natomiast z odbywającego się równocześnie wykładu teorii przestrzeni metrycznych, powołując się często na dowodzone tam ogólne twierdzenia. Wymagało to w praktyce znikomej koordynacji obu wykładów.

Teoria różniczkowania rozwinięta była tylko dla funkcji określonych w podzbiorach otwartych G przestrzeni E^n (jedynie w końcowej części wykładu mówiło się o pochodnych cząstkowych i różniczkowalności funkcji określonej w n-wymiarowym przedziale domkniętym). Pierwszym wprowadzonym pojęciem było pojęcie pochodnej kierunkowej φ'_a funkcji $\varphi: G \to E$ (E — zbiór liczb rzeczywistych) w kierunku wektora a.

Jeśli a jest wersorem i-tej osi współrzędnych, to φ'_a nazywa się *pochodną cząstkową* względem i-tej współrzędnej i oznacza symbolem $\varphi_{|i}$. Kreska pionowa służy do zaznaczenia, że następujące po niej wskaźniki odnoszą się do różniczkowania. Tak więc $\varphi_{i|j}$ oznacza pochodną cząstkową rzędu pierwszego pewnej funkcji φ_i względem j-tej współrzędnej, a $\varphi_{|i,j}$ — pochodną cząstkową rzędu drugiego funkcji φ względem współrzędnych o numerze i (najpierw!) oraz j (potem), itp. Przyjąłem ten sposób znakowania (wzorowany na pewnym znakowaniu z geometrii różniczkowej) zamiast np. $\partial_i\varphi$ lub $\nabla_i\varphi$, bo ze względu na dalsze zastosowania (np. „macierzowy" wzór na różniczkowanie superpozycji) wygodnie było, by indeksy dolne dotyczące różniczkowania były zapisywane po (a nie przed) ewentualnymi innymi indeksami występującymi przy symbolu funkcji.

Funkcja $\varphi: G \to E$ jest *różniczkowalna w punkcie* $p \in G$, jeśli jej pochodna kierunkowa $\varphi'_a(p)$ w punkcie p jest liniową funkcją wektora a. Jest *różniczkowalna*, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie $p \in G$. Przyjąłem tę definicję różniczkowalności, gdyż jest najprostsza. W dalszym ciągu rozważałem tylko przypadek, gdy pochodne cząstkowe są ciągłe, a w tym przypadku wszystkie możliwe definicje różniczkowalności są równoważne.

Przez *pochodną* φ' funkcji różniczkowalnej φ rozumiałem pole wektorowe

$$\varphi' = [\varphi_{|1}, \ldots, \varphi_{|n}]$$

tzn. gradient funkcji φ. Przez *drugą pochodną* rozumiałem pole macierzowe

$$\varphi'' = [\varphi_{|i,j}]_{i,j=1,\dots,n}.$$

Przez *trzecią pochodną* rozumiałem pole macierzowe trójwskaźnikowe

$$\varphi''' = [\varphi_{|i,j,k}]_{i,j,k=1,\dots,n}$$

itd.

Celowo definiowałem pochodne jako macierze, a nie odwzorowania liniowe lub wieloliniowe, jak to się często czyni (chociaż gdzie indziej wyraźnie stwierdziłem, że mówiąc o macierzach i odwzorowaniach wielioliniowych właściwie mówi się o jednym i tym samym). Sądzę, że takie ujęcie jest pojęciowo prostsze, bardziej liczbowe, mniej abstrakcyjne. Ponadto duża część studentów pozna później pojęcie pochodnej w ujęciu „liniowym" z wykładu analizy funkcjonalnej. Nie chciałem uprzedzać tamtego wykładu, wolałem oświetlić to samo pojęcie pochodnej z innej strony. Dodam jeszcze, że w ujęciu macierzowym wzór na pochodną superpozycji ma bardziej czytelną postać.

Wprowadziłem następujące pojęcia z algebry liniowej. Dla dowolnych wektorów

$$a = [a_1, \dots, a_n],\ b = [b_1, \dots, b_n],\ c = [c_1, \dots, c_n],\ \dots$$

ich *iloczynami tensorowymi* są macierze

$$a \times b = [a_i b_j]_{i,j=1,\dots,n}, \qquad a \times b \times c = [a_i b_j c_k]_{i,j,k=1,\dots,n} \quad \text{itd.}$$

Zamiast k-krotnego iloczynu $a \times a \times \dots \times a$ piszemy a^k.

Iloczynem skalarnym macierzy

$$A = [a_{i_1,\dots,i_k}]_{i_1,\dots,i_k=1,\dots,n}, \tag{1}$$

$$B = [b_{i_1,\dots,i_k}]_{i_1,\dots,i_k=1,\dots,n} \tag{2}$$

jest liczba

$$A \cdot B = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} b_{i_1,\dots,i_k}.$$

Mówimy, że macierz symetryczna (1) jest *dodatnia* (*ujemna*), jeśli $A \cdot a^k > 0$ ($A \cdot a^k < 0$) dla każdego wektora $a \neq 0$.

Przy tej symbolice wzór Taylora ma dokładnie tę samą postać, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej:

$$\varphi(p+a) = \varphi(p) + \frac{\varphi'(p) \cdot a}{1!} + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(p) \cdot a^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\varphi^{(k)}(p+\theta a) \cdot a^k}{k!},$$

a twierdzenie o ekstremach brzmi tak samo, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej: jeśli $\varphi'(p) = 0, \dots, \varphi^{(k-1)}(p) = 0$, a $\varphi^{(k)}(p) > 0$ (lub: $\varphi^{(k)}(p) < 0$), to funkcja φ ma właściwe minimum (maksimum) lokalne w punkcie p.

Po teorii różniczkowania funkcji rzeczywistych następuje teoria różniczkowania odwzorowań

$$\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\colon G \to E^m, \tag{3}$$

gdzie jak poprzednio G jest podzbiorem otwartym przestrzeni E^n, a $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — funkcjami rzeczywistymi. *Pochodną odwzorowania* (3) jest pole macierzowe

$$\Phi' = [\varphi_{i|j}]_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}, \tag{4}$$

tzn. funkcja, która punktowi $p \in G$ przyporządkowuje macierz prostokątną utworzoną ze współrzędnych cząstkowych $\varphi_{i|j}(p)$ funkcji rzeczywistych φ_i w punkcie p.

W przypadku gdy $n = m$, oprócz pochodnej Φ' wprowadzamy jeszcze pojęcie *pochodnej skalarnej* $|\Phi'|$ *odwzorowania* Φ: jest nią wyznacznik macierzy (4), tzn. jakobian odwzorowania Φ. Jeśli $n \neq m$, to namiastką pochodnej skalarnej jest moduł pochodnej $|\Phi'|$ będący pierwiastkiem kwadratowym z sumy kwadratów wyznaczników stopnia $\min(n, m)$, które można utworzyć z macierzy (4).

Niekiedy wygodnie jest rozważać Φ jako funkcję tylko niektórych współrzędnych, np. współrzędnych o numerach

$$j_1, \ldots, j_\nu. \tag{5}$$

Oznaczając ciąg (5) jedną literą j, przez pochodną cząstkową $\Phi_{|j}$ rozumiemy macierz

$$\Phi_{|j} = \begin{bmatrix} \varphi_{1|j_1} \cdots \varphi_{1|j_\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{m|j_1} \cdots \varphi_{m|j_\nu} \end{bmatrix}; \tag{6}$$

analogicznie definiuje się $|\Phi_{|j}|$, a w przypadku gdy $\nu = m$ także $/\Phi_{|j}/$ (jakobian!). Jeśli ciąg j składa się z jednej tylko liczby j, to pochodna cząstkowa $\Phi_{|j}$ jest wektorem (dokładniej: polem wektorowym)

$$\Phi_{|j} = [\varphi_{1|j}, \ldots, \varphi_{m|j}]. \tag{7}$$

Przy powyższych definicjach i oznaczeniach wzór na pochodną superpozycji dwu odwzorowań ma postać analogiczną jak w przypadku funkcji jednej zmiennej:

$$(\Phi \circ \Psi)' = (\Phi' \circ \Psi) \bullet \Psi',$$

czyli

$$(\Phi \circ \Psi)'(p) = \Phi'\big(\Psi(p)\big) \bullet \Psi'(p),$$

gdzie $A \bullet B$ oznacza iloczyn macierzowy macierzy prostokątnych A i B. W przypadku, gdy wymiary przestrzeni są równe, dochodzi jeszcze wzór

na pochodną skalarną superpozycji

$$|(\Phi\circ\Psi)'(p)| = |\Phi'(\Psi(p))|\cdot|\Psi'(p)|,$$

tzn. twierdzenie o mnożeniu jakobianów.

Twierdzenie o tzw. „funkcjach uwikłanych" (termin ten w ogóle nie był używany w wykładzie jako archaiczny) w pełnym sformułowaniu ma taką samą postać jak w najprostszym przypadku równania $f(x, y) = 0$. Przyjmijmy umowę, że jeśli

$$p = (x_1, \ldots, x_m), \quad q = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}), \quad \text{to} \quad (p, q) = (x_1, \ldots, x_{n+m}).$$

Niech j oznacza ciąg złożony z liczb $n+1, \ldots, m$. Przy tych oznaczeniach twierdzenie brzmi:

Jeśli

$$\Omega = [\omega_1, \ldots, \omega_m]\colon G \to E^m \quad (G \subset E^{n+m}),$$

jest klasy C_1 *oraz*

$$\Omega(p_0, q_0) = 0, \quad |\Omega_{|j}(p_0, q_0)| \neq 0,$$

to w pewnym otoczeniu U *punktu* p_0 *istnieje takie ciągłe odwzorowanie* $\Psi\colon U \to E^m$, *że*

$$\Omega(p, \Psi(p)) = 0 \quad \textit{dla} \quad p \in U \quad \textit{oraz} \quad \Psi(p_0) = q_0.$$

Dowód tego twierdzenia metodą kolejnych przybliżeń jest równie prosty jak dowód — tą samą metodą — tego twierdzenia w najprostszym przypadku jednego równania skalarnego $f(x, y) = 0$. Systematyczne stosowanie odpowiednio dobranych oznaczeń zapewnia pełną przejrzystość i czytelność dowodu, której nie ma w zwykłym zapisie skalarnym już w przypadku dwu równań z trzema niewiadomymi.

Jako zastosowania geometryczne wprowadza się pojęcie odwzorowania regularnego Φ (tzn. takiego, że Φ' jest ciągłe i $|\Phi'| > 0$) oraz dyferomorfizmu $\Phi\colon G \to E^m$ ($G \subset E^n$, $m \geqslant n$), tzn. regularnego homeomorfizmu. Następują zastosowania do teorii n-wymiarowych hiperpowierzchni regularnych H w E^m, tzn. zbioru $H \subset E^m$ takiego, że każdy punkt $q \in H$ posiada otoczenie w H będące obrazem dyferomorficznym podzbioru otwartego przestrzeni E^n. Ze względu na późniejsze zastosowanie do teorii całek hiperpowierzchniowych wprowadza się pojęcie n-wersora stycznego do n-wymiarowej hiperpowierzchni regularnej. Dowodzi się, że jeśli $\Omega\colon G \to E^{m-n}$ jest regularne, $G \subset E^m$, to zbiór $\{p\colon \Omega(p) = 0\}$ jest n-wymiarową hiperpowierzchnią.

Część dotycząca teorii różniczkowalności kończy się twierdzeniem o mnożnikach Lagrange'a w następującym sformułowaniu: Jeśli φ jest funkcją klasy C_1 określoną w zbiorze otwartym G, $H = \{p \in G\colon \Omega(p) = 0\}$ jest n-wymiarową hiperpowierzchnią i w punkcie $p \in H$ funkcja $\varphi|H$ ma

lokalne ekstremum, to wektor $\varphi'(p)$ jest prostopadły do H w punkcie p. Oczywiście zwykłe sformułowanie zostało także podane.

Następuje wykład teorii miary. Ze względu na to, że ogólne pojęcie miary jest potrzebne studentom III roku do wykładu teorii prawdopodobieństwa oraz ze względu na dalszą część wykładu (całki na hiperpowierzchniach), wprowadziłem ogólne pojęcie miary, dowodząc o nim jedynie twierdzeń o ciągach monotonicznych. Jako przykład miary podałem miarę Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej w ujęciu klasycznym, poprzez miarę zewnętrzną Lebesgue'a w E^n i zastosowane do niej twierdzenie Carathéodory'ego.

Dalszy ciąg wykładu stanowiła teoria całki względem dowolnej miary. W przeciwieństwie do lat poprzednich, kiedy to całkę Lebesgue'a wprowadzałem metodą rozszerzenia funkcjonału w przestrzeni L, w roku 1963/64 wprowadziłem całkę poprzez monotoniczne przejścia do granicy. Wykład teorii całki był niewielką modyfikacją tego, co jest zawarte w §§ 1-3 rozdziału VII mojej książki *Funkcje rzeczywiste*.

Potem została wyłożona teoria całki w przestrzeni euklidesowej E^n, tzn. całki względem miary Lebesgue'a. Ze względu na zastosowania geometryczne, fizyczne etc. udowodniłem, że całka funkcji ciągłej na kompakcie jest granicą ciągu sum Riemanna; było to jedyne nawiązanie do klasycznej teorii całki Riemanna. Dalszy punkt programu to twierdzenie Fubiniego (dla miary Lebesgue'a) i sprowadzenie całek n-wymiarowych do całek iterowanych. Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie dowodzone było dla zbiorów otwartych G: jeśli $\Phi\colon G \to E^n$ jest dyferomorfizmem ($G \subset E^n$), to

$$\int_{\Phi(G)} f = \int_G (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|.$$

Przypominam, że $|\Phi'|$ jest tu wartością bezwzględną jakobianu przekształcenia Φ.

Teoria całki w przestrzeni E^n kończy się obliczeniem objętości n-wymiarowej kuli.

Wykład teorii całek na hiperpowierzchniach rozpoczął się następującym twierdzeniem o prostym dowodzie:

Niech $H \subset E^m$ będzie n-wymiarową hiperpowierzchnią. Istnieje dokładnie jedna miara μ_H określona na pewnym σ-ciele M_H podzbiorów zbioru H, taka że

a) *$A \in M_H$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego dyferomorfizmu $\Phi\colon G \to H$ ($G \subset E^n$) zbiór $\Phi^{-1}(A)$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a;*

b) *jeśli $A \in M_H$ i $A \subset \Phi(G)$, gdzie $\Phi\colon G \to H$ jest dyferomorfizmem ($G \subset E^n$), to*

$$\mu_H(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} |\Phi'|. \tag{8}$$

Przypominam, że jeśli Φ dane jest wzorem (3), to $|\Phi'|$ jest pierwiastkiem kwadratowym z sumy kwadratów wszystkich jakobianów

$$\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_n.$$

Twierdzenie to stanowi definicję n-wymiarowej miary na n-wymiarowej hiperpowierzchni H. Przyjąłem taką definicję zamiast na przykład definicji n-wymiarowej miary Hausdorffa w E^m $(n \leqslant m)$, ponieważ prowadzi ona bezpośrednio do wzoru całkowego

$$\int_A f d\mu_H = \int_{\Phi^{-1}(A)} (f \cdot \Phi) \circ |\Phi'|$$

dla zbioru $A \in M_H$ zawartego w przeciwdziedzinie dyferomorfizmu $\Phi: G \to H$ $(G \subset E^n)$. Oczywiście definicja została uzasadniona znanym rozumowaniem opartym na przedstawieniu całki po prawej stronie (8) jako granicy ciągu sum Riemanna, gdy $\Phi^{-1}(A)$ jest przedziałem n-wymiarowym, tak jak to się zwykle robi przy wyprowadzaniu wzoru na pole powierzchni.

Jako przykład podałem wzór na powierzchnię n-wymiarowej sfery. To zakończyło teorię tzw. całek powierzchniowych niezorientowanych.

Teoria tzw. zorientowanych całek powierzchniowych wymagała pewnego wstępu topologicznego. Ponieważ ta część analizy matematycznej w ujęciu wielowymiarowym jest mało znana w Polsce, pomijam dokładniejsze omówienie tego fragmentu wykładu nie chcąc nużyć czytelnika przytaczaniem definicji kilku pojęć, które tu trzeba wprowadzić, jak pojęcie łańcucha, pochodnej zewnętrznej itp. Sformułowałem i udowodniłem twierdzenie Stokesa dla całek na n-wymiarowych bryłach, tzn. — mówiąc niedokładnie — na zbiorach będących sumą skończonej liczby niezachodzących na siebie dyferomorficznych obrazów domkniętych przedziałów n-wymiarowych. Podałem szczególne przypadki twierdzenia Stokesa dla brył orientowalnych. Oczywiście wykład zawierał klasyczne „trójwymiarowe" twierdzenie Stokesa, wzór Gaussa-Ostrogrodskiego oraz wzór Greena.

Ta część wykładu w sposób naturalny podprowadzała słuchacza w stronę elementarnych pojęć topologii algebraicznej, chociaż wiele pojęć wprowadzałem w sposób odmienny od powszechnie przyjętego w topologii, ze względu na wygodę części analitycznej mego wykładu. Tak np. ze względu na uproszczenia przy wyprowadzaniu wzoru Stokesa posługiwałem się pojęciem przedziału wielowymiarowego zamiast pojęciem simpleksu. Orientację definiowałem nie w abstrakcyjny sposób, jak zwykle w topologii, lecz jako jedno z dwu możliwych pól poliwersorów stycznych do hiperpowierzchni. Łańcuch był definiowany również jako pewne pole poliwektorowe — wskutek tego działania algebraiczne na łańcuchach były zwykły-

mi działaniami algebraicznymi na macierzach, a definicję całki zorientowanej na łańcuchu można było bardzo prosto zapisać.

Czytelników interesujących się bliżej moim wykładem z analizy matematycznej odsyłam do mojej książki *Rachunek różniczkowy i całkowy — funkcje wielu zmiennych*, która niedługo powinna wyjść z druku. Książka jest niewielką modyfikacją mego wykładu.

Na początku wykładu zapowiedziałem studentom, że każdy z nich może na egzaminie powiedzieć mi, iż jest przygotowany nie według mego wykładu, lecz według tradycyjnego wykładu analizy matematycznej II, wziętego z jednej z aktualnie dostępnych książek, i może zdawać analizę w ujęciu tradycyjnym. Oświadczyłem również, że to nie pociągnie za sobą zmniejszenia oceny. Ani jeden student nie skorzystał z tego przywileju. Wyniki egzaminu z mego wykładu nie odbiegały od przeciętnych wyników z okresu, gdy wykład analizy matematycznej II prowadziłem metodą tradycyjną. Przyznać muszę, że nie dręczyłem zbytnio słabych studentów teorią całek na hiperpowierzchniach, wychodząc z założenia, że poza nie zawsze dobrymi notatkami z mego wykładu nie mieli możności korzystania z żadnych innych pomocy przy nauce tego przedmiotu.

Wykład wyraźnie podobał się dobrym i bardzo dobrym studentom. Nowoczesność i odmienność wykładu była dla nich wysoce atrakcyjna.

Moim zdaniem wykład teorii całki i teorii różniczkowalności, prowadzony od razu w przestrzeni wielowymiarowej, jest całkowicie strawny dla średnio uzdolnionego studenta II roku. Musi być poprzedzony wcześniejszym wykładem elementów n-wymiarowej geometrii analitycznej. Oczywiście wykładowca powinien zadać sobie trud dokładnego przemyślenia metody wykładu, terminologii i oznaczeń. Wykład analizy byłby znacznie łatwiejszy, gdyby wykład algebry zawierał wszystkie potrzebne pojęcia, jak np. poliwektory, algebry Grassmanna, itp.

Zasadniczą trudność w ewentualnej realizacji wykładu całek na hiperpowierzchniach widzę nie tyle po stronie studentów, ile po stronie wykładowców, którzy musieliby przełamać swe dotychczasowe nawyki i nauczyć się tego przedmiotu, mało znanego w Polsce. Zaletą wielowymiarowej formy wykładu całek krzywoliniowych i powierzchniowych jest to, że w naturalny sposób wprowadza studenta w tematykę bliską topologii kombinatorycznej, będącej ważnym działem matematyki, lecz stale zbyt mało uprawianym w Polsce.