ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IX (1966)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. FREUDENTHAL (Utrecht)

Rola intuicji geometrycznej we współczesnej matematyce*

Geometria grecka była pierwszym właściwym ucieleśnieniem idei matematyki. Chociaż działalność matematyczna, zarówno w algebrze, jak i geometrii, rozpoczęła się dwa czy trzy tysiące lat przed Euklidesem, wyrazy takie, jak twierdzenie, założenie, dowód, analiza, teoria, aksjomat, postulat, definicja i pojęcia, które one oznaczają, są wynalazkiem matematyki greckiej. Matematyka grecka to geometria i cała problematyka, z której się ta matematyka rozwinęła, może być właściwie zrozumiana tylko w związku z geometrią. Niewymierność wystąpiła po raz pierwszy w związku z przekątną kwadratu. Liczba nie potrafiła opisać stosunku wielkości, wobec czego zaniechano zajmowania się algebrą. Geometria przekształciła się z przedmiotu w metodę. Metody algebraiczne tłumaczono na język geometrii i przyjmowano je tylko wtedy, gdy dokonanie takiego tłumaczenia było możliwe. Przez swą wierność tej zasadzie matematycy greccy stworzyli system, który sparaliżował rozwój matematyki na okres prawie dwóch tysięcy lat.

Nowoczesne przewartościowanie pojęć zawdzięczamy walce Kartezjusza przeciw tradycji; skrupuły Greków nie odstraszyły go. Algebra z symboliką Viety stała się dyscypliną niezależną i fundamentem rachunku różniczkowego i całkowego, w którym zlekceważono grecką ścisłość i krytyczne nastawienie. Wybitne osiągnięcia algebry oraz analizy faworyzowały pragmatyzm, jednak grecką geometrię widziano wciąż jeszcze jako „kolec w ciele" matematyki. Wzorcowa ścisłość Euklidesa pozostawała ideałem dla krytycznych matematyków i „bardziej geometryczny" oraz „ścisły" uważano za synonimy.

Uległo to zmianie, gdy w drugiej połowie XIX wieku algebra i analiza zostały uporządkowane w sposób niezależny od geometrii, a tradycyjna geometria okazała się mniej ścisła, niż to dotychczas oceniano, a znacznie mniej ścisła niż nowo powstałe podstawy analizy. Chociaż Grecy odczuwali konieczność uzasadnienia algebry środkami geometrycznymi, zaczęto teraz wątpić, czy możliwe jest ugruntowanie geometrii bez odwołania się do al-

---

* Przekład artykułu *The role of geometrical intuition in modern mathematics*, ICSU Review of World Science 6(1964), str. 206-209.

gebry. Wątpliwości te trwały i zostały usunięte dopiero w końcu stulecia dzięki hilbertowskiej aksjomatyce geometrii.

Po działalności Viety geometrię nadal ceniono wysoko, nie wpłynęło to jednak w sposób dostrzegalny na rozwój geometrii. Matematycy byli zbyt zaabsorbowani analizą. Twórcze zainteresowanie geometrią odżyło dopiero w XIX wieku i geometria nieeuklidesowa, geometria rzutowa, geometria algebraiczna i badania podstaw geometrii są owocami tej epoki rozkwitu.

Jakie miejsce w matematyce dzisiejszej zajmuje geometria? Czy istnieje ona jeszcze? W burbakistowskim systemie matematyki nie ma jej; w czasopismach referatowych to, co nazywają geometrią, zajmuje zaledwie pięć procent objętości; w programach uniwersyteckich geometria jest zaledwie wspominana, a ludzie, którzy mogliby nazywać się geometrami, nie czynią tego, gdyż słowo to brzmi staromodnie. Gdy jednak przyjrzeć się dokładniej, sprawa wygląda inaczej. W jednym paragrafie pracy wybranej na chybił trafił, a której tytuł wskazywał, że jest pracą z analizy, udało mi się znaleźć słowa „przestrzeń Hilberta", „przestrzeń wektorowa", „wymiar' „wektor własny", „podobieństwo", „odwzorowanie", „wypukły", „odbicie", „otoczenie", „oś liczbowa", „środek", „sześcian", „liniowy", „przesunięcie", „obwiednia", „rzut" — tło geometryczne pozornie niegeometrycznego tematu. Poza tym nie wymieniłem najbardziej rzucającego się w oczy przykładu, słowa „aksjomat", które w swym współczesnym znaczeniu zostało wprowadzone przez Hilberta w jego podstawach geometrii.

Słowa odpowiadają pojęciom. Geometryczna terminologia współczesnej algebry i analizy wskazuje na przesiąknięcie całej matematyki intuicją geometryczną, co wyjaśnimy na kilku przykładach.

Jednym z nich jest burzliwy rozwój teorii funkcji analitycznych w XIX wieku, który rozpoczął się wtargnięciem geometrii do analizy, jakim było przedstawienie przez Gaussa liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny. Znaczenie algebraiczne równania $x^n = 1$ stało się jasne dzięki jego interpretacji geometrycznej, dzięki jego ścisłemu związkowi z konstrukcją n-kąta foremnego na płaszczyźnie Gaussa. Dwuokresowość funkcji eliptycznych stała się interesująca i zrozumiała dzięki jej interpretacji geometrycznej. Wbrew pozornie ostatecznemu zwycięstwu, jakie w przeciągu ostatnich trzydziestu lat XIX wieku odniosła weierstrassowska algebraizacja funkcji analitycznych nad intuicją geometryczną, wielkie problemy, które rozwiązano na przełomie XIX i XX wieku pochodziły od Riemanna, od geometrycznych idei powierzchni Riemanna, przekształcenia konforemnego, uniformizacji — tj. od pojęć wprowadzonych początkowo wyłącznie za pomocą środków geometrycznych i które dotąd badano metodami intuicyjnymi.

Innym przykładem jest tchnięcie nowego życia w pojęcie liczby począwszy od lat siedemdziesiątych zeszłego stulecia. Liczba, jako ilość czegoś,

jako liczba kardynalna, jest pochodzenia intuicyjnego. W historii ludzkości i pojedynczego człowieka dodawanie i mnożenie zaczynają się od działań na palcach i kamykach. Wkrótce jednakże, zwłaszcza w wyniku stopniowego rozszerzania obszaru liczb, pojęcie liczby krzepnie wraz z prawami algorytmicznymi zarówno w rozwoju człowieka jako gatunku, jak i w rozwoju indywidualnym. Liczba, jako ilość czegoś jest przedmiotem prymitywnych zastosowań i we właściwej matematyce nie jest istotna. Było tak przynajmniej aż do Cantora, który pierwszy w sposób świadomy uwypuklił nieświadomy, intuicyjny proces abstrakcji, który prowadzi od intuicyjnych zaczątków do formalnego pojęcia liczby. W wyniku tej analizy mógł Cantor wprowadzić zbiory, ich przekształcenia, przekształcenia wzajemnie jednoznaczne i w końcu podział zbiorów na klasy zbiorów dających się przekształcić wzajemnie jednoznacznie jeden na drugi; klasy te nazywamy liczbami kardynalnymi.

Teoria mnogości okazała się bardziej abstrakcyjna i ściślejsza od czegokolwiek w poprzedzającej ją matematyce. Z tych samych przyczyn intuicja geometryczna nie odgrywała nigdy dawniej i w żadnej innej dziedzinie tak ważnej roli jako siła nadająca ramy organizacyjne i bodziec rozwojowy zapobiegający zdegenerowaniu się teorii mnogości w czysty algorytm. Z geometrii osi liczbowej zaczerpnął Cantor abstrakcyjne pojęcie porządku i teorię mnogości punktowych. Dalszym wzbogaceniem teorii mnogości, dokonanym na początku bieżącego stulecia, okazało się pojęcie miary, które wyrosło z geometrycznego pojęcia pola i spowodowało rewolucyjne zrewidowanie klasycznego pojęcia całki, które stało się martwym, zalgorytmizowanym narzędziem. W tym samym czasie teoria mnogości punktowych przekształciła się w nową dyscyplinę geometryczną, topologię, badającą kształty geometryczne za pomocą intuicyjnych wyobrażeń o spójności. Najpotężniejsze algebraiczne metody topologii zapoczątkowane zostały badaniem intuicyjnie najelementarniejszych kształtów, wielościanów; inicjatorem był L. E. J. Brouwer, konstruowanie zaś patologicznych kontrprzykładów, stanowiące domenę bardziej abstrakcyjnej topologii teoriomnogościowej, stawiało najwyższe wymagania intuicji geometrycznej. Metody topologiczne, zarówno pochodzenia algebraicznego, jak i teoriomnogościowego, wywarły silny wpływ na współczesną algebrę i analizę, a tymczasem intuicja geometryczna wydaje się zanikać w samej topologii. Jest to jednakże wrażenie powierzchowne. Większość idei i problemów wychodzących wciąż z młyna topologii ma silnie zarysowane tło geometryczne i w ostatnich latach stare problemy zostały rozwiązane za pomocą bezpośrednich metod geometrycznych, niezależnych od aparatu topologii algebraicznej.

Pod wpływem algebry naiwne pojęcie przestrzeni zostało w sposób wyrafinowany pogłębione w wieku XIX. W geometrii analitycznej krzywe na płaszczyźnie i powierzchnie w przestrzeni są opisywane przez równania

z dwiema lub trzema niewiadomymi. Na odwrót, można wyjaśnić własności algebraiczne równań interpretując je jako własności krzywych i powierzchni. Czy geometria nie mogłaby znaleźć zastosowania w badaniu równań z n niewiadomymi, jeśliby tylko geometrzy zechcieli przestawić się na rozważanie w przestrzeni n-wymiarowej? Czy wyznacznik macierzy $n \times n$ nie byłby łatwiejszy do zrozumienia, jeśliby interpretować go, podobnie jak dla $n = 3$, jako objętość w przestrzeni n-wymiarowej? W końcu XIX wieku przestrzeń n-wymiarowa była czymś naturalnym dla geometrów. Jej algebraiczne pochodzenie jest jeszcze namacalne; tworzy się ją w sposób algebraiczny, za punkt wyjścia przyjmując współrzędne. Nowy sposób podejścia dali w latach dwudziestych matematycy zajmujący się algebrą abstrakcyjną, którzy okazali się wówczas bardziej autentycznymi geometrami niż sami geometrzy. Domagali się, by w definiowaniu i badaniu przestrzeni n-wymiarowej elementy geometryczne, jak punkty lub wektory, miały rolę pierwszoplanową, współrzędne zaś były ich tworem pochodnym. Dzisiaj pojęcie przestrzeni liniowej czy wektorowej jest własnością wszystkich matematyków.

W międzyczasie pojęcie przestrzeni rozszerzono na przypadek nieskończenie wielu wymiarów. Pionierami byli analitycy, którzy potrzebowali abstrakcyjnych przestrzeni funkcyjnych dla swoich nowych metod. Wraz ze słowem „przestrzeń" przyswoili oni całą terminologię geometryczną, geometryczne sposoby myślenia i intuicje.

Jak zaznaczyliśmy poprzednio, słowo i pojęcie „aksjomatyczny" rozpoczęło podbój matematyki od geometrii. Geometria stanowiła przez wieki problem filozoficzny: problem, jak drogą czystego rozumowania, z zamkniętymi oczyma, można dochodzić do stwierdzeń o rzeczywistości (czy przestrzeń z trójkątami, równoległymi, sferami itp. nie jest częścią rzeczywistości?), do twierdzeń, które okazywały się prawdziwymi, gdy człowiek otworzył oczy, prowadził proste, wytyczał i mierzył kąty. Powolny proces dojrzewania w XIX wieku doprowadził do słynnego rozwiązania w podstawach geometrii Hilberta, które później zostało soczyście sformułowane przez Einsteina:

„Skoro tylko twierdzenia matematyczne odwołują się do rzeczywistości, to są niepewne, a jak długo są pewne, to nie odwołują się do rzeczywistości... Postęp uzyskany przez aksjomatykę polega na wyraźnym odgraniczeniu logicznej formy i realistycznych oraz intuicyjnych treści... Aksjomaty są wolnymi tworami umysłu ludzkiego..."

System Hilberta, w przeciwieństwie do systemu Euklidesa, nie rozpoczyna się definicjami, lecz aksjomatami, tj. sformułowaniami zawierającymi niezdefiniowane pojęcia, np. punkt, prosta, między, przystający; znaczenie tym wyrażeniom nadane jest przez aksjomaty w sposób pośredni. Jako reguły gry aksjomaty są dowolne, chociaż dla praktycznych zastosowań muszą one odpowiadać pewnemu celowi. Z *logicznego* punktu widze-

nia nie ma sensu pytać, czy układ aksjomatów jest prawdziwy, lecz tylko, czy jest niesprzeczny.

Logiczna pozycja geometrii została wyjaśniona przez pojęcia aksjomatu i asjomatyki. Wpływ tego uwidocznił się przede wszystkim w topologii, gdzie Hausdorff zaksjomatyzował przestrzeń topologiczną, oraz w algebrze, którą odbudowano na gruncie aksjomatycznie zdefiniowanych pojęć grupy, pierścienia, ciała itd. Dzisiaj metoda aksjomatyczna przeniknęła całą matematykę. Początkowo twórcza geometria nie ulegała w większej mierze nowym wpływom. Dopiero w latach trzydziestych geometrzy przypomnieli sobie o wolności umysłu ludzkiego w tworzeniu aksjomatów — wolności kontrolowanej przez rozumną intuicję geometrów oraz żądanie niesprzeczności. Metoda Hilberta dowodzenia niesprzeczności za pomocą systemu algebraicznego spełniającego aksjomaty (odpowiednio geometria analityczna) może prowadzić do odkrycia nowych ważnych systemów algebraicznych, jak to w rzeczywistości było w latach trzydziestych, gdy geometria dała początek nowemu i ważnemu algebraicznemu pojęciu ciała alternatywnego (tj. ciała z pewnym ograniczeniem prawa łączności mnożenia).

To tylko jeden z wielu przykładów. W teorii grup, której obiekty nie są bardziej konkretne niż w abstrakcyjnej teorii mnogości, zagadnienia geometryczne często wskazują drogę do interesujących problemów. Być może prawdą jest, że „geometria algebraiczna" przestała być geometrią pomimo swej geometrycznej terminologii, jednakże rozwój jej inspirowany jest często przez zagadnienia ściśle geometryczne. Z drugiej strony „geometryczna teoria liczb" jest najczystszą geometrią zarówno w swej problematyce, jak i metodach.

Zacieranie się granic pomiędzy klasycznymi gałęziami jest cechą współczesnej matematyki. Geometrię jako wyróżniającą się całość trudno dziś wyodrębnić, ale jej metody wciąż bujnie się rozwijają. Dlaczego intuicja geometryczna, o której często mówi się, że już obumarła, nadal pozostaje żywotna, nawet w dziedzinach, które pozornie nie mają nic wspólnego z geometrią? Oczywiście dlatego, że intuicja geometryczna może nam wskazywać, co jest ważne, interesujące i dostępne, zabezpieczając nas przed błądzeniem po olbrzymiej pustyni problemów, idei oraz metod. Możemy to wyrazić, parafrazując powiedzenie Kanta: Intuicje bez pojęć są puste, pojęcia bez intuicji są ślepe.