ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

B. L. VAN DER WAERDEN (Zurich)

Pomysł i rozumowanie w matematyce*

I. Pomysł a rozumowanie

Do rozwiązania problemu matematycznego są potrzebne dwa elementy: rozumowanie i pomysł.

Rozumowaniem nazywam przy tym tylko myślenie z włączeniem takich rozważań, które w każdej chwili możemy sobie uświadomić. Nie odgrywa przy tym żadnej roli to, czy myślenie jest ściśle logiczne, czy przez analogię, bądź też czy jest raczej poglądowe.

Pomysł natomiast przychodzi nam po prostu do głowy, nie wiadomo skąd. Nie pochodzi on z naszej świadomości, nie przychodzi również z zewnątrz poprzez nasze zmysły. Pomysł jednakże musi skądś pochodzić, powiedzmy przeto: pochodzi on z podświadomości.

Dobry pomysł ma zawsze w sobie coś tajemniczego, jesteśmy skłonni nazwać go boskim. Gauss, który całymi latami usiłował udowodnić pewne twierdzenie z teorii liczb, pisze (1):

„Nareszcie przed paru dniami udało mi się osiągnąć rezultat, i to nie dzięki moim żmudnym poszukiwaniom, ale po prostu — chciałbym najchętniej powiedzieć — za sprawą łaski bożej. Jakby nagły błysk światła — i zagadka została rozwiązana. I sam nie byłbym w stanie powiedzieć, co było tą nicią, która powiązała to, co wiedziałem poprzednio, z tym, co umożliwiło mi osiągnięcie powodzenia".

Podobnie donosi Hadamard (2):

„Kiedy obudził mnie gwałtownie ze snu hałas z zewnątrz, zjawiło się nagle dawno poszukiwane rozwiązanie, które nadeszło z zupełnie nieoczekiwanej strony bez żadnego, choćby najkrótszego udziału myśli. Przeżycie to było zupełnie w swoim rodzaju i niezapomniane".

Poincaré odkrył w czasie pewnej bezsennej nocy „funkcje Fuchsa". Potem udało mu się przedstawić je jako ilorazy dwóch szeregów. Oto jak pisze o tym Poincaré (3):

---

* Mowa inauguracyjna z dnia 2 lutego 1952 na Uniwersytecie w Zurichu opublikowana w *Elemente der Mathematik* 8(1953), str. 121-127.

(1) List do Olbersa, patrz: *Dzieła Gaussa*, tom X,1, str. 25.

(2) J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, Warszawa 1964, str. 20.

(3) J. Hadamard, tamże, str. 24.

„Idea była zupełnie świadoma i dobrze przemyślana. Kierowałem się analogią z funkcjami eliptycznymi. Zadałem sobie pytanie, jakie powinny by były być własności tych funkcji, gdyby one istniały i oto udało mi się bez trudu zbudować szeregi, które potem nazwałem tetafuchsowskimi".

Teraz zjawia się pomysł:

„Podczas naukowej wycieczki geologicznej zapomniałem z początku o mojej matematycznej pracy. W Coutances wsiedliśmy do autobusu. W chwili, kiedy stawiałem nogę na stopniu, przyszła mi na myśl idea, chociaż nic w moich poprzedzających myślach nie zdawało się być do tego przygotowaniem — że przekształcenia, których użyłem do definicji funkcji fuchsowskich, są identyczne z przekształceniami geometrii nieeuklidesowej. Nie sprawdziłem tego; nie miałbym zresztą na to czasu, ponieważ zaraz po wejściu do autobusu powróciłem do rozpoczętej rozmowy, lecz miałem uczucie całkowitej pewności, że tak jest. Po powrocie sprawdziłem wynik w całkowitym spokoju".

Również inni naukowcy opowiadają o podobnych wypadkach nagłego olśnienia. Poincaré nazywa je wyraźną oznaką długiej podświadomej pracy przygotowawczej „Rola podświadomej pracy w twórczości matematycznej wydaje się bezsporna" — pisze on.

Hadamard próbuje w bardzo interesującej książce *Psychologia odkryć matematycznych* bliżej określić sposób pracy podświadomości. Wychodzi on przy tym z założenia, że odkrycie jest możliwe tylko dzięki kombinacjom pewnych koncepcji. Kombinacji jest dużo, lecz tylko niektóre z nich są owocne. Podświadomość musi przeto najpierw utworzyć wiele możliwych kombinacji, a następnie dopiero spośród nich wybrać pożyteczne, ponieważ tylko te uświadamiamy sobie jako pomysły.

Hadamard opiera się tu na wypowiedzi Poincarégo, który opowiada o bezsennej nocy, podczas której zbudował pierwsze funkcje Fuchsa.

„Napiłem się czarnej kawy i nie mogłem zasnąć. Myśli rodziły się rojami. Czułem, jak się zderzały, niektóre pary jakby się zahaczały o siebie i tworzyły trwałą kombinację. W takich sytuacjach wydaje się, jak gdybyśmy byli świadkami swojej własnej podświadomej pracy, która stała się częściowo dostrzegalna dla naszej podnieconej świadomości, nie tracąc jednak nic ze swego własnego charakteru. Przy takich okazjach człowiek wyczuwa różnicę mechanizmów obydwu „ja"."

Ta zdolność Poincarégo do świadomego obserwowania swego podświadomego myślenia jest wypadkiem dość odosobnionym. Inni naukowcy też mają błyskawiczne pomysły, lecz nie zdają sobie sprawy, jak one powstają.

Poincaré i Hadamard w związku z samoobserwacją bliżej przeanalizowali charakterystyczny mechanizm podświadomego rozumowania. Obaj podkreślają szczególnie rolę poczucia piękna przy wyborze owocnych kombinacji. O roli świadomego rozumowania Hadamard nie mówi jednak prawie nic.

Jak daleko sięga świadome rozumowanie? W jaki sposób odgraniczamy je od pomysłu? O tym można chyba więcej powiedzieć. Świadome myślenie jest przecież dostępne. Możemy je obserwować i eksperymentować na nim.

Pólya próbował w świetnej książce pod tytułem *Jak to rozwiązać?* uprzytomnić sobie rozumowanie, które matematyk stosuje przy rozwiązywaniu jakiegoś zagadnienia. Formułuje on ogólne prawa rozumowania jako pytania, które sobie stale zadajemy. Każdy student, każdy badacz, a szczególnie każdy nauczyciel powinien przeczytać tę książkę. Zawiera ona wiele zupełnie elementarnych przykładów, podanych w formie pytań i odpowiedzi. Pólya pokazuje, jak nauczyciel może pobudzić ucznia do samodzielnych poszukiwań i to tylko za pomocą ogólnych pytań, które możemy zadać prawie przy każdym zagadnieniu. Są to te same pytania, które także każdy doświadczony matematyk stale sobie zadaje, ale nigdy nie były one sformułowane tak precyzyjnie a mimo to tak ujęte, że są ogólnie stosowalne.

Kiedy przystępujemy do rozwiązania jakiegoś problemu, musimy w pierwszym rzędzie *wyjaśnić sobie problem*. Pytamy przeto: Co jest dane? Co jest szukane? Jakie warunki ma spełniać to, czego szukamy? Sporządzamy, jeżeli to jest możliwe, rysunek. Wprowadzamy odpowiednie oznaczenia. Rozkładamy postawiony warunek na części. Zapisujemy częściowo warunki możliwie przejrzyście.

Następnie należy *sporządzić plan*. Szukamy zależności między tym, co jest dane, a tym co jest szukane. Rozkładamy założenie na części. Pytamy, czy z tego, co jest dane, względnie jego poszczególnych części można wyprowadzić coś pożytecznego.

W większości wypadków jeszcze bardziej celowe jest przyjąć za punkt wyjścia to, czego szukamy. To są metody postępowania *analizy*, które już Pappos przedstawił bardzo wyraźnie: „Weźmy to, co jest szukane, mówi Pappos, jak gdyby było ono już czymś pewnym. Wyprowadzajmy zeń coraz to dalsze wnioski tak długo, aż dojdziemy do tego, co jest dane. W końcu spróbujmy wnioski odwrócić i tak od tego, co jest dane, dojść do tego, co jest szukane".

Jeśli tematem zagadnienia jest nie konstrukcja, lecz dowód, to szukamy — często z dobrym skutkiem — *dowodu niewprost*. Przyjmujemy, że teza jest fałszywa, i dołączając jeszcze także to, co jest szukane, wyciągamy tak długo wnioski, aż napotkamy na sprzeczność. Często udaje się nam następnie przeprowadzić dowód wprost, lecz znalezienie dowodu niewprost jest nieraz łatwiejsze, ponieważ możemy przy tym więcej założyć, a mianowicie to, co jest dane, i zaprzeczenie tezy. Rozumując z obu stron, mamy szanse spotkania się po środku.

Bardzo owocną jest także *analogia*. Szukamy pokrewnego lub podobnego problemu i pytamy: Czy możemy zastosować tę samą metodę albo czy możemy wykorzystać wynik?

Często bardzo pomaga pytanie: Przyjrzyj się niewiadomej! Czy znasz zagadnienia mające tę samą niewiadomą, albo zagadnienie mające podobną niewiadomą?

Jeżeli to wszystko nie da rezultatu, to formułujemy zagadnienie inaczej, szukamy zagadnienia równoważnego. W szczególności wracamy do definicji. Określenie paraboli wywołuje w naszym umyśle zupełnie inne koncepcje niż samo słowo parabola. Te inne koncepcje, które w ten sposób wprawiamy w ruch, są może właśnie tymi właściwymi, prowadzącymi do rozwiązania.

Następnie możemy tworzyć warianty zagadnienia. Szukamy skromniejszego, bardziej szczegółowego zagadnienia, albo szukamy ogólniejszego zagadnienia, którego szczególnym przypadkiem jest nasze. Możemy też tworzyć warianty założenia albo tezy. Możemy rozwiązać najpierw część zagadnienia, spełnić część warunku.

Jeżeli to wszystko nie prowadzi do celu, to musimy szukać ogniw pośrednich. Najczęściej wychodzimy przy tym od końca. Mówimy: jeśli miałbym to, to mógłbym rozwiązać także zagadnienie. Stawiamy sobie przeto zagadnienie pomocnicze, prowadzimy linię pomocniczą albo przyjmujemy przede wszystkim jakieś twierdzenie pomocnicze jako prawdziwe.

Jeżeli mamy już jakiś plan, to przy jego *realizacji* mogą wyłonić się nowe zagadnienia. Poszczególne kroki naszego rozumowania muszą być dokładnie przeprowadzone, to, co było tymczasowo przyjęte jako prawdziwe, musi być starannie udowodnione. To wszystko, co dotyczy pierwotnego zagadnienia, dotyczy również nowych zagadnień.

Jeżeli całkowite rozwiązanie problemu zostało znalezione, to na ogół uczeń z westchnieniem ulgi odłoży pióro na bok.

Lecz doświadczony matematyk *rzuci okiem wstecz*. Przede wszystkim spyta, co jest istotnego w zastosowanej metodzie? Czy mogę to zrobić krócej? Czy mogę tę samą metodę zastosować do innych zagadnień? Albo: Czy wynik mogę wyzyskać w dalszej pracy?

Wyszkolonemu matematykowi może się to wszystko wydać trywialne. On postępował przecież zawsze w ten sposób: A jednak jest to dziwne, że to wszystko daje się wypowiedzieć tak ogólnie, a mimo to tak precyzyjnie.

Moglibyśmy jednak w końcu zaprotestować: „Tak, lecz bez pomysłu to wszystko nic nie daje".

Zarzut jest uzasadniony. Wydaje mi się jednak, że świadome rozumowanie przygotowuje pomysł. Świadome myślenie uruchamia koncepcje we właściwy sposób; ono wyznacza cel i nadaje właściwy kierunek. Jeżeli zagadnienie ujmiemy właściwie i przywołamy do pomocy właściwe analogie z rozwiązanymi już zagadnieniami, to często wystarczy zupełnie prosty pomysł.

Jako przykład rozpatrzmy najsłynniejsze odkrycie Archimedesa: objętość i pole powierzchni kuli. Archimedes udowodnił, że objętość kuli

równa się dwóm trzecim objętości walca opisanego na niej oraz że jej pole powierzchni równa się poczwórnemu polu powierzchni koła wielkiego. Na jego grobowcu wykuto na jego własną prośbę płaskorzeźbę przedstawiającą kulę i walec. Sam Archimedes traktował to odkrycie jako bardzo ważne i piękne.

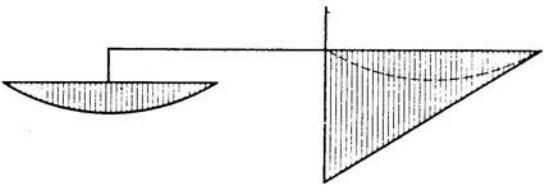
O tym, w jaki sposób Archimedes doszedł do tego odkrycia, dowiadujemy się na szczęście z rozprawy przez niego samego napisanej, znanej pod nazwą *Ephodos*, to znaczy *Metoda*.

Najpierw znalazł Archimedes objętość kuli. Następnie próbował wyznaczyć pole powierzchni. Kierował się, jak sam o tym mówi, analogią z kołem „Czy znasz pokrewne zagadnienie?" — tak brzmi jedno z regularnie powtarzających się u Pólyi pytań, a analogia między kołem a kulą rzeczywiście nasuwała się Archimedesowi. Pole powierzchni koła, to wiedział już Archimedes, równa się polu powierzchni trójkąta, którego podstawa równa się obwodowi koła, a wysokość jest równa promieniowi koła. Podobnie więc, tak rozumował, kula będzie miała tę samą objętość, co stożek, którego podstawa ma pole powierzchni równe polu powierzchni kuli, i którego wysokość równa się promieniowi kuli. Poza tym wiedział on już, że objętość kuli równa się dwóm trzecim objętości walca opisanego na kuli, a więc jest cztery razy większa od objętości walca, którego wysokością jest promień kuli, a podstawą koło wielkie. Z tego wywnioskował, że pole powierzchni kuli jest cztery razy większe od pola koła wielkiego. Archimedes zdawał sobie zupełnie jasno sprawę, że to nie jest dowód, lecz był przeświadczony, że wynik jest dobry. A to już jest bardzo cenne, „bo jeżeli zdobyło się już pewną informację o tym, co jest szukane", tak pisze on sam, „to daleko łatwiej przeprowadzić dowód, niż wtedy, gdy się jeszcze nic nie wie".

Jak więc Archimedes znalazł objętość kuli? Znowu przez analogię z już rozwiązanym zagadnieniem. W tej samej mianowicie rozprawie *Ephodos* opowiada nam Archimedes, jak przy pomocy mechanicznej metody obliczył pole powierzchni odcinka paraboli.

Archimedes wyobraża sobie, że odcinek paraboli jest wycięty z cienkiej płytki metalowej, i zawiesza go w całości na końcu ramienia dźwigni (rys. 1). Przeprowadza rozumowanie w ten sposób, że można je zastosować także i do odcinków pochyłych; w niniejszym jednak rozważaniu, aby zwiększyć poglądowość, przyjmiemy, że odcinek paraboli posiada pionową oś symetrii, i zawieszamy go na poziomym ramieniu dźwigni. Obydwa ramiona są równe cięciwie odcinającej odcinek paraboli. Na drugim ramieniu zawieszamy trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna jest równoległa do stycznej do paraboli, tak że w trójkąt możemy dokładnie wpisać przystający odcinek paraboli. Trójkąt, w przeciwieństwie do odcinka, zostaje zawieszony nie na końcu ramienia dźwigni, lecz wisi bezpośrednio na ramieniu wierzchołkiem przy zewnętrznym końcu.

Teraz twierdzi, że odcinek paraboli równoważy trójkąt. Aby to uzasadnić, tnie odcinek pionowymi prostymi na wąskie paski, tak wąskie, że każdy pasek można uważać za odcinek. Podobnie rozcinamy trójkąt na wąskie paski pionowe, które uważamy za odcinki. Każdy z tych „odcin-



Rys. 1

ków" równoważy pewien „odcinek" paraboli; wynika to bezpośrednio z równania paraboli i zasady dźwigni, którą Archimedes sam odkrył. A więc, wnioskuje on, cały odcinek paraboli, który składa się przecież ze wszystkich tych pasków, musi równoważyć cały trójkąt.

Z drugiej strony, możemy trójkąt zawiesić także w środku ciężkości; nie ma to wpływu na jego oddziaływanie na dźwignię. Jeżeli przyjmiemy ramię dźwigni jako wysokość trójkąta, to środek ciężkości pada w jednej trzeciej wysokości. Ponieważ zaś ramię dźwigni, na którym wisi odcinek paraboli, jest trzy razy większe od ramienia dźwigni trójkąta do środka ciężkości, więc ciężar metalowego trójkąta musi być trzy razy większy od ciężaru odcinka paraboli, to znaczy, że pole powierzchni odcinka równa się jednej trzeciej pola powierzchni trójkąta.

Oczywiście nie jest to dowód, gdyż powierzchnia nie jest sumą odcinków, ale jest na pewno czymś przekonywającym.

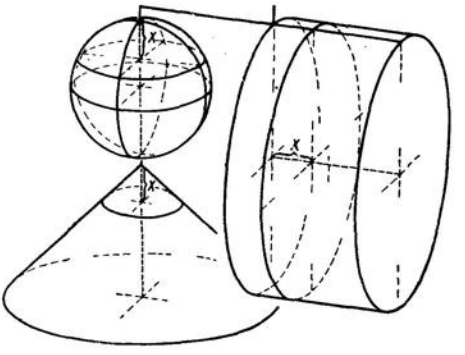
To przecież odkrył Archimedes już wcześniej. Teraz postawił sobie zagadnienie znalezienia tą samą metodą objętości kuli. Wyobraził sobie, że na końcu jednego ramienia dźwigni wisi pełna kula i pytał, co trzeba zawiesić na drugim ramieniu, aby nastąpiła równowaga.

Jeżeli analogicznie potniemy pełną kulę równoległymi płaszczyznami na płaskie krążki i jeżeli oznaczymy przez x odległość takiej płytki od jednego z biegunów (rys. 2.), to pole powierzchni takiej płytki jest wprost proporcjonalne do $x(d-x)$. Współczesny sposób oznaczenia zdradza już, że chodzi tu o próbę z mojej strony wczucia się w tok myśli Archimedesa, a nie o autentyczne rozumowanie.

Jeżeli teraz w odległości x drugie ramie obciążymy elementem powierzchniowym proporcjonalnym do $d-x$, to te kawałki powierzchni utworzą bryłę, która równoważy się z kulą. Moglibyśmy na przykład przyjąć, że bryła ta ma kształt graniastosłupa trójkątnego. Sytuacja będzie wówczas dokładnie taka sama, jak w przypadku paraboli. Aby znaleźć wysokość graniastosłupa, należałoby najpierw rozstrzygnąć kwadraturę koła, bo pole

powierzchni jednej z prostokątnych ścian bocznych graniastosłupa musi być cztery razy większe od pola powierzchni koła wielkiego kuli.

Archimedes przeto mógłby tak postąpić, ale nie postąpił. Wybrał bardziej eleganckie rozwiązanie, przy którym zastosował tylko bryły obrotowe. Zawiesza on na tym samym ramieniu dźwigni, na którym wisi kula, jeszcze stożek o wysokości równej średnicy kuli i o podstawie, której promień równy jest tejże średnicy. Pole powierzchni przekroju kolistego w odległości x od wierzchołka stożka jest wprost proporcjonalne do x^2. Jeżeli dodamy to do poprzednio znalezionego $x(d-x)$, to stosując zupełnie prostą regułę liczenia, którą znajdujemy zupełnie wyraźnie zapisaną nawet u Euklidesa, otrzymujemy xd. A więc suma obydwu płaskich krążków, zawieszonych na końcu ramienia dźwigni o długości d, równoważy się z płaskim krążkiem o stałym promieniu d, zawieszonym w odległości x od punktu podparcia dźwigni. Te płaskie krążki tworzą razem walec o wysokości d, którego promień podstawy również jest równy d. Jeżeli przeto zawiesimy ten walec na drugim ramieniu dźwigni tak, jak to jest pokazane na rysunku, to równoważy on kulę i stożek razem wzięte.



Rys. 2

Dokładnie tak, poza oznaczeniami, przebiega rozumowanie Archimedesa. Widzimy przeto: Jeżeli już władamy zasadniczą myślą metody dźwigni, to wszystko pozostałe znajdujemy łatwo przez analogię do bardziej prostego przypadku paraboli. To, że Archimedes dołącza stożek, żeby wyeliminować wyraz drugiego stopnia x^2, było małym, choć wdzięcznym, pomysłem, lecz nie było bezwzględnie konieczne; pomysł z graniastosłupem udałby się również.

Skoro Archimedes w ten sposób znalazł objętość i pole powierzchni kuli, zjawiło się nowe pytanie, mianowicie: Jak to udowodnić?

I znowu jego przewodnikiem była analogia z kołem. Powierzchnię koła już Eudoksos przybliżał od wewnątrz i zewnątrz poprzez wieloboki foremne wpisane i opisane. Eudoksos udowodnił, że pole powierzchni zawartej między obydwoma wielobokami możemy uczynić dowolnie małym, a stąd wniosek, że pole powierzchni koła jest wprost proporcjonalne do kwadratu zbudowanego na promieniu.

Archimedes wyobraża sobie kulę jako bryłę powstałą przez obrót koła dookoła jednej ze średnic. Obraca on foremny wielobok wpisany i opisany również dookoła wspólnej przekątnej i otrzymuje w ten sposób dwie bryły obrotowe, które zawierają kulę między sobą. Jedna bryła jest większa od

kuli, druga — mniejsza, a różnicę między ich objętościami możemy uczynić dowolnie małą. To samo odnosi się do pola powierzchni. Otóż w przypadku powierzchni zagadnienie polega na tym, aby udowodnić, że poczwórne pole powierzchni koła wielkiego jest również mniejsze od pola powierzchni zewnętrznej bryły obrotowej, lecz większe od pola powierzchni wewnętrznej bryły obrotowej. Jeżeli to się ma, to na mocy znanych wniosków wynika stąd, że pole powierzchni kuli nie może być ani mniejsze, ani większe od poczwórnego pola powierzchni koła. W ten sposób zagadnienie znacznie się upraszcza: zamiast równania na nieznane pole powierzchni kuli mamy jedynie wyprowadzić nierówności między znanymi polami powierzchni koła i stożka. Ostatecznie sprowadza się wszystko do planimetrycznej nierówności, dotyczącej sum cięciw w kole. W przypadku objętości sprawa jest nieco bardziej skomplikowana, ale ta metoda doprowadzi ostatecznie również i tutaj do celu.

Żeby sprowadzić to zagadnienie do znacznie łatwiejszego, nie trzeba żadnego nowego pomysłu. Podstawą wszystkiego jest genialna myśl: pomysł z dźwignią. Reszta, to w gruncie rzeczy systematyczne świadome myślenie, wnikliwe i niestrudzone podążanie za podstawową ideą, aż do ostatka. W następnej rozprawce z tego cyklu spodziewam się, że będę mógł wszystko dokładniej przedstawić.

Autentyczne sprawozdania matematyków o sposobie, w jaki dokonywali swoich odkryć, są bardzo rzadkie. Dlatego pozwolę sobie teraz opowiedzieć o swoim własnym przeżyciu.

Czasami trudno, przypominając sobie, rozdzielić ostro pomysł i rozumowanie. Lecz w tym szczególnym przypadku, który mam na oku, dokładne utrwalenie w pamięci przeprowadzonych rozumowań jest przez to ułatwione, że całe rozumowanie odbyło się w toku rozmowy. Byliśmy we trzech: Artin, Schreier i ja, i cały tok rozumowania każdego z nas był natychmiast komunikowany pozostałym.

Dyskutowaliśmy na temat hipotezy Baudeta o postępach arytmetycznych o wyrazach całkowitych. Baudet wyraził przypuszczenie: jeżeli zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielimy na dwie klasy, to co najmniej jedna z tych klas zawiera postęp o l wyrazach, przy czym l może być dowolną liczbą. Artinowi przyświecała pewna myśl; zastanawialiśmy się wspólnie, jak daleko ona prowadzi. Wówczas natknęliśmy się na martwy punkt i przyglądaliśmy się jakiś czas w milczeniu gryzmołom na tablicy. Raptem przyszedł mi do głowy pomysł z tym samym uczuciem całkowitej pewności, o którym wspominają w swoich wypowiedziach Poincaré i Hadamard. Powiedziałem do Artina i Schreiera: „To jest właściwa droga".

Nie chcieli z początku w to uwierzyć. Powiedzieli: „No tak, w najprostszym przypadku tylko dwóch klas i trzywyrazowego postępu arytmetycznego, to jest rzeczywiście tak, ale nie ogólnie". Pokazałem im jednak, że w najbliższym trudniejszym przypadku szczególnym ta sama

myśl dowodu prowadzi do celu. Wówczas przyznali, że dowód został znaleziony ([4]).

Analizując później dokładniej ów pomysł, dochodzę do następującego wniosku: te świadome rozumowania, które przeprowadziliśmy najpierw wspólnie, następnie każdy osobno, miały bardzo istotne znaczenie. Doprowadziły nas one już zupełnie blisko do rozwiązania. Pomysł był tylko tą iskrą, która przeskoczyła, gdy obydwa bieguny zostały bardzo do siebie zbliżone.

W jakim stosunku pozostaje więc pomysł do świadomego rozumowania?

Rozumowanie jest przed pomysłem i po nim. To, co następuje po pomyśle, nie jest już tak istotne: to jest już tylko rozpracowanie znalezionego rozwiązania albo, jak to określa Hindemith w swoim wykładzie o natchnieniu muzycznym, odnalezienie tego, cośmy już w błyskawicznym mgnięciu ujrzeli. Naturalnie przy tym rozpracowaniu mogą powstać nowe zagadnienia; wówczas oczywiście są potrzebne nowe przygotowanie i nowy pomysł.

Główna praca świadomego myślenia ma miejsce przed zjawieniem się pomysłu. Pomysł powinien być przygotowany, powinien być sprowokowany. Do tego trzeba przede wszystkim należycie ustawić zagadnienie i dobrze je zrozumieć. Sformułowanie warunków, którym ma odpowiadać pomysł, nadanie kierunku koncepcjom, oto zadanie świadomego myślenia.

Nieraz koncepcje zawężają się zbytnio do pewnego określonego kierunku. Wówczas znajdujemy się w ślepym zaułku: nie widzimy rozwiązania, które leży nieco na uboczu. W takich przypadkach trzeba nieco poczekać, przejściowo myśleć o czymś innym, oderwać myśli od celu. Wstępne rozumowanie jednak w dalszym ciągu wytycza kierunek, chociaż co prawda w szerszych granicach niż na początku, kiedy koncentrowaliśmy się zdecydowanie w jednym kierunku.

Jedno jest w każdym razie jasne: wszystkie elementy rozwiązania istnieją w świecie naszych koncepcji; w przeciwnym bowiem wypadku nie moglibyśmy przecież w ogóle naszego zagadnienia rozwiązać. Trzeba tylko znaleźć właściwą kombinację. Kierowani analogią z innymi zagadnieniami oraz warunkami i danymi samego zagadnienia szperamy w swoich świadomych i podświadomych przedstawieniach, aż zjawi się właściwa kombinacja.

([4]) Całkowity dowód przedstawiłem później w „Nieuw Archief voor Wiskunde" 15, 212 (1926). A. Chinczyn przedstawił w swojej pięknej książeczce „Trzy perły teorii liczb" historię tego zagadnienia tak, jak gdybym ja sam wynalazł w Getyndze to rozwiązanie, podczas gdy ja już przedtem je wynalazłem wspólnie z Artinem i Schreierem. Do rozumowania, które doprowadziło do rozwiązania, mam nadzieję wrócić w specjalnej rozprawie.

Jest to tak, jak przy poznaniu na nowo, przy przypominaniu sobie na przykład imienia. Najpierw musimy się dobrze człowiekowi przyjrzeć, następnie dajemy podświadomości polecenie wyszukania z archiwum wspomnień o tym człowieku i jego nazwisku.

Lecz jaką rolę gra przy tym poczucie piękna, które tak silnie podkreślają Poincaré i Hadamard. Poincaré formułuje pytanie w ten sposób: Jak podświadomość ma ze wszystkich, a tak wielu możliwych, kombinacji odnaleźć właściwą, to znaczy owocną? Jego odpowiedź brzmi: dzięki poczuciu piękna. Uprzywilejowane są te kombinacje, które nam się podobają.

Nie chcę żadną miarą kwestionować dużego znaczenia poczucia piękna dla naszego procesu myślenia. To, co nam się podoba, interesuje nas najbardziej, a to, co nas interesuje, zostaje w pierwszym rzędzie przywołane do świadomości. Jednak poczucie piękna nie jest czynnikiem decydującym. W przeciwnym bowiem przypadku nie doznawalibyśmy uczucia słuszności, niewzruszonej pewności, które tak często towarzyszą naszym pomysłom. Jest tak, jak przy rozpoznaniu: nie najpiękniejsza twarz, nie najpiękniejsze nazwisko mają być przywołane, lecz właściwe.

Oczywiście, piękne i interesujące twarze łatwiej zachowujemy w pamięci, one narzucają się świadomości bardziej, lecz z tego powodu nie są jeszcze prezentowane świadomości z uczuciem: tak, to ten.

Tak jest również i w matematyce. Piękne, symetryczne, eleganckie kombinacje koncepcji mają więcej szans, by być właściwymi; odnajdujemy je również łatwiej, ponieważ one podobają się nam bardziej, lecz uczucie pewności, które tak często towarzyszy naszym pomysłom, wypływa z innego źródła.

Kwestią doświadczenia jest, że istnieje uczucie niezruszonej oczywistości, intuicyjnej pewności — w matematyce jak i w życiu. Otóż uczucie to wypływa z podświadomości. Spostrzegamy dobrego znajomego i poznajemy go *natychmiast*. To nie opiera się na świadomym porównaniu go z zapamiętanymi obrazami, ponieważ nie uświadamiamy ich sobie wcale. W naszej świadomości występuje tylko przekonanie: to jest on. To przekonanie musi jednak ostatecznie opierać się na porównywaniu ze wspomnieniami. A więc porównania dokonuje się jednak w podświadomości.

Podświadomość jest przeto w stanie nie tylko kojarzyć i wiązać, lecz również *wydawać sądy*. Podświadomość wyrokuje intuicyjnie, lecz wynik w sprzyjających okolicznościach jest zupełnie pewny. Wiemy: To jest on. Poznałem go.

Powracając do matematycznego odkrycia, to reasumując, możemy powiedzieć: Podświadomość ma trzy drogowskazy przy wyborze właściwych kombinacji koncepcji. Po pierwsze, wybiera w sposób uprzywilejowany piękne kombinacje. Po drugie, przy pewnych powiązaniach pojęć dołącza się intuicja słuszności, oczywistości. Wreszcie, podświadomość otrzymała przecież od świadomości polecenie, że szukana kombinacja pojęć ma speł-

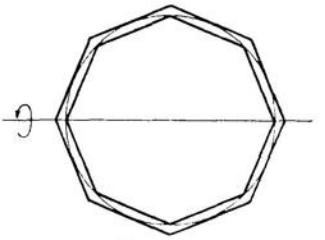
nić te warunki, jakie postawiła świadomość. Poprzez świadome myślenie uprzytomniłem sobie: Jeślibym coś takiego znalazł, wówczas zadanie byłoby rozwiązane. Podświadomość, jak dobry archiwista, znalazła coś, co spełnia te warunki, a więc może ze spokojnym sumieniem przedłożyć i powiedzieć: Oto jest rozwiązanie.

II. Objętość i pole powierzchni kuli według Archimedesa*)

W poprzedniej rozprawie wyjaśniłem, jak Archimedes obliczył objętość i pole powierzchni kuli. Jego metoda dźwigni dała mu pewność, że objętość kuli równa się dwóm trzecim objętości walca opisanego, a pole jej powierzchni jest równe poczwórnemu polu powierzchni koła wielkiego.

Po otrzymaniu tych wyników Archimedes stanął przed zagadnieniem, jak je uzasadnić. Dowody przedstawił w sposób wykończony w pięknej rozprawie pod tytułem *Kula i walec*. Opierając się na przedstawieniu samego Archimedesa zastanowimy się, co w tych dowodach osiągnął przy pomocy systematycznego rozumowania, a jaką rolę odegrał pomysł.

Jak wspomniano, Archimedes zamyka koło między dwa wielokąty foremne opisane i wpisane o parzystej liczbie boków i obraca oba wielokąty wraz z kołem dookoła wspólnej przekątnej (rys. 3). Tak powstają dwie po-



Rys. 3

dobne bryły obrotowe, zamykające między sobą kulę. Aby zaś bryły obrotowe były ograniczone tylko powierzchniami stożkowymi, Archimedes wybiera liczbę boków podzielną przez cztery.

Jest również jasne, dlaczego wybrał bryły obrotowe. Mógłby także wziąć wielościany, ale mamy tylko pięć wypukłych wielościanów foremnych i nie jest rzeczą łatwą utworzyć według określonej reguły ciąg wielościanów nieforemnych, które z dowolną dokładnością przybliżałyby kulę od wewnątrz i od zewnątrz. Obliczenie objętości takiego ciągu wielościanów byłoby w każdym razie bardzo skomplikowane.

Z uwagi prawdopodobnie na to samo przez się nasuwające się rozumowanie wybrał Archimedes najprostsze przydatne bryły, a mianowicie powstałe przez obrót wielokątów foremnych.

*) Opublikowane w *Elemente der Mathematik* 9 (1954).

To, że objętość kuli jest mniejsza od objętości bryły opisanej, a większa od objętości bryły wpisanej, jest jasne, gdyż „całość jest większa od części". Ale z czego można wywnioskować, że pole powierzchni kuli jest również mniejsze od pola powierzchni opisanej, a większe od pola powierzchni wpisanej. Wśród aksjomatów, które znajdujemy u Euklidesa, nie ma takiego, na mocy którego moglibyśmy porównać pola dwóch takich powierzchni. Są więc potrzebne nowe aksjomaty.

Archimedes definiuje przede wszystkim, jaki łuk krzywej lub element powierzchniowy nazywa „zakrzywionym w jedną stronę". Następnie formułuje pięć postulatów:

„Zakładam, że:

1. Ze wszystkich odcinków linii o wspólnych końcach najkrótszy jest odcinek linii prostej.

2. Pozostałe zaś linie, leżące w jednej płaszczyźnie i posiadające wspólne końce, są nierówne, jeżeli są w tę samą stronę wklęsłe i jeżeli jedna jest całkowicie objęta przez drugą oraz odcinek prostej, łączący końce, albo jeżeli jest częściowo objęta, a częściowo pokrywa się z jedną z wymienionych linii. I mianowicie ta, która jest obejmowana, jest krótsza.

3. Podobnie także i spośród elementów powierzchniowych, ograniczonych przez tę samą krzywą płaską, najmniejszym jest płaski element powierzchniowy.

4. Pozostałe zaś powierzchnie, ograniczone przez tę samą płaską krzywą są nierówne, jeżeli są w tę samą stronę wklęsłe i jeżeli jedna powierzchnia jest całkowicie objęta przez drugą i przez płaszczyznę, w której leży krzywa ograniczająca, lub jeżeli jest częściowo objęta, a częściowo pokrywa się z jedną z tych powierzchni. A mianowicie ta, która jest objęta, jest mniejsza.

5. Większa z dwóch danych wielkości czy to linia, czy powierzchnia, czy też bryła, przewyższa mniejszą o różnicę, której dostatecznie duża wielokrotność jest większa od każdej z obu danych wielkości" ([5]).

Te postulaty są poglądowo zrozumiałe. Piąty postulat nie jest nowością, lecz korzystał z niego już Eudoksos przy wyznaczaniu pól powierzchni i objętości. Jest on znany pod nazwą *aksjomatu Archimedesa* lub *postulatu Eudoksosa.*

Z czwartego postulatu bardzo łatwo wynika, że z dwóch powierzchni obrotowych, ograniczających powierzchnię kuli, jedna ma pole mniejsze, a druga większe od pola powierzchni kuli.

Bryły obrotowe możemy łatwo pociąć płaszczyznami prostopadłymi do osi na krążki, z których każdy jest stożkiem ściętym.

([5]) Przekład z tłumaczenia niemieckiego A. Czwaliny, *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, str. 202.

Aby zatem wyznaczyć pole powierzchni kuli, musimy:

(1) Wyznaczyć pole powierzchni bocznej stożka ściętego,

(2) Zsumować pola powierzchni bocznych stożków ściętych,

(3) Udowodnić, że poczwórne pole powierzchni koła wielkiego jest większe od pola powierzchni wewnętrznej bryły obrotowej, lecz mniejsze od pola powierzchni bryły zewnętrznej,

(4) Udowodnić, że różnicę pól powierzchni bryły zewnętrznej i wewnętrznej można uczynić dowolnie małą, to znaczy mniejszą niż pole dowolnie danego elementu powierzchniowego.

(5) Po uporaniu się z powyższymi czterema punktami wnioskujemy na podstawie znanej „metody wyczerpywania" Eudoksosa, że pole powierzchni kuli nie może być ani mniejsze, ani większe niż poczwórne pole powierzchni koła wielkiego, a więc że jest równe poczwórnemu polu powierzchni koła wielkiego.

Dla wyznaczenia objętości kuli należy przeprowadzić podobne rozumowanie.

Widzimy więc, jakie ułatwienia daje ułożenie takiego planu. Zamiast bardzo trudnego zadania mamy pięć dużo łatwiejszych zagadnień. Warunkiem wstępnym możliwości rozłożenia tego zagadnienia jest po pierwsze jasne uświadomienie sobie modelu metody wyczerpywania Eudoksosa, po drugie uprzednia znajomość wyniku, jaki mamy otrzymać, to jest, że ma nim być poczwórne pole powierzchni koła wielkiego. Reszta jest świadomym rozumowaniem.

Teraz Archimedes przystępuje do kolejnego wykonania pięciu punktów.

(1) Pole powierzchni bocznej stożka ściętego jest różnicą pól powierzchni bocznych dwóch stożków o wspólnym wierzchołku. Trzeba przeto przede wszystkim wyznaczyć pole powierzchni bocznej stożka.

Osiągamy to przez przybliżenie od zewnątrz i od wewnątrz według zupełnie podobnego planu. W podstawę stożka wpisujemy i opisujemy na niej dwa wielokąty foremne. Jeżeli połączymy ich boki i wierzchołki z wierzchołkiem stożka, to otrzymamy prawidłowe ostrosłupy, między którymi znajduje się stożek. Teraz Archimedes wyznacza przede wszystkim pola powierzchni bocznych obydwu ostrosłupów (twierdzenia 7 i 8). To jest zupełnie łatwe, pole każdej z obydwu powierzchni jest równe polu powierzchni trójkąta, którego podstawa jest równa obwodowi podstawy ostrosłupa, a wysokość równa się apotemie ściany bocznej.

Następnie Archimedes udowadnia, że pole powierzchni bocznej stożka jest większe od pola powierzchni bocznej ostrosłupa wewnętrznego, a mniejsze od pola powierzchni bocznej zewnętrznego (twierdzenia 9 i 10). To nie jest zupełnie oczywiste. Postulatu 4 nie możemy tu bezpośrednio zastosować, ponieważ porównywanych powierzchni nie ogranicza ta sama

krzywa. Ale mimo to udaje się to przez konsekwentne połowienie łuków okręgu i zręczne szacowanie.

Po tych przygotowaniach łatwo już wyznaczyć pole powierzchni bocznej stożka. Przez bezpośrednie przejście do granicy od ostrosłupa do stożka otrzymałoby się następujące twierdzenie: Pole powierzchni bocznej stożka jest równe polu powierzchni trójkąta, którego podstawą jest obwód podstawy stożka, a którego wysokość równa się tworzącej stożka. To odpowiada naszemu współczesnemu wzorowi

$$F = \pi rs.$$

Ale Archimedes zastępuje rs przez t^2, gdzie t jest średnią proporcjonalną między r i s. Dlatego twierdzenie 14 formułuje on następująco:

Pole powierzchni bocznej stożka prostego równa się polu powierzchni koła, którego promieniem jest średnia proporcjonalna między tworzącą stożka i promieniem jego podstawy.

To sformułowanie jest dlatego odpowiedniejsze, ponieważ szukany wynik końcowy, poczwórne pole powierzchni koła wielkiego kuli, jest również polem powierzchni koła. Jest oczywiście przyjemnie, jeżeli pola powierzchni przybliżających są wyrażone również jako pola powierzchni kół.

Można by przeciwko temu podnieść zastrzeżenie, że pola powierzchni brył obrotowych, zawierających kulę, nie są polami powierzchni bocznych stożków, lecz sumami pól powierzchni bocznych stożków ściętych, a więc że pola ich powierzchni są nie polami powierzchni kół, lecz sumami różnic pól powierzchni. Zupełnie łatwo jednak można przedstawić sumę lub różnicę pól powierzchni również jako pole powierzchni koła. Pola powierzchni kół są według Euklidesa, XII, twierdzenie 2, proporcjonalne do pól kwadratów zbudowanych na ich promieniach, a sumę bądź różnicę pól kwadratów można łatwo przekształcić na pole równoważnego kwadratu.

Sformułowanie twierdzenia 14 przy pomocy pola koła jest szczęśliwym pomysłem, który umożliwia eleganckie wyznaczenie pola powierzchni kuli. Istotny jednak ten pomysł nie jest: równie dobrze udałoby się z prostokątami o bokach r i s. Można by było powiedzieć na przykład tak: Pole powierzchni bocznej stożka ma się tak do pola powierzchni prostokąta o bokach r i s, jak pole koła do pola kwadratu zbudowanego na jego promieniu.

Dowód twierdzenia 14 jest wspaniały w swojej prostocie i jasności. Wszystko rozwija się tak, jak można się było spodziewać z poprzedzającego — w doskonałej harmonii. Pole powierzchni bocznej stożka nie może być ani większe, ani mniejsze od pola koła, a więc musi być mu równe. Klasyczny dowód przez wyczerpywanie według metody Eudoksosa.

Mimochodem wyznacza Archimedes pole powierzchni bocznej walca za pomocą tej samej metody (twierdzenia 11-13).

W twierdzeniu 16 wyznacza Archimedes pole powierzchni bocznej stożka ściętego, oczywiście jako różnicę pól powierzchni bocznych dwóch stożków o wspólnym wierzchołku. Wynik zostaje znowu bardzo elegancko sformułowany:

Pole części powierzchni bocznej stożka, zawartej między równoległymi płaszczyznami, jest równe polu koła, którego promień jest średnią proporcjonalną między odciętą częścią tworzącej, a sumą promieni obydwu przekrojów.

Na tym punkt (1) planu został wyczerpany.

W punkcie (2) zadanie polega na zsumowaniu pól powierzchni bocznych stożków ściętych tworzących bryłę obrotową wpisaną.

Pole powierzchni bocznej każdego ze stożków jest równe polu koła, którego promieniem jest średnia proporcjonalna między tworzącą a sumą promieni obydwu podstaw. To możemy wyrazić również tak: Pole kwadratu zbudowanego na promieniu jest równe polu prostokąta o bokach równych tworzącej i sumie promieni obu podstaw.

Teraz musimy zsumować pola tych wszystkich kół. Ponieważ pola kół są proporcjonalne do pól kwadratów zbudowanych na promieniach kół, wystarczy zsumować pola tych kwadratów. A ponieważ pole kwadratu jest równe polu pewnego prostokąta, wystarczy zsumować pola tych prostokątów. A to jest już bardzo łatwe, ponieważ jeden bok prostokąta, a mianowicie bok obracającego się wielokąta foremnego, jest we wszystkich prostokątach tej samej długości. Jeżeli przeto umieścimy te prostokąty o równej podstawie jeden na drugim, to jako całkowitą wysokość otrzymujemy sumę promieni wszystkich kół brzegowych liczonych dwukrotnie, czyli sumę średnic wszystkich tych kół. Tak wyłącznie przy pomocy rozumowania otrzymujemy jako wynik twierdzenie 24:

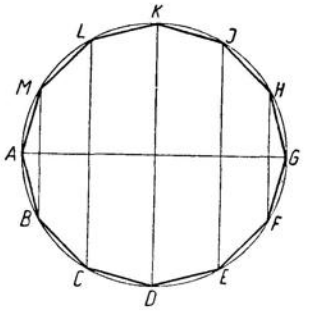
Pole powierzchni bryły wpisanej w kulę jest równe polu koła, którego promień podniesiony do kwadratu równa się polu prostokąta, którego jeden bok równa się bokowi wielokąta, a drugi sumie tych przekątnych wielokąta, które są rozpięte na dwóch kolejnych bokach (jak BM na rysunku 4).

To sformułowanie jednak nie nadaje się do dalszego rozumowania. Mamy bowiem do czynienia z prostokątem, którego jeden bok jest bardzo mały i który przy zwiększeniu liczby boków dąży do zera, podczas gdy drugi bok jest bardzo mało dogodną do rachunku sumą przekątnych, która przy zwiększaniu liczby boków rośnie nieograniczenie. Teraz trzeba udowodnić, że pole tego wydłużonego prostokąta jest mniejsze od pola kwadratu zbudowanego na średnicy koła. W tym celu musimy tak przekształcić prostokąt, zwiększając mniejszy bok i zmniejszając w tym samym stosunku większy bok, aby pole powierzchni nie zmieniło się. Jak to należy zrobić?

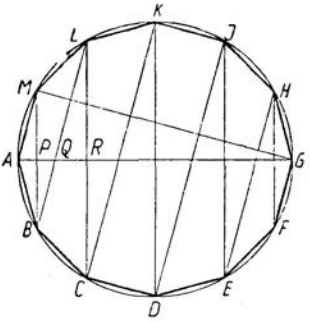
I tu potrzebny jest pomysł. Można jednak warunki, które ma on spełnić, sprecyzować jeszcze nieco dokładniej. Większy bok prostokąta jest umą równoległych przekątnych. Jeżeli te wszystkie przekątne zmniej-

szymy w tym samym stosunku, to ich suma również zmniejszy się w tym samym stosunku. Jest przy tym pożądane, aby zmniejszone odcinki były tak umieszczone, żebyśmy mogli ich sumę zmieścić bezpośrednio w figurze.

Aby to osiągnąć, kreśli Archimedes równoległe do AM przekątne BL, CK, DJ i EH. W ten sposób powstają wyłącznie podobne trójkąty prostokątne, jak APM, QPB, QRL itd. (rys. 5). Jeżeli



Rys. 4



Rys. 5

przeto równoległe do MB przekątne zostają podzielone na połowy, a te połowy zmniejszone w stosunku większej przyprostokątnej do mniejszej, to otrzymamy odcinki AP, PQ, QR itd., których sumą jest przekątna AG. Trójkąt prostokątny AMG jest także podobny do pozostałych trójkątów; otrzymujemy przeto proporcję:

$$(MB+LC+KD+JE+HF):AG = MG:AM,$$

którą Archimedes podaje jako twierdzenie 21.

Z tej proporcji otrzymujemy natychmiast żądaną równość powierzchniową: pole prostokąta, którego boki są równe wyrazom skrajnym, równa się polu powierzchni prostokąta o bokach AG i MG. To pole zaś jest oczywiście mniejsze od pola kwadratu zbudowanego na AG. A więc pole powierzchni bryły wpisanej w kulę jest mniejsze od pola powierzchni koła o promieniu AG, to znaczy mniejsze niż poczwórne pole powierzchni koła wielkiego kuli (twierdzenie 25).

Dokładnie w ten sam sposób udowadnia, że pole powierzchni bryły opisanej jest większe od poczwórnego pola powierzchni koła wielkiego (twierdzenie 30). Bryła opisana jest mianowicie podobna do bryły wpisanej; pole jej powierzchni jest przeto równe polu koła, którego promień równa się bokowi kwadratu o polu równym polu prostokąta o bokach TS i TU (rys. 6). To zaś pole jest większe od pola kwadratu zbudowanego na TU a TU równa się średnicy VW koła.

Na tym punkt (3) planu został wyczerpany. To, cośmy dotychczas osiągnęli, daje się ująć w dwie nierówności:

(6) Pole powierzchni wpisanej $<$ pola powierzchni kuli $<$ pola powierzchni opisanej.

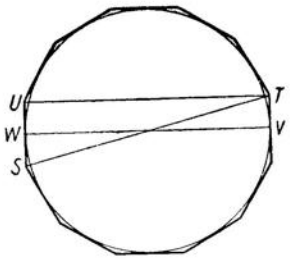
(7) Pole powierzchni wpisanej $<$ poczwórnego pola koła wielkiego $<$ $<$ pola powierzchni opisanej.

Teraz należy przeprowadzić odpowiednie rozumowanie dla objętości.

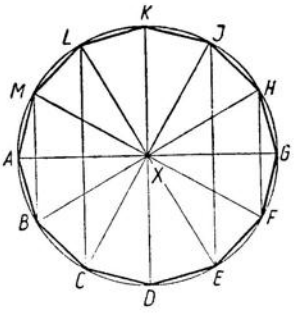
Można byłoby bryłę obrotową wpisaną podzielić na stożki ścięte. Ale objętość stożka ściętego jest bardzo skomplikowanym wyrażeniem, a zsumowanie tych wyrażeń nie jest rzeczą łatwą.

Archimedes dzieli przeto bryłę inaczej. Dzieli on (twierdzenie 26) wielokąt wpisany $ABC \ldots M$ (rys. 7) przede wszystkim na trójkąty, jak np. XLM, o wspólnym wierzchołku w środku X. Przez obrót trójkąta XAM dookoła osi AG powstaje stożek podwójny, który składa się z dwóch stożków o wspólnej podstawie MB i wierzchołkach w X i A. Przez obrót powstałych trójkątów powstają również bryły obrotowe, które dają się przedstawić jako różnice stożków podwójnych.

Te wszystkie bryły obrotowe tworzą naszą wpisaną bryłę obrotową.



Rys. 6



Rys. 7

Tak jak skomplikowane wydają się te bryły obrotowe, tak proste jest wyrażenie na ich objętość. Okazuje się bowiem, że bryła obrotowa powstała przez obrót trójkąta XLM ma objętość równą objętości stożka o podstawie, której pole równa się polu powierzchni bocznej stożka ściętego $MBCL$, i wysokości równej odcinkowi prostopadłej do LM z punktu X. Analogicznie dla pozostałych trójkątów.

Jak wpadł Archimedes na powyższy sposób podziału? Skąd wzięło się przypuszczenie, że objętości właśnie tych brył obrotowych dadzą się tak prosto wyrazić?

Sądzę, że na te pytania możemy dać odpowiedź na podstawie własnych wypowiedzi Archimedesa:

Archimedes pisze w „Ephodos": „Podobnie jak pole koła jest równe polu trójkąta, którego podstawa równa się obwodowi koła, a wysokość promieniowi, podobnie, myślałem, objętość kuli będzie równa objętości stożka,

którego podstawa równa się polu powierzchni kuli, a wysokość promieniowi kuli".

Archimedes sam nam mówi, jak wpadł na to, a mianowicie przez analogię z kołem. Ale jak przekonywamy się w przypadku koła, że ma ono pole takie jak trójkąt, którego wysokość równa się promieniowi, a podstawa obwodowi koła? Zupełnie prosto: przede wszystkim w sposób nieścisły dzieląc koło na nieskończenie wąskie trójkąty o wspólnym wierzchołku w środku M. Następnie ściśle, przybliżając koło od wewnątrz i od zewnątrz przez wielokąty, które można podzielić na trójkąty o wierzchołkach w punkcie M. Przejście do granicy lub dowód metodą wyczerpywania daje nam nową tezę.

Podobne rozważania można również przeprowadzić i dla kuli. Jeśli wyobrazimy sobie, że kulę podzieliliśmy na nieskończenie wąskie ostrosłupy o wierzchołkach w środku kuli, to suma objętości tych ostrosłupów równa się objętości jednego ostrosłupa o tej samej wysokości i o podstawie, której pole równa się polu powierzchni kuli. Ten sam sposób rozumowania wykazuje nam zupełnie ściśle, że objętość wielościanu opisanego na kuli równa się objętości ostrosłupa o wysokości równej promieniowi kuli i podstawie, której pole równa się polu powierzchni wielościanu. Przechodząc do granicy, otrzymujemy ten sam wynik dla kuli.

Taki był tok myśli, które snuły się, jak to odtworzono, w głowie Archimedesa, zanim zabrał się do ścisłego przeprowadzenia dowodu. I oto, gdy przystępował do wyznaczania objętości wpisanych i opisanych brył obrotowych, wpadł on na następujący pomysł: „*To, co odnosi się do wielościanu opisanego i do kuli, odnosi się także do brył obrotowych opisanych. Także ich objętości są równe objętościom ostrosłupów lub stożków o wysokości równej promieniowi kuli i podstawie, której pole w każdym wypadku równa się polu powierzchni odpowiedniej bryły obrotowej*".

To, cośmy ostatnio sformułowali, jest dokładnie treścią twierdzenia 31. Odpowiednią tezę dla bryły wpisanej znajdujemy w twierdzeniu 26. Nie oddaliliśmy się przeto od autentycznego toku myśli Archimedesa.

W tej samej chwili, kiedy wpada się na właśnie sformułowany pomysł, widzi się także słuszność tezy. Stożki ścięte, z których składa się bryła obrotowa, można przybliżać przy pomocy ostrosłupów ściętych. Dla tak powstałego opisanego wielościanu teza jest słuszna, a więc przez przejście do granicy słuszność jej wynika także i dla bryły obrotowej.

W dowodzie dla wielościanu powiązaliśmy poszczególne powierzchnie boczne ze środkiem kuli przy pomocy ostrosłupów. Teza jest więc również słuszna nie tylko dla całego wielościanu, lecz również dla poszczególnych ostrosłupów. Jeśli teraz powiążemy podobnie poszczególne powierzchnie boczne stożków ściętych, z których składa się powierzchnia bryły obrotowej, ze środkiem X, to otrzymamy dokładnie użyte przez Archimedesa bryły obrotowe. W ten sposób pomysł Archimedesa daje się łatwo objaśnić.

To wszystko, co tu w tak długi sposób wyjaśniono, rozgrywa się w głowie matematyka klasy Archimedesa w jednej chwili, na kształt błyskawicy. Wszystko jest przecież tak poglądowe i jasne!

Dokładne przeprowadzenie dowodów nie było dla Archimedesa rzeczą trudną. W twierdzeniu 18 zostaje wyznaczona objętość podwójnego stożka, w twierdzeniu 19 reszta po odjęciu od stożka stożka podwójnego, w twierdzeniu 20 różnica dwóch stożków podwójnych.

W tym miejscu opis Archimedesa nie oddaje wyraźnie leżącego u podstaw toku myśli. Przede wszystkim nie widać wcale, po co są potrzebne twierdzenia 18 do 20; to okazuje się dopiero znacznie później, przy zastosowaniu do kuli.

Twierdzenie 18 brzmi następująco: Objętość stożka podwójnego złożonego z dwóch prostych stożków obrotowych o wspólnej podstawie równa się objętości stożka prostego, o podstawie, której pole równa się polu powierzchni bocznej jednego stożka, i wysokości równej odcinkowi poprowadzonemu z wierzchołka drugiego stożka prostopadle do tworzącej pierwszego. Dowód jest tylko weryfikacją *ex post*; nie oddaje on żadną miarą toku myśli, który doprowadził do twierdzenia. Szczęśliwie byliśmy jednak w stanie drogą analizy założeń planu całej rozprawy zrekonstruować tok myśli we wszystkich istotnych punktach.

Sumując poszczególne części schodzące się w środku otrzymuje Archimedes objętości wewnętrznej i zewnętrznej bryły obrotowej (twierdzenia 26 i 30). Według twierdzenia 26 objętość wewnętrznej bryły jest równa objętości stożka o podstawie, której pole równa się polu powierzchni bryły wewnętrznej, a więc jest mniejsze od poczwórnego pola koła wielkiego, i wysokości równej odcinkowi poprowadzonemu ze środka kuli prostopadle do boku wielokąta, mniejszej przeto od promienia kuli. A więc objętość wewnętrznej bryły obrotowej jest mniejsza od objętości stożka o podstawie, której pole równa się polu czterech kół wielkich i wysokości równej promieniowi kuli (twierdzenie 27). Podobnie objętość zewnętrznej bryły obrotowej jest większa od objętości tegoż stożka. Otrzymujemy przeto dla objętości następujące nierówności:

(8) Objętość bryły wewnętrznej $<$ objętości stożka $<$ objętości bryły zewnętrznej.

Poza tym mamy oczywiście:

(9) Objętość bryły wewnętrznej $<$ objętości kuli $<$ objętości bryły zewnętrznej.

W ten sposób udowodniliśmy potrzebne do dowodu metodą wyczerpywania nierówności zarówno dla objętości, jak i dla pól powierzchni.

Klasyczny dowód metodą wyczerpywania, tak jak go przeprowadził Archimedes, np. dla odcinka paraboli, ma następujący przebieg: Element

powierzchniowy paraboli, którego pole mamy obliczyć, zawieramy przede wszystkim między dwiema znanymi powierzchniami A i B:

$$A < P < B. \tag{10}$$

Jeśli teraz chce się udowodnić, że pole odcinka paraboli jest równe $\frac{2}{3}D$, gdzie D jest polem trójkąta opisanego, to należy przede wszystkim udowodnić, że $\frac{2}{3}D$ zawiera się w tych samych granicach:

$$A < \tfrac{2}{3}D < B. \tag{11}$$

Następnie wykazuje się, że różnica $B-A$ może być mniejsza od każdego dowolnego pola F:

$$B-A < F. \tag{12}$$

Z (10), (11) i (12) wynika łatwo, że P nie może być ani mniejsze, ani większe od $\frac{2}{3}D$. Gdyby bowiem P było większe od $\frac{2}{3}D$, to ponieważ F można obrać dowolnie, można by za F przyjąć różnicę i przy odpowiednim doborze A i B otrzymuje się

$$B-A < F = P-\tfrac{2}{3}D < B-A,$$

co jest niemożliwe. Gdyby P było mniejsze od $\frac{2}{3}D$, to można wziąć znowu za F różnicę i dostaje się

$$B-A < F = \tfrac{2}{3}D-P < B-A,$$

co również jest niemożliwe. A więc $F = \frac{2}{3}D$.

Dla postawionego celu Archimedes ten klasyczny sposób dowodu zmodyfikował nieco, mówiąc nie o różnicy $B-A$, lecz o stosunku $B:A$. Zamiast dowodzić, że można różnicę $B-A$ uczynić mniejszą od każdej danej tego samego rodzaju wielkości F, dowodzi on, że można stosunek $B:A$ uczynić mniejszym od danego stosunku odcinków $b:a$, gdzie $b > a$. Rachunki są łatwiejsze, gdy wprowadzić stosunek zamiast różnicy, gdyż pola powierzchni obu podobnych brył obrotowych mają się do siebie tak, jak kwadraty odpowiednich odcinków, a objętości jak ich sześciany.

Tą zmodyfikowaną metodą wyczerpywania dowodzi Archimedes, że pole powierzchni kuli jest równe polu powierzchni czterech kół wielkich, a objętość jest cztery razy większa od objętości stożka, którego podstawą jest koło wielkie, a wysokością — promień kuli. Jednak według Eudoksosa objętość tego stożka jest równa jednej trzeciej objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości; a więc objętość kuli równa się $\frac{4}{3}$ objętości tego walca, to znaczy $\frac{2}{3}$ objętości opisanego na niej walca.

Jeżeli spojrzymy teraz na całość dowodu, to zobaczymy, że można go pojąć jako wynik godnego podziwu przenikliwego i świadomego rozumowania. Kilka pomysłów (jak zamiana powierzchni bocznej stożka na koło o takim samym polu i użycie przy końcu stosunków zamiast różnic) służą jedynie eleganckiemu przedstawieniu dowodu. Istotnymi były tylko dwa

pomysły: po pierwsze wykreślenie w figurze 3 przekątnej równoległej do jednego boku, po drugie podzielenie bryły obrotowej na części schodzące się w środku X i powstałe przez obrót trójkątów. Widzieliśmy jednak, jak drogą świadomego rozumowania, można pomysły wręcz sprowokować, uświadamiając sobie dokładnie, jakie trudności trzeba w odpowiednim miejscu pokonać i jakie warunki ma spełnić szukane przekształcenie lub podział.

III. Dowód hipotezy Baudeta *

W pierwszej rozprawie z tej serii poinformowałem krótko o pomyśle, dla którego wskutek szczęśliwego zbiegu okoliczności mogły być dokładnie opisane warunki, w jakich powstał. Teraz przedstawię to bardziej szczegółowo.

Zmarły przedwcześnie matematyk holenderski Baudet wypowiedział następującą hipotezę:

„Jeżeli zbiór liczb naturalnych 1, 2, 3, ... podzielimy na dwie klasy, to co najmniej jedna z tych klas zawiera postęp arytmetyczny o l wyrazach, gdzie l jest dowolną z góry daną liczbą naturalną".

Gdy Artin, Schreier i ja rozmawialiśmy w Hamburgu w 1926 r. przed tablicą ścienną Artina o tej hipotezie, udało się nam wspólnie ją udowodnić. Jedna bardzo istotna myśl pochodzi przy tym od Artina. Pomysł jednak, który w końcu przyniósł rozwiązanie, wyszedł ode mnie.

Przypadek dwuwyrazowego postępu $l = 2$ jest trywialny: jeżeli dzielimy trzy liczby na dwie klasy, to dwie z nich muszą należeć do tej samej klasy.

Również w przypadku $l = 3$ nie trzeba rozpatrywać wszystkich liczb naturalnych, lecz tylko liczby od 1 do 9. Przy każdym podziale tych liczb na dwie klasy, jedna z nich zawiera trzywyrazowy postęp; to udowadniamy, rozpatrując wszystkie możliwe przypadki. Można na przykład tak postąpić:

Klasę, która zawiera liczbę 1, można nazwać pierwszą. Zależnie od tego, do których klas należą liczby 2, 3 i 4, otrzymujemy osiem możliwych przypadków. Jako przykład rozpatrzmy przypadek, gdy 1 i 2 należą do klasy pierwszej, a 3 i 4 do drugiej.

Jeżeli 5 należy do klasy drugiej, to mamy postęp 3, 4, 5. Możemy przeto przyjąć, że 5 należy do klasy pierwszej.

Jeżeli 8 należy do klasy pierwszej, to mamy postęp 2, 5, 8. Niech więc 8 należy do klasy drugiej.

Jeżeli 6 należy do klasy drugiej, to mamy 4, 6, 8. Niech zatem 6 należy do klasy pierwszej.

---

* Opublikowane w *Elemente der Mathematik* 9(1954).

Jeżeli chcemy uniknąć postępu 5, 6, 7, to musimy 7 zaliczyć do klasy drugiej.

Liczba 9 dostaje się w sytuację bez wyjścia. Jeżeli należy do klasy pierwszej, to mamy postęp 1, 5, 9, jeśli zaś do klasy drugiej, to mamy postęp 7, 8, 9.

Podobnie, lub jeszcze łatwiej, rozpatrujemy wszystkie inne przypadki. To wszystko rozważyłem jeszcze przed spotkaniem z Artinem i Schreierem.

Schreier postawił teraz pytanie, czy hipotezę Baudeta można wzmocnić w tym sensie, że rozpatruje się zawsze tylko skończoną ilość wyrazów początkowych ciągu liczbowego, innymi słowy, że istnieje kres $N(l)$, taki że już przy podziale liczb od 1 do $N(l)$ na dwie klasy jedna z klas zawiera l-wyrazowy postęp. Na to pytanie można było dać łatwo odpowiedź. Rozumowaliśmy, że gdy hipoteza Baudeta jest w ogóle prawdziwa, to istnieje również takie $N(l)$. Znany sposób rozumowania z teorii mnogości, „metoda przekątnych", prowadzi do tego wyniku. Nie zachodzi konieczność odtwarzania tu tej metody, ponieważ ona nie odgrywa już żadnej roli w dalszych rozważaniach.

Próbowaliśmy teraz udowodnić przypuszczenie od razu w postaci wzmocnionej z kresem $N(l)$. Jeżeli twierdzenie ma być udowodnione ewentualnie za pomocą indukcji zupełnej, to takie finitystyczne wzmocnienie może być tylko korzystne; tak rozumowaliśmy.

Artin zauważył wówczas, że jeżeli przypuszczenie jest ogólnie słuszne dla dwóch klas, to musi być również słuszne dla k klas. Niech na przykład $k = 4$. Wówczas możemy przede wszystkim klasy te złączyć po dwie i dwie. Tak otrzymamy mniej dokładny podział na tylko dwie klasy. W jednej z nich musi znajdować się postęp arytmetyczny o $N(l)$ wyrazach. Wyrazy tego postępu można ponumerować od 1 do $N(l)$. Te numery pojawiają się znowu w dwóch klasach ściślejszego podziału na klasy, i zgodnie z twierdzeniem, które przyjęliśmy jako prawdziwe dla dwóch klas, w jednej z tych klas musi znajdować się postęp o l wyrazach.

Tak przechodzimy z dwóch klas na cztery, dokładnie tak samo z czterech na osiem klas itp. Przeto liczba klas może być dowolnie duża.

Próbowaliśmy teraz udowodnić twierdzenie dla l za pomocą indukcji zupełnej. Dla $l = 2$ mamy tak zwaną „zasadę szufladkową". Jeżeli $k+1$ przedmiotów mamy umieścić w k szufladkach, to jedna z nich musi zawierać co najmniej 2 przedmioty. Bardzo pożyteczna zasada, którą Dirichlet zastosował z powodzeniem w teorii liczb.

Artin spodziewał się — a sukces wykazał jego rację — że uogólnienie z dwóch na k klas będzie korzystne przy dowodzie indukcyjnym. Można mianowicie, jak sądził, próbować udowodnić hipotezę dla dowolnego k i dla l wyrazów, przyjmując za założenie indukcyjne, że jest ona już udowodniona dla wszystkich k i dla $l - 1$ wyrazów.

To zrazu nieco nieokreślone rozważanie zostało w dalszym toku dyskusji bardziej zaostrzone, głównie przez Artina, w sposób następujący. Postawmy sobie jako zadanie udowodnienie hipotezy dla dwóch klas i postępu o l wyrazach. Jeżeli wszystkie liczby całkowite są podzielone na dwie klasy, to na przykład trójki kolejnych liczb są automatycznie podzielone na osiem klas, gdyż trzy liczby trójki mogą niezależnie od siebie leżeć w klasie 1 lub 2, a to daje $2^3 = 8$ możliwości. Możemy teraz te trójki liczb ponumerować, biorąc ewentualnie za każdym razem pierwszą liczbę trójki jako numer, tak że trójka numer n składa się z liczb n, $n+1$ i $n+2$. Te numery zostają wówczas podzielone na osiem klas i do tych ośmiu klas możemy niewątpliwie zastosować założenie indukcyjne.

To samo ma miejsce, jeżeli rozpatrujemy „bloki" więcej niż trzech kolejnych liczb. Zgodnie z założeniem indukcyjnym istnieje wśród dostatecznie wielu kolejnych „bloków" $(l-1)$-wyrazowy postęp arytmetyczny bloków. „Wzorzec" podziału liczb na klasy, który znajdujemy w jednym z tych bloków, powtarza się dokładnie w ten sam sposób we wszystkich $l-1$

Rys. 8

blokach postępu. Może, tak sądził Artin, te powtarzające się wzorce dadzą nam sposób konstrukcji l-wyrazowego postępu. Poza tym bloki same, jeżeli są dostatecznie długie, zawierają $(l-1)$-wyrazowy postęp arytmetyczny liczb jednej klasy. Te również mogą być użyte do konstrukcji.

Próbowaliśmy przeto, ponieważ twierdzenie jest słuszne dla $l = 2$, przejść od $l = 2$ do $l = 3$, a mianowicie wzięliśmy z początku dwie klasy (bez względu na to, że rozpatrywaliśmy ten przypadek już przedtem drogą bezpośredniego wyliczania wszystkich możliwości). Zaznaczaliśmy liczby w postaci małych poprzecznych kresek w odstępie poziomym 1 na dwóch poziomych prostych, które miały przedstawiać obie klasy.

Wśród każdej trójki kolejnych liczb muszą być zgodnie z założeniem indukcyjnym, to znaczy w tym wypadku zgodnie z zasadą szufladkową, dwie należące do tej samej klasy, powiedzmy pierwszej. Jeżeli będziemy teraz przedłużali postęp arytmetyczny, zaczynający się od tych dwóch kresek, to możemy przyjąć, że trzecia kreska nie należy już do klasy pierwszej (w przeciwnym bowiem wypadku sprawa byłaby przecież już skończona), lecz do drugiej. W ten sposób otrzymujemy rysunek 8.

Do tego miejsca wszystkie rozważania były prowadzone wspólnie. W dalszym zaś ciągu rozumowałem jak następuje:

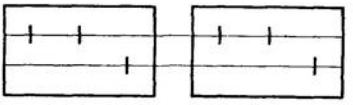
W każdym bloku pięciu kolejnych liczb musi wystąpić układ taki jak na rysunku 8, gdyż między pierwszymi trzema liczbami bloku muszą już

być dwie, należące do tej samej klasy, i ten postęp dwuwyrazowy może być wewnątrz bloku przedłużony do postępu trzywyrazowego.

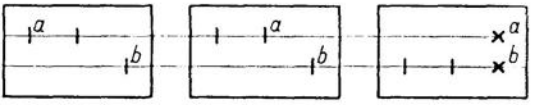
Takie układy powtarzają się, albowiem bloki pięciu liczb są podzielone na $2^5 = 32$ klasy, i wśród 33 kolejnych ([6]) bloków muszą być, zgodnie z zasadą szufladkową, co najmniej dwa jednakowe. W ten sposób otrzymujemy rysunek 9, przy czym odstęp w kierunku poziomym między początkiem pierwszego i drugiego bloku wynosi najwyżej 32.

Lecz to wciąż jeszcze nie daje postępu trzywyrazowego. Aby taki postęp otrzymać, przesunąłem drugi pięcioliczbowy blok jeszcze raz o tę samą odległość i przyjrzałem się postępowi trójwyrazowemu, który powstał przez to przesunięcie z podkreślonych liczb (rys. 10).

Trzecia liczba tego przesuniętego postępu nie ma już teraz wyjścia. Albo należy do klasy pierwszej: wówczas w tej klasie znajduje się postęp a, a, a. Albo należy do klasy drugiej: w klasie drugiej wówczas znajduje się postęp b, b, b.



Rys. 9

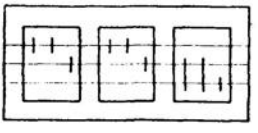


Rys. 10

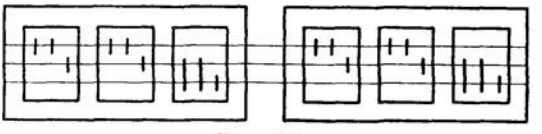
Ten dowód dotyczył zrazu tylko już wcześniej rozpatrzonego przypadku $k = 2$, $l = 3$. Mimo to miałem po zaprezentowaniu go nieodparte przeświadczenie, że posiadłem już dowód ogólny.

Artin i Schreier nie wierzyli jeszcze. Wówczas przeprowadziłem im analogiczny dowód dla następnego kolejnego przypadku $k = 3$, $l = 3$.

W tym przypadku można przede wszystkim zastosować dokładnie to samo rozumowanie (z blokami po siedem liczb zamiast pięciu i odległości 3^5 zamiast 2^5), lecz teraz trzecia liczba w trzecim bloku ma wyjście. Może należeć do klasy trzeciej i tak otrzymujemy układ, przedstawiony na rysunku 11.



Rys. 11



Rys. 12

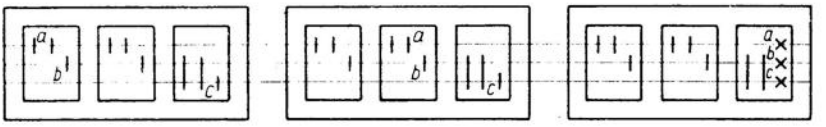
W każdym dużym bloku o $3^5+3^5+7 = h$ kolejnych liczbach znajduje się taki układ. Teraz duże bloki rozpadają się na 3^h klas. Między każdymi 3^h+1 kolejnymi dużymi blokami znajdują się zgodnie z zasadą szufladkową dwa jednakowe. W nich kreśli się małe bloki i otrzymuje się rysunek 12.

([6]) „Kolejny" ma znaczyć: przesunięty stale o jedno miejsce.

A teraz przesuwa się duży blok, a otrzymuje się wówczas na miejscu przesuniętej liczby c albo postęp a, a, a w klasie pierwszej albo postęp b, b, b — w drugiej albo c, c, c — w trzeciej (rys. 13).

Teraz stało się dla wszystkich zainteresowanych jasne, że dla $l = 3$ metoda dowodu da się zastosować do dowolnego k. Ale Artin i Schreier chcieli jeszcze zobaczyć przypadek $l = 4$.

Przyjąłem przede wszystkim znowu dwie klasy. Zgodnie z tym, co zostało już udowodnione, wśród dostatecznie wielu, powiedzmy n kolejnych liczb, znajduje się trójwyrazowy postęp, którego wszystkie wyrazy nale-



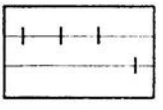
Rys. 13

żą do jednej klasy. Jeżeli przedłużymy ten postęp, to czwarty wyraz należy do innej klasy (w przeciwnym bowiem przypadku sprawa byłaby przecież już skończona). Wszystkie cztery liczby należą do bloku o m kolejnych liczbach, przy czym m jest największą całością liczby

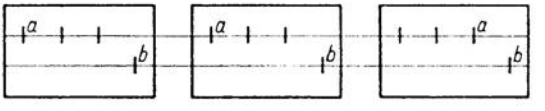
$$n+\tfrac{1}{2}(n-1). \tag{1}$$

W każdym takim bloku występuje więc układ przedstawiony na rysunku 14.

Bloki o długości g są podzielone na 2^g klas. Wśród dostatecznie wielu, powiedzmy $n(3, 2^g)$ kolejnych bloków, znajdują się przeto trzy bloki w po-



Rys. 14



Rys. 15

stępie arytmetycznym, należące do tej samej klasy. Układ w pierwszym bloku powtarza się dokładnie tak samo w drugim i trzecim (rys. 15).

Jeżeli teraz dodamy jeszcze czwarty blok, to musimy otrzymać znowu postęp arytmetyczny a, a, a, a lub b, b, b, b,

Skoro to wyprowadziłem, stało się dla nas trzech jasne, że proces przebiega dalej dokładnie tak samo, że możemy także dla dowolnych l wyczerpać po kolei wszystkie przypadki $k = 2, 3, \ldots$ i w ten sposób przejść ogólnie z $l-1$ na l.

Dowód, który przedstawiłem w „Nieuw Archief voor Wiskunde" 15, 212 (1927), jest dokładnym odtworzeniem objaśnionego tu poglądowo toku myśli. Utworzonemu przedtem wyrażeniu (1), którego ogólną postacią jest

$$n+\left[\frac{n-1}{l-2}\right], \tag{2}$$

odpowiada w "Nieuw Archief" przy przejściu od $l-1$ do l wyrażenie

$$n(l-1, k)+\left[\frac{n(l-1, k)-1}{l-2}\right]. \tag{3}$$

Dowód, który podaje Chinczyn w swej bardzo pięknej książeczce([7]), nie różni się istotnie od mego dowodu; tylko zamiast wyrażenia (2) bierze Chinczyn po prostu $2n$. Dalej rozpatruje on zamiast kolejnych bloków bloki położone obok siebie i dotykające się, jak $(a, \ldots, a+b-1)$ i $(a+b, \ldots$ $\ldots, a+2b-1)$, przez co oszacowanie jest nieco mniej dokładne.

Psychologia odkrycia ma swoje osobliwe trudności. Większości z nas przychodzi z trudnością przypomnienie sobie po fakcie wszystkiego, co nam się snuło po głowie. Jeszcze trudniej tak odtworzyć własne przygotowawcze rozważania, żeby także inni je zrozumieli. Krótkie urywki myśli, które stanowią naszą rozmowę z samym sobą, nie dadzą się przedstawić innym bez sprecyzowania i objaśnienia, a przez precyzowanie zniekształca się myśli.

W przypadku jednak naszej rozmowy o hipotezie Baudeta warunki umożliwiające odtworzenie są o wiele korzystniejsze, wszystkie bowiem myśli, które w naszych głowach powstały, były natychmiast wypowiadane i uzmysławiane pozostałym przy pomocy kresek na tablicy. To, co zostało wypowiedziane i narysowane, możemy o wiele lepiej zapamiętać i odtworzyć niż same myśli. Wszystkie wskazówki, które otrzymałem od Artina i Schreiera, zostały również wypowiedziane i *oddziaływały na mnie tylko o tyle, o ile zostały wypowiedziane*. A więc idealny przypadek, aby przeanalizować proces odkrycia, aby autentyczny pomysł odgraniczyć od systematycznego rozumowania.

Geometryczne unaocznienie liczb przez poprzeczne kreski nasuwało się samo przez się. To samo dotyczy próby zastąpienia nieskończonych ciągów liczbowych przez skończony odcinek ich początkowych wyrazów, zwłaszcza, gdy w najprostszych przykładach skończony odcinek okazał się już wystarczający. Skończony odcinek jest bardziej uchwytny i bardziej przejrzysty niż nieskończony ciąg liczb. Mieliśmy wystarczającą podstawę, aby spodziewać się, że przez to wzmocnienie tezy indukcja zupełna zostanie ułatwiona.

„Zawsze zaczynać od najprostszych przykładów" zwykł był mawiać Hilbert. Tak rozpoczęliśmy od przypadku $l = 2$ i doszliśmy do znanej „zasady szufladkowej". Stosuje się ona nie tylko do $k = 2$, lecz do dowolnych k. Tak uogólnienie na dowolne k było już zupełnie jasne.

Ponieważ dla $l = 2$ hipoteza jest słuszna, nasuwała się myśl, by w indukcji wnioskować z $l-1$ na l. Dla dowodu indukcyjnego jest oczywiście najkorzystniej, gdy dla długości $l-1$ założymy możliwie dużo, a dla długości l postawimy sobie jako cel udowodnić możliwie mało.

([7]) A. J. Chinczyn, *Trzy perły teorii liczb* (po rosyjsku 1947; po niemiecku 1951; po angielsku 1952).

W ten sposób został nakreślony plan dowodu. Dla długości $l-1$ i dla *wszystkich* k należało przyjąć hipotezę jako słuszną i próbowaliśmy ją udowodnić dla długości l i dla jedynego k, na przykład $k = 2$. Przy tym ograniczyliśmy się z początku do najprostszego przypadku ($k = 2$, $l = 3$) i próbowaliśmy znaleźć rozumowanie, które dałoby się może przenieść na następne kolejne przypadki.

Zgodnie z zasadą szufladkową w jednej z klas znajduje się postęp dwuwyrazowy $(a, a+d)$. Aby dojść do postępu trójwyrazowego, trzeba dołączyć liczbę $a+2d$. Jeżeli znajduje się ona w tej samej klasie, co a i $a+d$, to sprawa jest załatwiona; możemy przeto przyjąć, że $a+2d$ znajduje się w innej klasie (rys. 8).

Do tego miejsca nie było innej możliwości rozumowania, ale teraz dowód uległ zahamowaniu. Aby pójść dalej, potrzebny był pomysł, i o ile nie zawodzi mnie pamięć, Artin był tym, który nań wpadł. Założenie indukcyjne (w tym więc wypadku zasadę szufladkową) możemy zastosować nie tylko do liczb, lecz także i do kolejnych bloków, ponieważ także i one są podzielone na klasy. Liczba klas jest tu nieco większa, ale to nie szkodzi, ponieważ mamy do dyspozycji założenie indukcyjne dla *wszystkich* k.

Dzięki pomysłowi Artina została zapewniona powtarzalność całego bloku wzorcowego i mogliśmy sporządzić rysunek 9, pokazujący nam w pierwszym bloku dwie liczby klasy pierwszej i jedną drugiej, tworzących postęp arytmetyczny, w drugim bloku odpowiednie liczby w tej samej klasie.

Jak należało teraz od tego przejść do postępu trójwyrazowego? Przypomnijmy sobie, że w poprzednio rozpatrywanym przykładzie sytuacja bez wyjścia liczby 9 polegała na tym, że tworzy ona zarówno w klasie pierwszej jak i drugiej trójwyrazowy postęp, w pierwszym wypadku z 1 i 5, w drugim z 7 i 8.

Zupełnie podobnie dochodzimy teraz i tu do sytuacji bez wyjścia, dołączając przedstawiony na rysunku 10 trzeci blok i znajdując w nim liczbę, która tworzy albo w klasie pierwszej postęp trójwyrazowy a, a, a, albo w klasie drugiej postęp b, b, b.

To był przeto mój pomysł. Zgodnie z tym, co powiedziałem, powinno być jasne, że pomysł łatwo narzucał się i wynikał po prostu niemal w sposób konieczny z poprzedzających rozważań. Jedyną liczbą, która w sytuacji rysunku 9 tworzy zarówno z dwiema liczbami klasy pierwszej postęp a, a, a, jak i z dwiema liczbami klasy drugiej postęp b, b, b, jest oznaczona przez a i b trzecia liczba trzeciego bloku na rysunku 10.

Najbardziej godne uwagi w tym pomyśle było towarzyszące mu uczucie zupełnej pewności. Miałem intuicyjne przekonanie, że dokładnie ta sama metoda, którą przedstawiłem na tablicy w przypadku $k = 2$ i $l = 3$, prowadzi do celu także we wszystkich bardziej skomplikowanych przypadkach.

Jak to przekonanie mogło powstać w podświadomości, tego nie wiem. Sadzę jednak, że mogę wyjaśnić, dlaczego Artin i Schreier nie byli tak pewni,

nawet gdy im objaśniłem przypadek $k = 2$, $l = 3$. Oni widzieli tylko wynik: istnieniu postępu a, a, a w klasie pierwszej lub b, b, b w klasie drugiej. Ja zaś znalazłem metodę tworzenia takich postępów i miałem nieodparte uczucie, że ta metoda stosuje się również do następnych kolejnych przypadków.

Jest to tak, jak przy zrywaniu jabłek z drzewa. Jeśli zerwiemy jedno jabłko, a drugie wisi nieco wyżej, to możliwe, że sami wiemy, że nieco większym wysiłkiem dosięgniemy również jeszcze i to drugie jabłko, podczas gdy widz, który widzi jedynie, że dosięgnęliśmy akurat to jedno jabłko, ma wątpliwości. Mamy jednak nie tylko jabłko, lecz także wyczucie ruchu, który wykonaliśmy, aby je zerwać.

Uczucie, że metoda dowodu może być stosowana jeszcze dalej, jest nieraz zawodne. Często okazuje się później, że w następnych kolejnych przypadkach wyłania się nowa trudność. Mimo to, takie przeczucia o zakresie stosowalności metod dowodu należą do najpożyteczniejszych drogowskazów przy badaniach matematycznych.